UNIONE MATEMATICA ITALIANA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA

Progetto Olimpiadi di Matematica 2007

GARA di SECONDO LIVELLO

21 febbraio 2007

1) Non sfogliare questo fascicoletto finché l'insegnante non ti dice di farlo. NON È AMMESSO L'UTILIZZO DI CALCOLATRICI TASCABILI, LIBRI DI TESTO E TAVOLE NUMERICHE. È proibito comunicare con altri concorrenti o con l'esterno; IN PARTICOLARE, È VIETATO L'USO DI TELEFONI CELLULARI.
2) La prova consiste di 18 problemi divisi in 3 gruppi.
3) Nei problemi dal numero 1 al numero 12 sono proposte 5 risposte possibili, indicate con le lettere **A, B, C, D, E**. **Una sola** delle risposte è corretta. La lettera corrispondente alla risposta corretta dovrà essere riportata, per ogni quesito, in fondo a questa pagina nella relativa finestrella. Ogni risposta **giusta vale 5 punti**, ogni risposta **errata vale 0 punti** e ogni problema lasciato **senza risposta vale 1 punto**. Non sono ammesse correzioni o cancellature sulla griglia.
4) I problemi dal numero 13 al numero 16 richiedono una risposta che è data da un numero intero. Questo numero intero va indicato in fondo a questa pagina nella relativa finestrella. Ogni risposta **giusta vale 8 punti**, ogni risposta **errata vale 0 punti** e ogni problema lasciato **senza risposta vale 1 punto**. Non sono ammesse correzioni o cancellature sulla griglia.
5) I problemi 17 e 18 richiedono invece una dimostrazione. Ti invitiamo a formulare le soluzioni in modo chiaro e conciso usufruendo dello spazio riservato e consegnando soltanto i fogli di questo fascicoletto. Tali problemi verranno valutati con un punteggio **da 0 a 12**.
6) Quando l'insegnante dà il via, comincia a lavorare. Hai **3 ore** di tempo. Buon lavoro!

Da riempirsi da parte dello studente

NOME:______________________ COGNOME:______________________

Indirizzo:______________________________ Città:______________________

SCUOLA:______________________ ANNO di CORSO:____ Città:______________________

Risposte ai primi 16 quesiti

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

PUNTEGGIO (da riempirsi a cura dell'insegnante)

numero delle risposte esatte (1–12)		$\times 5 =$	
numero delle risposte esatte (13–16)		$\times 8 =$	
numero degli esercizi senza risposta		$\times 1 =$	
valutazione esercizio n.17			
valutazione esercizio n.18			
PUNTEGGIO TOTALE			

Si ringrazia per la collaborazione
ENI

Visitate il sito internet delle olimpiadi: `http://olimpiadi.dm.unipi.it`

Problemi a risposta multipla – 5 punti

1. In un triangolo isoscele ABC con $AC = BC \neq AB$, si fissi un punto P sulla base AB. Quante posizioni può assumere nel piano un punto Q se vogliamo che i punti A, P e Q, presi in ordine qualsiasi, siano i vertici di un triangolo simile ad ABC?
   (A) 0 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4 **(E)** 6.

2. Un mercante ha 6 barili di capacità 15, 16, 18, 19, 20 e 31 litri. Cinque di essi sono pieni di vino e solo uno di essi è pieno di birra. Il mercante tiene per sé il barile di birra e vende tutti i barili di vino a due persone diverse, senza frazionarne il contenuto. Se uno dei due acquirenti ha comprato una quantità di vino esattamente doppia di quella acquistata dall'altro, quanti litri contiene il barile di birra?
   (A) 16 **(B)** 18 **(C)** 19 **(D)** 20 **(E)** 31.

3. La rappresentazione in base 2 di un numero a è 111000010011101010111010000l. Qual è la settima cifra da sinistra della rappresentazione di a in base 8?
   (A) 2 **(B)** 3 **(C)** 4 **(D)** 5 **(E)** 6.

4. Uno studente universitario ha superato un certo numero di esami, riportando la media di 23. Dopo aver superato un altro esame, la sua media scende a 22,25. Sapendo che il voto di ciascun esame è un numero intero compreso fra 18 e 30 inclusi, che voto ha riportato lo studente all'ultimo esame?
   (A) 18 **(B)** 19 **(C)** 20 **(D)** 21 **(E)** 22.

5. Sia $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Sapendo che la somma di due delle radici del polinomio vale zero, quale fra le seguenti relazioni tra i coefficienti di $P(x)$ è sempre vera?
   (A) $abc = 0$ **(B)** $c = ab$ **(C)** $c = a + b$ **(D)** $b^2 = ac$
   (E) nessuna delle risposte precedenti è corretta.

6. Dall'insieme $\{1, 2, \dots, 100\}$ scegliamo 50 numeri distinti, la cui somma è 3000. Come minimo, quanti numeri pari abbiamo scelto?
   (A) 2 **(B)** 3 **(C)** 4 **(D)** 5 **(E)** 6.

7. Agli ultimi campionati del mondo di calcio, il girone A è terminato con la classifica seguente:
   Austria 7, Brasile 5, Camerun 4, Danimarca 0.
   Austria e Camerun hanno subito una rete ciascuna.
   Brasile e Camerun hanno segnato una sola volta, mentre l'Austria ha fatto tre reti.
   Con che punteggio è terminata Austria-Danimarca?
   Nota: Si ricorda che, in ogni partita disputata nel girone, la squadra vincitrice guadagna 3 punti, quella perdente 0 punti; in caso di pareggio ciascuna delle due squadre guadagna 1 punto.
   (A) 1–0 **(B)** 2–1 **(C)** 2–0 **(D)** 0–0
   (E) non può essere determinata coi soli dati forniti.

8. Priscilla è stata incaricata di preparare la scenografia per la recita della sua scuola. Ha bisogno di una falce di luna, e ha a disposizione un cerchio di cartone di raggio r in cui ritagliarla; allora punta il compasso sul bordo del cerchio, disegna un arco di circonferenza di raggio $r\sqrt{2}$ e taglia lungo la linea tracciata. Quanto vale l'area della falce di luna che ottiene?
   (A) r^2 **(B)** $\frac{\sqrt{2}}{2}\pi r^2$ **(C)** $\frac{1}{3}\pi r^2$ **(D)** $\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right) r^2$ **(E)** $\left(\frac{\pi}{4} + 1\right) r^2$

9. Alberto, Barbara, Chiara e Davide mescolano un mazzo di 40 carte e poi ne distribuiscono 10 a testa. Alberto guarda le sue ed esclama: "Che strano, non ho nessuna carta di picche". Sapendo questa informazione, qual è la probabilità che anche Barbara non abbia nessuna carta di picche? (nota: le carte di picche sono 10).
   (A) $\frac{30!}{20!\,40!}$ **(B)** $\frac{20!}{10!\,30!}$ **(C)** $\frac{30!\,30!}{20!\,40!}$ **(D)** $\frac{20!\,20!}{10!\,30!}$ **(E)** $\frac{30!\,10!}{40!}$

10. Un triangolo equilatero ha lo stesso perimetro di un rettangolo di dimensioni b ed h (con $b > h$). L'area del triangolo è $\sqrt{3}$ volte l'area del rettangolo. Quanto vale $\frac{b}{h}$?
    (A) $\sqrt{3}$ **(B)** 2 **(C)** $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$ **(D)** $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ **(E)** $\frac{7+3\sqrt{5}}{2}$.

11. Ogni anno un gran numero di studenti partecipa alle Olimpiadi Internazionali di Matematica. Un dodicesimo di essi vince una medaglia d'oro, un altro sesto vince una medaglia d'argento, un ulteriore quarto vince una medaglia di bronzo e la restante metà vince una stretta di mano.
Se incontriamo un gruppo di sei partecipanti scelti a caso, qual è la probabilità che esso sia composto da due medaglie d'oro, due medaglie d'argento e due vincitori di strette di mano?
(A) Circa il 40% **(B)** Circa il 4% **(C)** Circa lo 0,4% **(D)** Circa lo 0,04%
(E) Circa lo 0,004%.

12. Consideriamo un qualsiasi insieme di 20 numeri interi consecutivi, tutti maggiori di 50. Quanti di essi al massimo possono essere numeri primi?
(A) 4 **(B)** 5 **(C)** 6 **(D)** 7 **(E)** 8.

Problemi a risposta numerica – 8 punti

13. Sia $p(x) = x^{20} + a_{19}x^{19} + a_{18}x^{18} + \ldots + a_1 x + a_0$ un polinomio, con gli a_i interi. Sappiamo che, per tutti gli interi k compresi tra 1 e 20, $p(k) = 2k$. Quali sono le ultime 3 cifre di $p(21)$?

14. Se a è un intero positivo minore di 100, per quanti valori di a il sistema $\begin{cases} x^2 = y + a \\ y^2 = x + a \end{cases}$ ha soluzioni intere?

15. Lorenza si trova su una pista avente la forma di un poligono regolare con 2007 lati, i cui vertici sono numerati da 1 a 2007 in senso antiorario. Lorenza, partendo dal vertice 6, salta ogni volta 4 vertici e cade sul quinto più avanti (ad esempio, dal 20 salta al 25), ma salta indietro di 2 vertici quando cade su un vertice identificato da una potenza di 2 (ad esempio, dopo un eventuale salto dal 27 al 32, deve saltare indietro al 30). Dopo quanti salti Lorenza avrà oltrepassato per la prima volta il vertice 1?

16. Una pulce si muove saltando avanti e indietro lungo una retta. La tana della pulce è un punto della retta. Le regole di salto sono le seguenti:

- se la pulce si trova ad una distanza minore o uguale a un metro dalla tana, dopo il salto successivo si troverà ad una distanza doppia della precedente allontanandosi ancora di più dalla tana.
- se la pulce si trova ad una distanza d maggiore di un metro dalla tana, dopo il salto successivo si troverà ad una distanza $\frac{1}{d}$ dalla tana ma dalla parte opposta rispetto a quella dove si trova attualmente.

Se dopo 5 salti la pulce si trova a 80 cm dalla tana in una certa direzione, con quante sequenze distinte di salti può aver raggiunto quella posizione?

17. **ESERCIZIO DIMOSTRATIVO**

Un intero positivo si dice *triangolare* se si può scrivere nella forma $\dfrac{n(n+1)}{2}$ per qualche intero positivo n. Quante sono le coppie (a, b) di numeri triangolari tali che $b - a = 2007$? (Si ricorda che 223 è un numero primo).

SOLUZIONE

18. **ESERCIZIO DIMOSTRATIVO**

È data una circonferenza di diametro AB e centro O. Sia C un punto sulla circonferenza (diverso da A e da B), e si tracci la retta r parallela ad AC per O. Sia D l'intersezione di r con la circonferenza dalla parte opposta di C rispetto ad AB.

i) Dimostrare che DO è bisettrice di $C\widehat{D}B$.

ii) Dimostrare che il triangolo CDB è simile al triangolo AOD.

SOLUZIONE

UNIONE MATEMATICA ITALIANA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA

Progetto Olimpiadi di Matematica 2007

GARA di SECONDO LIVELLO

Norme per la correzione ad uso degli insegnanti

Come per gli scorsi anni, la prova è distinta in due parti: la prima a risposte predefinite, la seconda di tipo compilativo.

PRIMA PARTE
Per la valutazione dei primi sedici quesiti si potrà usufruire della mascherina che segue; le lettere o i numeri in ciascuna finestrella rappresentano, per ciascun quesito, le risposte esatte. Contrassegnando allora, per ogni elaborato, le risposte esatte con una sbarra e scrivendo nello spazio apposito il numero delle risposte esatte e quello delle caselle senza risposta si trova subito il punteggio globale di questa prima parte.
Si ricorda che alle risposte errate vanno attribuiti zero punti.

Risposte ai primi 16 quesiti

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
E	D	D	C	B	E	B	A	D	E	C	C	042	19	405	6

SECONDA PARTE
Contrariamente ai primi sedici quesiti, la cui valutazione è puramente meccanica, gli ultimi due problemi richiedono una correzione attenta da parte dell'insegnante di matematica. Per alleviare il carico di lavoro degli insegnanti, che già tanti compiti debbono correggere e valutare, suggeriamo di effettuare la correzione soltanto di quegli elaborati che hanno ottenuto un punteggio di almeno 30 nella prima parte. Per ottenere un minimo di omogeneità nella valutazione di questi esercizi diamo qualche indicazione sul punteggio da attribuire.

1. Ciascuno di tali esercizi sarà valutato con un numero intero da 0 a 12.
2. Si raccomanda di usare l'intero spettro dei punteggi disponibili, attribuendo zero, senza remore, alle soluzioni completamente sbagliate o non contenenti alcuna idea utile alla soluzione del problema e 12 a quelle corrette, anche se non coincidenti con quelle da noi proposte.
3. Valutare con punteggi intermedi soluzioni parziali o solo parzialmente corrette.

In particolare, nel caso dell'esercizio 17 si assegnino:

- **3 punti** a chi arriva a fattorizzare il membro di sinistra e a scrivere l'equazione (4).
- **2 punti** ulteriori a chi capisce che a questo punto la soluzione passa attraverso la scomposizione di $2 \cdot 2007$ in fattori primi.
- **1 punto** ulteriore a chi scrive esplicitamente la scomposizione di $2 \cdot 2007$ in fattori primi.
- **3 punti** ulteriori a chi determina correttamente le sei possibilità di scomposizione. A chi non giustifica per nulla il fatto che le scomposizioni che coinvolgono fattori negativi (ad esempio $u = -2 \cdot 3, v = -3 \cdot 223$) non sono accettabili, o trascura completamente di considerarle, si assegni solo **1 punto** di questi.
- **2 punti** ulteriori a chi scrive le sei soluzioni, o arriva a un modo alternativo di caratterizzarle esplicitamente (come l'equazione (5)), dimostrando che sono intere e positive.
- **1 punto** ulteriore a chi giustifica adeguatamente il fatto che queste sono tutte e sole le soluzioni accettabili.

In ogni caso, a qualunque soluzione completa si sottraggano **2 punti** se lo studente non esclude la possibilità di fattori negativi, e **2 punti** se lo studente non giustifica adeguatamente il fatto che le soluzioni da lui indicate siano tutte e sole le soluzioni accettabili.
Nota: Coerentemente con la scaletta riportata qui sopra, a chi scrive le sei soluzioni corrette ma non giustifica per nulla il procedimento risolutivo utilizzato per ricavarle vanno attribuiti **2 soli punti**.
Nel caso dell'esercizio 18 si assegnino i seguenti punteggi.

Per la prima parte:

- **2 punti** per ogni coppia di angoli citata nella soluzione ufficiale di cui si osserva la congruenza;
- **3 punti** a chi osserva che una simmetria assiale rispetto alla retta DO manda C in B, ma senza giustificarlo;
- **6 punti** in totale per una dimostrazione interamente corretta, anche diversa da quella proposta.

Per la seconda parte:

- **4 punti** a chi dimostra il fatto che entrambi i triangoli sono isosceli;
- **2 punti** per l'osservazione che $D\widehat{C}B = D\widehat{A}B$;
- **3 punti** per la dimostrazione che $A\widehat{O}D = C\widehat{D}B$;
- **6 punti** in totale per una dimostrazione interamente corretta, anche diversa da quella proposta.

1. La risposta è **(E)**. Il triangolo APQ può essere costruito in modo tale che $AQ = QP$, oppure in modo tale che $AP = QP$, oppure in modo tale che $AQ = AP$. Per ciascuna di queste 3 possibilità, ci sono due scelte per la collocazione del punto P in posizioni simmetriche rispetto alla retta per A e per B (alla quale deve necessariamente appartenere un lato). In totale avremo quindi $3 \times 2 = 6$ posizioni possibili per il punto P.

2. La risposta è **(D)**. La somma delle capienze in litri di tutti i barili è 119, numero che diviso per 3 dà resto 2. Poiché la somma dei litri di vino venduti deve essere multipla di 3, occorre togliere dalla lista delle capacità l'unico valore che diviso per 3 dà resto 2, cioè 20. Si verifica poi che i barili restanti possono effettivamente essere divisi come $15 + 18 = 33$ e $16 + 19 + 31 = 66$.

3. La risposta è **(D)**. Sia lo sviluppo in base 2 di un generico intero a

$$\ldots + 2^8 a_8 + 2^7 a_7 + 2^6 a_6 + 2^5 a_5 + 2^4 a_4 + 2^3 a_3 + 2^2 a_2 + 2^1 a_1 + a_0;$$

allora, se raggruppiamo i termini a tre a tre a partire da destra raccogliendo un'opportuna potenza di 8 otteniamo

$$\ldots + 8^2(4a_8 + 2a_7 + a_6) + 8(4a_5 + 2a_4 + a_3) + (4a_2 + 2a_1 + a_0).$$

Poiché i termini tra parentesi sono sempre compresi tra 0 e 7, quella ottenuta è l'espressione in base 8 del numero a. Osservando come vengono raccolte le cifre, è semplice concludere che, dette b_k le cifre dell'espansione in base 8 del numero, vale

$$b_k = 4a_{3k+2} + 2a_{3k+1} + a_{3k}.$$

Per il numero in esame, operativamente, basta raccogliere le cifre a gruppi di tre a partire dall'ultima a destra, e leggere (in base 2) il settimo gruppo di cifre a partire da sinistra (si noti che il primo gruppo è composto dalla sola cifra 1):

$$1 \mid 110 \mid 000 \mid 100 \mid 111 \mid 010 \mid 101 \mid 110 \mid 100 \mid 001.$$

La settima cifra così è $101_2 = 5$.

4. La risposta è **(C)**. Sia n il numero degli esami superati dallo studente con la media di 23. Siano poi S la somma dei voti riportati dallo studente prima dell'ultimo esame e x il voto riportato nell'ultimo esame. Abbiamo:

$$\begin{cases} S = 23n \\ S + x = 22.25(n + 1) \end{cases}$$

Sottraendo la prima equazione dalla seconda si ottiene $x = 22.25 - 0.75n$, ossia $4x = 89 - 3n$. Ne segue che $89 - 3n$ è divisibile per 4. Poichè x è un numero intero maggiore o uguale a 18 e $n > 0$, si ha anche $72 \leq 89 - 3n < 89$, da cui $n = 3$ e $x = 20$.

5. La risposta è **(B)**. Dette x_0, x_1 e $-x_1$ le radici del polinomio, deve aversi, per ogni x, che $(x - x_0)(x - x_1)(x + x_1) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Svolgendo i prodotti e uguagliando i coefficienti dei termini dello stesso grado (principio di identità dei polinomi), si ha $-x_0 = a$, $-x_1^2 = b$, $x_1^2 x_0 = c$, da cui $ab = c$.

6. La risposta è **(E)**. La somma di tutti i numeri positivi dispari minori di 100 è 2500. Quindi in ogni sottoinsieme X di $\{1, \ldots, 100\}$ la somma dei cui elementi faccia 3000 il contributo dei numeri pari di X alla somma deve essere uguale ad almeno 500. Cinque numeri pari non sono sufficienti (al massimo uno di essi può essere uguale a 100), mentre sei lo sono (basta prendere i sei numeri pari più grandi). D'altra parte, è facile costruire un insieme X con le proprietà cercate e con esattamente 6 numeri pari: basta prendere, per esempio, tutti i numeri dispari con eccezione dei 6 numeri 1, 3, 5, 7, 9, 45 e tutti i numeri pari 90, 92, 94, 96, 98, 100.

7. La risposta è **(B)**. In un girone di 4 squadre, ciascuna gioca 3 partite, per un totale di 6 incontri complessivi. Poiché la vittoria vale 3 punti, mentre il pareggio uno solo, per avere la classifica finale riportata nel testo è necessario che l'Austria abbia vinto 2 partite e pareggiata una; il Brasile abbia

vinto una partita e pareggiate due, il Camerun abbia vinto, pareggiato e perso una volta.
Il Camerun ha segnato una sola rete quindi la sua unica vittoria è stata con punteggio di 1-0 e necessariamente contro la Danimarca che ha perso tutti gli incontri. Il Camerun ha subito una sola rete: avendo perso una partita, ha perso per 0-1. Il pareggio di conseguenza è stato con punteggio di 0-0.
Il Brasile non ha subito sconfitte quindi ha vinto con la Danimarca e pareggiato con Austria e Camerun. D'altra parte l'Austria ha pareggiato una sola volta (col Brasile). Quindi **Austria-Camerun** è finita **1-0**. Il Brasile ha segnato una sola rete, necessariamente nella partita vinta contro la Danimarca. Di conseguenza **Austria-Brasile** è finita **0-0**.
Sappiamo che l'Austria ha segnato tre reti e ne ha subite una. Per differenza il punteggio di **Austria-Danimarca** è **2-1**.
Si osservi che è possibile stabilire il punteggio finale di ciascuna delle sei partite del girone:

Austria-Brasile	0-0	Austria-Camerun	1-0	Austria-Danimarca	2-1
Brasile-Camerun	0-0	Brasile-Danimarca	1-0	Camerun-Danimarca	1-0

8. La risposta è **(A)**. Sia O il centro del cerchio di cartone, O' il punto in cui Priscilla punta il compasso, A e B le intersezioni dell'arco di circonferenza disegnato da Priscilla con il bordo del cerchio. Allora $AO'B$ è un triangolo rettangolo isoscele (lo possiamo giustificare notando che i triangoli $OO'A$ e $OO'B$, poiché hanno i lati lunghi r, r e $\sqrt{2}r$, sono entrambi rettangoli isosceli). Sia $A_{AO'B}$ l'area del settore circolare $AO'B$, A_C quella del cerchio di cartone e A_T quella del triangolo $AO'B$. Allora l'area della falce di luna è pari a $A_C - A_{AO'B} - \frac{1}{2}A_C + A_T$, quindi a $\pi r^2 - \frac{1}{4}\pi(\sqrt{2}r)^2 - \frac{1}{2}\pi r^2 + \frac{1}{2}(\sqrt{2}r)^2$, cioè esattamente r^2.

9. La risposta è **(D)**. Il punto di partenza è la definizione di probabilità come
$$\frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}}. \tag{1}$$
Ignoriamo le carte di Alberto; la situazione si semplifica: ora sappiamo che ci sono 30 carte, di cui 10 di picche, e vogliamo determinare la probabilità che tra le 10 di Barbara non ce ne sia alcuna di picche. Supponiamo che le mani dei tre giocatori non siano insiemi di dieci carte ma insiemi *ordinati* di 10 carte: questo non fa cambiare le probabilità perché equivale a moltiplicare per $10!\,10!\,10!$ (i possibili riordinamenti delle tre mani) sia il numero di casi favorevoli che quello di casi possibili. Ora, i casi possibili sono evidentemente $30!$ (scegliamo una per volta una carta per occupare uno dei 30 "posti" distinti disponibili...). I casi favorevoli si possono contare in questo modo: prima scegliamo una per una le carte di Barbara, sapendo che vanno scelte tra le 20 non di picche, e possiamo farlo in $20 \cdot 19 \cdots 11 = \frac{20!}{10!}$ modi diversi; poi scegliamo la disposizione delle rimanenti 20 carte, senza più vincoli, in uno dei $20!$ modi possibili. Le due scelte sono chiaramente indipendenti; quindi i casi favorevoli sono $\frac{20!\,20!}{10!}$. La probabilità, calcolata in base alla (1), è quindi $\frac{20!\,20!}{10!\,30!}$.

10. La risposta è **(E)**. Detto a il lato del triangolo equilatero, si hanno le relazioni $3a = 2(b+h)$, $\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}bh$, da cui $\begin{cases} b+h = \frac{3a}{2} \\ bh = \frac{a^2}{4} \end{cases}$. L'equazione risolvente del sistema simmetrico nelle incognite b e h è $t^2 - \frac{3a}{2}t + \frac{a^2}{4}$, dove t è una qualunque delle incognite. Si ha quindi $4t^2 - 6at + a^2 = 0$, da cui $t = \frac{3 \pm \sqrt{9-4}}{4}a$, da cui $\frac{b}{h} = \frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}$. Razionalizzando, si ottiene $\frac{b}{h} = \frac{7+3\sqrt{5}}{2}$.

11. La risposta è **(C)**. Contiamo innanzitutto il numero di modi in cui si possono suddividere 6 studenti in modo che due di essi abbiano vinto la medaglia d'oro, due la medaglia d'argento e due non abbiano vinto alcuna medaglia. I due che hanno vinto la medaglia d'oro possono essere scelti in $\binom{6}{2} = 15$ modi; scelti questi, i due che hanno vinto la medaglia d'argento possono essere scelti in

$\binom{4}{2} = 6$ modi; scelti questi ultimi, i due che non hanno vinto alcuna medaglia risultano determinati. Pertanto il numero di modi in cui si possono suddividere gli studenti è $15 \times 6 = 90$.
Per simmetria, possiamo contare solo la probabilità che i primi due studenti abbiano vinto la medaglia d'oro, i secondi due quella d'argento e gli ultimi due nessuna medaglia. La probabilità che il primo studente abbia vinto la medaglia d'oro è $\frac{1}{12}$; dato che il numero totale degli studenti è per ipotesi elevato, la probabilità che il secondo studente abbia vinto la medaglia d'oro è $\approx \frac{1}{12}$ (in realtà, sapendo che il primo studente ha vinto la medaglia d'oro, la probabilità risulta leggermente inferiore, e precisamente, se N è il numero complessivo degli studenti, risulta uguale a $(\frac{1}{12}N-1)/N$). Analogamente, possiamo approssimare le probabilità del terzo e del quarto studente di aver vinto la medaglia d'argento con $\frac{1}{6}$ e quella del quinto e del sesto di non aver vinto alcuna medaglia con $\frac{1}{2}$. La probabilità cercata è quindi approssimativamente uguale a

$$90 \cdot \left(\frac{1}{12} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{1152} \approx 0.4\%.$$

12. La risposta è **(C)**. Possiamo innanzitutto escludere dai possibili numeri primi tutti i numeri pari, e quindi considerare solo insiemi di 10 numeri dispari consecutivi maggiori di 50. Tra essi, almeno tre sono multipli di 3 ed esattamente due sono multipli di 5. I due numeri multipli di 5 differiscono di 10, quindi al massimo uno di essi è multiplo anche di 3. Ne segue che ci sono almeno $3+2-1=4$ numeri dispari che sono multipli o di 3 o di 5, e quindi non sono primi. Il totale dei numeri primi possibili è quindi minore o uguale a 6.
Il numero cercato è però esattamente uguale a 6, come dimostra l'esempio dei 6 numeri primi 97,101,103,107,109,113 compresi nell'intervallo $\{96, \ldots, 115\}$.

13. La risposta è 042. Sia $q(x) = p(x) - 2x$. Poiché $p(k) = 2k$ per $k = 1, \ldots, 20$, allora anche $q(k) = 0$ per $k = 1, \ldots, 20$. In base al teorema di Ruffini, questo equivale a dire che il polinomio $q(x)$ è divisibile per $x-1, x-2, \ldots, x-20$. Ma allora è divisibile anche per il loro prodotto, e quindi vale

$$q(x) = (x-1)(x-2)\cdots(x-20)r(x) \tag{2}$$

per un qualche polinomio $r(x)$. Se $r(x)$ avesse grado 1 o superiore, $q(x)$ e quindi anche $p(x) = q(x) + 2x$ verrebbero ad avere grado superiore a 20, che è in contrasto con l'ipotesi. Allora $r(x)$ è costante, diciamo $r(x) = \alpha$. Svolgendo il prodotto nell'equazione (2) allora otteniamo che il termine di grado massimo (cioè 20) di $q(x)$, e quindi di $p(x)$, ha coefficiente α; quindi dev'essere $r(x) = \alpha = 1$. Abbiamo dunque dimostrato che

$$q(x) = (x-1)(x-2)\cdots(x-20).$$

Da quest'uguaglianza segue che

$$p(x) = (x-1)(x-2)\cdots(x-20) + 2x$$

e quindi, valutando il polinomio in $x = 21$, otteniamo

$$p(21) = 20 \cdot 19 \cdots 1 + 2 \cdot 21 = 20! + 42.$$

Il termine 20! è multiplo di 1000 (si può verificare facilmente che contiene abbastanza fattori 2 e 5); più precisamnente, 20! termina esattamente con 4 zeri (ci sono solo 4 fattori uguali a 5). Quindi le ultime tre cifre di $p(21)$ sono 042.

14. La risposta è 19. Sottraendo membro a membro le due equazioni si ha $x^2 - y^2 = y - x$, ovvero $(x-y)(x+y+1) = 0$.
Supponiamo che ad annullarsi sia il primo fattore, cioè che $y = x$: sostituendo, x deve soddisfare l'equazione $x^2 - x - a = 0$. Quindi a deve essere tale che

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4a}}{2} \quad \text{sia intero.}$$

questo accade se e solo se a è tale che $1 + 4a$ sia il quadrato di un numero dispari. In altre parole, a deve essere tale che esista un $n \in \mathbb{N}$ tale che $1 + 4a = (2n + 1)^2$, ovvero tale che $a = n(n + 1)$. Poiché $0 < a < 100$, i valori accettabili di n sono quelli da 1 a 9 inclusi.
Supponiamo ora che ad annullarsi sia il secondo fattore. Procedendo in modo analogo al caso precedente, $y = -x - 1$; sostituendo, x deve soddisfare l'equazione $x^2 + x + (1 - a) = 0$. a deve essere tale che

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4(a - 1)}}{2} \quad \text{sia intero.}$$

Ancora una volta $1+4(a-1)$ deve essere il quadrato di un intero dispari, cioè $1+4(a-1) = (2n+1)^2$, ovvero $a = n(n+1)+1$. I valori accettabili di n sono quelli da 0 a 9 inclusi e forniscono tutti valori di a distinti da quelli del caso precedente.
Riassumendo si hanno 9 valori di a dal primo caso e 10 dal secondo per un totale di 19 valori interi di a per cui il sistema ha soluzioni intere.

15. La risposta è 405. Lorenza parte dal vertice 6; già dopo 2 salti arriva sul vertice $16 = 2^4$, perciò torna al 14. Lorenza a questo punto salterà alternativamente su un vertice dispari (che non può essere potenza di 2) e su uno pari; in particolare tra un vertice pari e il successivo impiegherà due salti, corrispondenti ad un incremento di 10. Quindi la prossima potenza di 2 deve terminare con la cifra 4 come il 14; sarà dunque il 64 e Lorenza impiegherà 10 salti per raggiungerla. Partendo ora dal 62, la più piccola potenza di due maggiore di 62 e con ultima cifra il 2 è il 512, e per raggiungerla Lorenza dovrà compiere $\dfrac{512 - 62}{5} = 90$ salti. Dal 510, Lorenza non incontrerà più ostacoli. Infatti, nessuna potenza di 2 maggiore termina con lo 0 (come il 510); Lorenza impiegherà allora 300 salti per arrivare al vertice 2010, cioè il 3, e quindi per superare per la prima volta il vertice 1. Quindi in totale Lorenza avrà saltato $2 + 10 + 90 + 300 = 402$ volte in avanti e 3 volte all'indietro, per un totale di 405 salti.

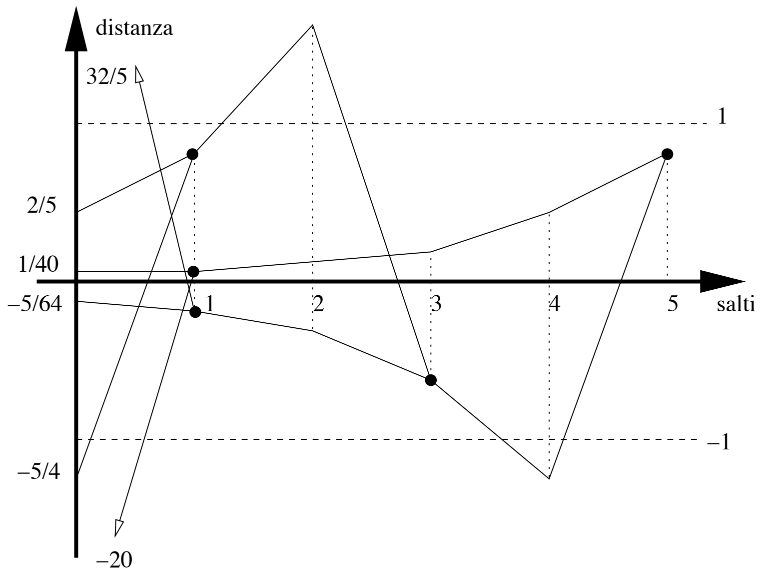
16. La risposta è 6. Osserviamo innanzitutto che, indipendentemente dalla posizione iniziale, dopo il primo salto la pulce si troverà ad una distanza minore o uguale a 2 metri dalla tana e con i salti successivi non potrà raggiungere posizioni a più di due metri dalla tana.
Si osservi poi che in base alle regole di salto, un punto a distanza x minore di $1/2$ metro o maggiore o uguale a un metro dalla tana può essere raggiunto con un salto solo a partire dal punto a distanza $x/2$ dalla tana.
Le posizioni che distano $1/2 \leq |x| < 1$ dalla tana possono essere invece raggiunte sia a partire da $x/2$ che a partire da $-1/x$. Ripercorrendo a ritroso l'itinerario percorso dalla pulce queste saranno posizioni da cui partono 2 possibili traiettorie a ritroso.
Cerchiamo di stabilire in quali posizioni si poteva trovare la pulce dopo il primo salto: la posizione finale della pulce è a $4/5$ metri dalla tana. Questo è un punto di diramazione: la posizione finale è raggiungibile a partire sia da $2/5$ m che a partire da $-5/4$ m.
Nel primo caso, $2/5 < 1/2$ e quindi può essere raggiunto solo con la sequenza $1/20, 1/10, 1/5, 2/5$.
In $-5/4$ si giunge solo a partire da $-5/8$ che però è un punto di diramazione: può essere raggiunto provenendo da $-5/32, -5/16$ oppure provenendo da $4/5, 8/5$.
Riassumendo, ci sono tre possibili posizioni dopo il primo salto (e quindi 3 possibili sequenza di salti) che permettono di raggiungere $4/5$:

$$\frac{4}{5}, \frac{8}{5}, -\frac{5}{8}, -\frac{5}{4}, \frac{4}{5}; \qquad \frac{1}{20}, \frac{1}{10}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}; \qquad -\frac{5}{32}, -\frac{5}{16}, -\frac{5}{8}, -\frac{5}{4}, \frac{4}{5}.$$

La posizione iniziale della pulce non è soggetta ad alcun vincolo, in particolare non è detto che sia una posizione raggiungibile con un salto. Questo significa che ciascuna delle tre posizioni dopo un salto è raggiungibile a partire da situazioni iniziali, cioè, rispettivamente, provenendo da

$$\frac{2}{5} \text{ e } -\frac{5}{4}; \quad \frac{1}{40} \text{ e } -20; \quad -\frac{5}{64} \text{ e } \frac{32}{5}.$$

Le sequenze possibili sono dunque 6. Quanto descritto è riassunto nella figura alla pagina seguente.



17. Ci sono 6 coppie di numeri triangolari che soddisfano la condizione richiesta.
Il problema è equivalente a trovare le coppie di interi positivi (n, m) tali che

$$\frac{n(n+1)}{2} - \frac{m(m+1)}{2} = 2007. \tag{3}$$

Difatti, poiché valori diversi di n determinano valori diversi di $\frac{n(n+1)}{2}$, determinare i numeri triangolari a e b equivale a determinare i valori di n e m che li generano.
Togliendo i denominatori e fattorizzando, l'equazione diventa

$$(n-m)(n+m+1) = 2 \cdot 2007 = 2 \cdot 3^2 \cdot 223. \tag{4}$$

Poiché $n > 0$, $m > 0$ e quindi $n+m+1 > 0$, anche $n-m$ deve essere positivo. L'equazione (4) allora rappresenta un modo di scrivere $2 \cdot 2007$ come prodotto di due interi positivi. Ma gli unici modi di spezzare $2 \cdot 3^2 \cdot 223$ come prodotto di due interi positivi si ottengono "distribuendo" in tutti i modi possibili i suoi fattori primi tra i due interi, cioè esplicitamente

- 1 e $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 223$;
- 2 e $3 \cdot 3 \cdot 223$;
- 3 e $2 \cdot 3 \cdot 223$;
- $2 \cdot 3$ e $3 \cdot 223$;
- $3 \cdot 3$ e $2 \cdot 223$;
- $2 \cdot 3 \cdot 3$ e 223.

Poiché $(n+m+1) - (n-m) = 2m+1 > 0$, $n-m$ è sempre il più piccolo tra i due fattori della coppia[1]. Detti $u = n+m+1$ e $v = n-m$, dobbiamo allora essere in uno dei seguenti casi:

- $v = 1$, $u = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 223$;
- $v = 2$, $u = 3 \cdot 3 \cdot 223$;
- $v = 3$, $u = 2 \cdot 3 \cdot 223$;
- $v = 2 \cdot 3$, $u = 3 \cdot 223$;
- $v = 3 \cdot 3$, $u = 2 \cdot 223$;
- $v = 2 \cdot 3 \cdot 3$, $u = 223$.

[1] Si osservi anche che, poiché il più grande dei due fattori è sempre quello che contiene 223, ciò equivale a dire che $n-m$ può essere un qualunque divisore positivo di $2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$

Ora risolvendo il sistema
$$\begin{cases} n+m+1=u, \\ n-m=v, \end{cases}$$
nelle incognite n e m otteniamo
$$\begin{cases} n=\dfrac{u+v-1}{2} \\ m=\dfrac{u-v-1}{2}. \end{cases} \tag{5}$$
Si noti che sostituendo nelle equazioni (5) i sei valori di (u,v) corrispondenti ai sei casi possibili, si trova ogni volta una coppia di valori (n,m) accettabili (cioè interi e positivi: infatti è sempre $u-v>1$, e, poiché $2\cdot 2007$ ha un solo fattore 2, in tutti i casi esattamente uno tra u e v è pari, e quindi $u+v-1$ e $u-v-1$ sono sempre pari). Per tutte e sei queste coppie, per come sono state ottenute, vale $(n+m+1)(n-m)=2\cdot 2007$, e quindi tutte sono soluzioni dell'equazione originaria. Inoltre i sei casi presentati esauriscono tutte le possibilità, quindi non vi sono altre soluzioni. Esplicitamente le soluzioni sono:

- $n=2007$, $m=2006$;
- $n=1004$, $m=1002$;
- $n=670$, $m=667$;
- $n=337$, $m=331$;
- $n=227$, $m=218$;
- $n=120$, $m=102$

(si noti tuttavia che l'esercizio non richiede di determinare esplicitamente le soluzioni, ma solo di dire quante sono).

18. Abbiamo $A\widehat{C}D = C\widehat{D}O$, perché alterni interni rispetto alle parallele AC e DO; inoltre $A\widehat{C}D = A\widehat{B}D$, dato che insistono sullo stesso arco di circonferenza. Il triangolo DOB è formato da due raggi, e quindi isoscele; da ciò si ricava la congruenza dei suoi angoli alla base $O\widehat{D}B$ e $O\widehat{B}D$. Perciò, riassumendo, $C\widehat{D}O = A\widehat{C}D = A\widehat{B}D = O\widehat{D}B$: DO è la bisettrice di $C\widehat{D}B$.
$D\widehat{C}B = D\widehat{A}B$, poiché insistono sullo stesso arco. Inoltre $A\widehat{O}D = 2A\widehat{B}D$ (angolo al centro e angolo alla circonferenza che insistono sullo stesso arco), e quindi $A\widehat{O}D = C\widehat{D}B$. Ma allora i triangoli AOD e CDB sono simili per il primo criterio di similitudine (tre angoli congruenti).

Alternativamente, una volta mostrata la congruenza di uno dei due angoli suddetti, si può procedere come segue. DO è sia bisettrice che altezza del triangolo CDB (DO è parallela ad AC e AC è perpendicolare a CB, poiché $A\widehat{C}B$ insiste su un diametro). Perciò il triangolo CDB è isoscele su base BC; ma anche il triangolo ADO è isoscele, avendo per lati due raggi. Da qui segue che i due triangoli sono simili per il secondo criterio di similitudine.