Allenamenti EGMO 2016

9 aprile 2016

Sommario

Raccoglieremo qui i testi, gli hints e le soluzioni dei problemi proposti come Allenamenti EGMO 2016, di cui trovate tutte le informazioni alla pagina `http://www.oliforum.it/viewtopic.php?f=21&t=19783`. Questo file sarà via via aggiornato nel corso delle sessioni. Se avete qualsiasi correzione o commento, potete contattarci all'indirizzo email `allenamenti.egmo@gmail.com`.

Ringraziamo inoltre Alberto Alfarano, Alessandro Pigati e Federico Glaudo, che ci hanno aiutato nella redazione delle soluzioni.

Alessandra Caraceni
Camilla Casamento Tumeo
Federica Cecchetto
Giulia Cornali
Giada Franz
Morena Porzio
Vittoria Ricciuti
Giulia Trevisan
Angela Veronese

Indice

1 Sessione: 9 gennaio - 22 gennaio

A1

Determinare tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che $f(f(x-y)) = f(x)f(y) - f(x) + f(y) - xy$ per ogni x e y reali.

[Hint] [Soluzione]

C1

Dato un modo di numerare le caselle di una scacchiera $n \times n$ con i numeri da 1 a n^2, si consideri la massima differenza presente fra i numeri di due caselle "vicine" (dove per vicine s'intende che hanno un lato o un vertice in comune).

Qual è il minimo di tale differenza al variare della numerazione fra le $(n^2)!$ possibili?

[Hint] [Soluzione]

G1

Sia ABC un triangolo con incentro I. La sua circonferenza inscritta tange i lati AC e AB rispettivamente in P e Q. Le rette BI e CI intersecano la retta PQ rispettivamente in X e Y.

Dimostrare che i punti X, Y, B, C sono conciclici e identificare il centro della loro circonferenza circoscritta.

[Hint] [Soluzione]

N1

Trovare le soluzioni intere dell'equazione $n^5 + n^4 + n^3 + n^2 + n + 1 = k^2$.

[Hint] [Soluzione]

2 Sessione: 1 febbraio - 14 febbraio

A2

Diciamo che una successione a_n, con $n \geq 0$ intero, è polinomiale se esiste un polinomio $p(x)$ tale che $a_n = p(n)$ per ogni $n \geq 0$ intero. Dire (dimostrando le affermazioni) se le seguenti successioni sono polinomiali:

1. $a_n = 2^n$;
2. $a_n = \left\lfloor \frac{n^3+n+1}{3} \right\rfloor$.

[Hint] [Soluzione]

C2

Giada e Federico giocano ad un gioco. Iniziano con n palline e ad ogni mossa possono togliere o 3 o 4 palline. Perde chi non può più muovere (cioè al suo turno non sono rimaste abbastanza palline da togliere) e inizia Giada. Chi vince?

[Hint] [Soluzione]

G2

Sia ABC un triangolo con $AB > AC$. Chiamiamo D il piede dell'altezza da A a BC, E ed F i punti medi dei lati AD e BC rispettivamente e G il piede della perpendicolare da B ad AF. Dimostrare che EF tange in F la circonferenza passante per G, F, C.

[Hint] [Soluzione]

N2

Sia n un intero positivo e siano $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_k = n$ i suoi divisori, elencati in ordine crescente. Determinare tutti gli n tali che $k > 3$ e $n = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2$.

[Hint] [Soluzione]

3 Sessione: 15 febbraio - 28 febbraio

A3

Siano a, b, c le radici del polinomio $x^3 - 17x - 19$. Quanto vale $a^3 + b^3 + c^3$?
[Hint] [Soluzione]

C3

Consideriamo $X = \{1, 2, 3, \ldots, 2n-2, 2n-1, 2n\}$. Sia A un sottoinsieme di X con $n+1$ elementi.

1. Dimostrare che in A vi sono almeno due numeri coprimi.

2. Dimostrare che in A vi sono almeno due numeri tali che uno divide l'altro.

[Hint] [Soluzione]

G3

Sia ABC un triangolo. Sia Γ_A il luogo dei punti X tali che $BX/CX = BA/CA$.

- Mostrare che Γ_A è una circonferenza, che chiamiamo *circonferenza di Apollonio* relativa ad A.

Siano ora D e D' rispettivamente i piedi delle bisettrici interna ed esterna relative ad A.

- Mostrare che A, D, D' appartengono a Γ_A.

- Mostrare inoltre che Γ_A è la circonferenza di diametro DD'.

Definiamo ora analogamente Γ_B e Γ_C, le circonferenze di Apollonio relative a B e C.

- Mostrare che Γ_A, Γ_B e Γ_C passano tutte per due punti J e J', che quindi ne determinano l'asse radicale comune.

[Hint] [Soluzione]

N3

Definiamo la successione dei Fibonacci come $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ e $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ per ogni $n \geq 0$. Dimostrare che ogni intero positivo è rappresentabile in un unico modo come somma finita di numeri di Fibonacci distinti e diversi da F_0 e F_1, in modo che tale somma non contenga mai due numeri di Fibonacci consecutivi (cioè la somma non può contenere due Fibonacci F_n e F_m tali che $|m-n| \leq 1$).

Più precisamente questo vuol dire che per ogni N intero positivo esistono unici $n_1, \ldots, n_k$ interi positivi tali che:

1. $n_i \geq 2$ per ogni $i = 1, \ldots, k$;

2. $n_{i+1} \geq n_i + 2$ per ogni $i = 1, \ldots, k-1$;

3. $N = \sum_{i=1}^{k} F_{n_i}$.

[Hint] [Soluzione]

4 Sessione: 29 febbraio - 13 marzo

A4

Sia n intero, con $n > 3$ e siano $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ reali positvi.

1. Dimostrare che
$$1 < \sum_{cyc} \frac{a_1}{a_1 + a_2 + a_3} < n - 2\,,$$
dove la somma ciclica è definita come
$$\sum_{cyc} \frac{a_1}{a_1 + a_2 + a_3} := \frac{a_1}{a_1 + a_2 + a_3} + \frac{a_2}{a_2 + a_3 + a_4} + \dots + \frac{a_n}{a_n + a_1 + a_2}\,.$$

2. Si mostri che la disuguaglianza è la migliore possibile, cioè che $(1, n-2)$ è il più piccolo intervallo che contiene tutti i valori della somma precedente al variare di $a_1, a_2, \dots, a_n$.

[Hint] [Soluzione]

C4

Sia S un insieme di punti nel piano. Tracciando il maggior numero di segmenti tra due punti, senza però che questi si intersichino tra di loro, si ottengono N triangoli. Dimostrare che N non dipende dalle mosse fatte.
[Hint] [Soluzione]

G4

Sia ABC un triangolo acutangolo. Gli assi dei lati AB e AC intersecano la mediana da A in W e V rispettivamente. Chiamiamo T l'intersezione fra le rette CV e BW e U l'intersezione fra la retta AVW e la circonferenza circoscritta ad ABC.

(a) Dimostrare che $AT^2 = BT \cdot CT$.

(b) Dimostrare che $AU = BT + CT$.

[Hint] [Soluzione]

N4

Trovare tutti gli x, y, z, w interi non negativi tali che $x^2 + y^2 = 3(z^2 + w^2)$.
[Hint] [Soluzione]

5 Sessione: 14 marzo - 27 marzo

A5

Consideriamo la successione definita da $x_1 = 2$ e $x_{n+1} = 1 + \prod_{k=1}^{n} x_k$. Dimostrare che

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} < 1\,.$$

[Hint] [Soluzione]

C5

Un insieme non vuoto A si dice n-buono se $A \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ e $|A| \leq \min A$. Sia a_n il numero di insiemi n-buoni. Dimostrare che per ogni $n \geq 1$ vale la formula $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n + 1$.

[Hint] [Soluzione]

G5

Sia ABC un triangolo e sia D un punto interno ad esso. Dimostrare che esiste un altro punto E interno al triangolo ABC tale che $\angle EAB = \angle DAC$, $\angle EBC = \angle DBA$, $\angle ECA = \angle DCB$, che viene detto *coniugato isogonale* di D in ABC.

Sia infine Q il punto medio del segmento DE. Dimostrare che le proiezioni di D ed E sui lati di ABC appartengono ad una circonferenza centrata in Q.

[Hint] [Soluzione]

N5

Trovare tutti gli n tali che esiste una permutazione σ di $\{1, \ldots, n\}$ tale che

$$\sqrt{\sigma(1) + \sqrt{\sigma(2) + \sqrt{\ldots + \sqrt{\sigma(n-1) + \sqrt{\sigma(n)}}}}}$$

è razionale.

[Hint] [Soluzione]

6 Sessione: 28 marzo - 8 aprile

A6

Dimostrare che per ogni $x, y, z \geq 0$ vale $x^3y + y^3z + z^3x \geq x^2yz + y^2zx + z^2xy$.
[Hint] [Soluzione]

C6

Su una lavagna sono scritti n numeri, tutti uguali a 1. Una mossa consiste nello scegliere due dei numeri scritti sulla lavagna, e sostituirli con la loro somma divisa per 4 (cioè sostituisco a e b con $(a+b)/4$). Alla fine rimane un solo numero sulla lavagna. Dimostrare che tale numero è maggiore o uguale a $1/n$.
[Hint] [Soluzione]

G6

Sia Γ una circonferenza e sia ω una circonferenza tangente internamente a Γ in A. Una tangente a ω da un punto P su Γ tange ω in B. Dimostrare che il rapporto PA/PB è costante al variare di P su Γ.
[Hint] [Soluzione]

N6

Sia f una funzione dagli interi positivi in se stessi tale che:

- $f(n) \leq f(n+1)$ per ogni n intero positivo;
- $\mathrm{MCD}(f(n), f(m)) = 1$ per ogni coppia di interi n, m positivi distinti;
- f non è mai uguale a 1.

Mostrare che per n sufficientemente grande:

a) $f(n) \geq n$;

b) $f(n) \geq 2n$;

c) $f(n) \geq 4n$.

[Hint] [Soluzione]

7 Hints

Hint per A1: Provare ad applicare delle semplici sostituzioni. L'unica soluzione è $f(x) = -x$. (Testo)

Hint per C1: Il minimo richiesto è $n + 1$. Considerare il "percorso" dalla casella con il numero 1 alla casella con il numero n^2. (Testo)

Hint per G1: Dimostrare che $\angle XYC = \frac{\beta}{2}$, considerando il triangolo $\triangle PYC$. (Testo)

Hint per N1: Vale l'identità $n^5 + n^4 + n^3 + n^2 + n + 1 = (n^2 + n + 1)(n^3 + 1)$. (Testo)

Hint per A2: Entrambe le successioni non sono polinomiali. Per la prima successione dimostrare che 2^n "cresce troppo" per essere un polinomio. Per la seconda supporre che la successione sia un polinomio e considerare la differenza di tale polinomio con $\frac{n^3+n+1}{3}$. (Testo)

Hint per C2: La soluzione dipende dalla congruenza di n modulo $3 + 4 = 7$. (Testo)

Hint per G2: La tesi equivale a dimostrare che $\angle EFC = \angle FGC$. Per farlo provare a costruire il punto medio di BG. (Testo)

Hint per N2: Mostrare che d_1, d_2, d_3, d_4 devono essere della forma $1, 2, p, 2p$ con p primo. (Testo)

Hint per A3: Che relazione c'è fra i coefficienti di un polinomio e le sue radici? Alla luce di ciò, posso esprimere $a^3 + b^3 + c^3$ in funzione dei coefficienti del polinomio? (Testo)

Hint per C3: Utilizzare il principio dei cassetti nel modo opportuno. Per il primo punto, dimostrare che esistono in A due numeri consecutivi; per il secondo, costruire una partizione di X in n sottoinsiemi utilizzando i numeri dispari. (Testo)

Hint per G3: Per il primo punto, provare a scrivere il luogo dei punti in coordinate cartesiane. Gli altri punti si dimostrano facilmente in sintetica. (Testo)

Hint per N3: Procedere per induzione su N, dimostrando che un numero di Fibonacci F_n è strettamente maggiore di una qualsiasi somma di numeri di Fibonacci diversi da F_0 e F_1, non consecutivi e minori di esso. (Testo)

Hint per A4: La disuguaglianza del primo punto a sinistra si ottiene facilmente stimando i denominatori (come?). A questo punto la disuguaglianza di destra segue in modo simile. Per il secondo punto provare a mettere gli a_n (molto) crescenti o (molto) decrescenti. (Testo)

Hint per C4: Ci sono dei segmenti sempre tracciati, a prescindere dalle mosse fatte. A questo punto si cerca un invariante che ha a che fare con gli angoli. (Testo)

Hint per G4: Per il primo punto cercare di dimostrare la similitudine fra i triangoli ATB e CTA. Per il secondo costruire il punto di intersezione fra CT e la circonferenza circoscritta ad ABC. (Testo)

Hint per N4: Lavorare modulo 3 per ridursi ad un'equazione molto simile a quella iniziale e ripetere... (Testo)

Hint per A5: Cercare di stimare per induzione la sommatoria utilizzando la produttoria. (Testo)

Hint per C5: Mettere in corrispondenza gli insiemi $(n+2)$-buoni con gli $(n+1)$-buoni e gli n-buoni, distinguendo i casi in cui $n+2$ appartiene o meno all'insieme $(n+2)$-buono considerato. (Testo)

Hint per G5: Per dimostrare che E esiste utilizzare il teorema di Ceva in forma trigonometrica. Per la ciclicità utilizzare le potenze dai vertici del triangolo e mostrare che Q appartiene ad alcuni assi per mostrare che è il centro. (Testo)

Hint per N5: Innanzitutto notare che tutti i radicandi devono essere quadrati perfetti (interi) e poi stimarli dall'alto con $\lceil \sqrt{n} \rceil$. (Testo)

Hint per A6: Provare ad applicare la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz. (Testo)

Hint per C6: Considerare la somma degli inversi dei numeri scritti alla lavagna in ogni momento. Come si comporta questa quantità? E come si riscrive la tesi in termine di essa? (Testo)

Hint per G6: Studiare l'omotetia che manda ω in Γ e vedere che relazioni comporta. (Testo)

Hint per N6: Per quanti n il numero $f(n)$ può essere divisibile per 2, per 3 o per un primo generico? (Testo)

8 Soluzioni

Soluzione di A1: Mostriamo che l'unica soluzione all'equazione funzionale è $f(x) = -x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Nell'equazione data, sostituiamo $x = y = 0$: otteniamo

$$f(f(0)) = f(0)^2 \,. \tag{8.1}$$

Ponendo invece $x = y$, ricaviamo

$$f(f(0)) = f(x)^2 - x^2 \tag{8.2}$$

per ogni x reale. Ancora, sostituendo $y = 0$ troviamo l'identità

$$f(f(x)) = f(x)f(0) - f(x) + f(0) \tag{8.3}$$

valida sempre per ogni x reale.

In particolare la quantità $f(x)^2 - x^2$ è costante e uguale a $f(0)^2$. Sia $\alpha = f(0)$; allora dalla (8.1) si ottiene $f(\alpha) = \alpha^2$ e dalla (8.2), ponendo $x = \alpha$:

$$f(\alpha) = f(\alpha)^2 - \alpha^2 \,.$$

Combinando quanto ottenuto, troviamo che $\alpha^4 = 2\alpha^2$; perciò $\alpha = 0$ oppure $\alpha^2 = 2$.

Dimostriamo che necessariamente si deve avere $f(0) = 0$. Supponiamo per assurdo che valga $f(\alpha) = \alpha^2 = 2$. Da (8.2) per $x = 2$ si ottiene

$$f(2)^2 = f(\alpha^2)^2 = f(\alpha) + f(\alpha)^2 = 6 \,,$$

ma da (8.3), per $x = \alpha$ ricaviamo

$$f(2) = f(f(\alpha)) = f(\alpha)\alpha - f(\alpha) + \alpha = 3\alpha - 2 \neq \pm\sqrt{6} \,.$$

Quindi $f(0) = 0$; a questo punto la (8.2) ci dice che $f(x)^2 = x^2$ e dunque per ogni x reale avremo che $f(x) = x$ oppure $f(x) = -x$. Supponiamo per assurdo che esista $x \neq 0$ tale che $f(x) = x$; per tale x la (8.3) si riduce a

$$x = f(f(x)) = -f(x) = -x \,,$$

ed otteniamo pertanto una contraddizione. L'unica possibilità valida è quindi che sia $f(x) = -x$ per ogni x.

Infine, sostituendo nell'equazione iniziale, si verifica immediatamente che questa funzione la soddisfa ed è dunque l'unica soluzione al problema. (Testo)

Soluzione di C1: Il minimo richiesto è $n+1$.

Consideriamo prima di tutto la numerazione "ordinata" delle caselle della scacchiera, cioè quella in cui nel posto (i,j) troviamo il numero $n(i-1)+j$, per $i,j \in \{1,\dots,n\}$. In questo caso particolare la massima differenza tra i numeri che si trovano in due caselle vicine è $n+1$. La quantità cercata è pertanto minore o uguale a $n+1$.

Per dimostrare che $n+1$ è effettivamente il minimo, è necessario provare che data una qualsiasi numerazione della scacchiera, esiste sempre una coppia di caselle vicine su cui sono scritti numeri con differenza almeno pari a $n+1$.

Osserviamo che, partendo da una qualsiasi casella e muovendosi sulla scacchiera passando per caselle vicine, è possibile raggiungere ogni altra casella toccandone al più n. Supponiamo infatti di voler raggiungere la casella (i,j), con $i \leq j$, dalla casella $(1,1)$ (senza perdità di generalità possiamo porci in questo caso): sarà sufficiente muoversi di $i-1$ caselle sulla diagonale fino al posto (i,i) e poi di $j-i$ caselle verso destra. In tutto avremo toccato $i+(j-i) \leq n$ caselle.

Consideriamo quindi un tale percorso che collega la casella numerata con 1 e quella numerata con n^2. Sia $k \leq n$ il numero di caselle toccate e siano $1 = a_1, a_2, \dots, a_k = n^2$ i numeri scritti su queste caselle. Siano inoltre $d_i = |a_{i+1} - a_i|$ per $i = 1,\dots,k-1$ le differenze in valore assoluto tra due caselle consecutive del percorso. Allora

$$d_1 + \cdots + d_{k-1} \geq (a_2 - a_1) + \cdots + (a_k - a_{k-1}) = a_k - a_1 = n^2 - 1$$

e pertanto

$$\frac{d_1 + \cdots + d_{k-1}}{k-1} \geq \frac{d_1 + \cdots + d_{k-1}}{n-1} \geq \frac{n^2-1}{n-1} = n+1.$$

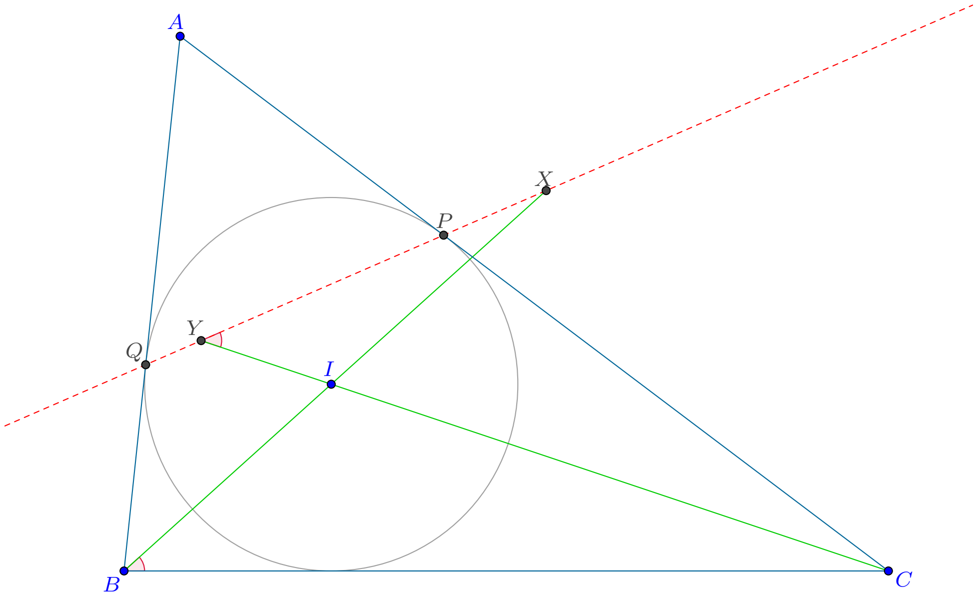
Da ciò deduciamo che almeno una delle differenze considerate è maggiore o uguale a $n+1$ e questo permette di concludere. (Testo)

Soluzione di G1: Usando la notazione standard per indicare gli angoli di un triangolo $\triangle ABC$ e considerando gli angoli del triangolo $\triangle PYC$, abbiamo che:

$$\angle XYC = 180° - \angle YPC - \angle PCY = 180° - \left(90° + \frac{\alpha}{2}\right) - \frac{\gamma}{2} = \frac{\beta}{2},$$

perciò in particolare il quadrilatero $XYBC$ è ciclico, poiché $\angle XBC = \frac{\beta}{2} = \angle XYC$.

Mostriamo ora che la circonferenza circoscritta a tale quadrilatero ha come centro il punto medio di BC. Riutilizzando l'uguaglianza ricavata sopra, abbiamo che $\angle XYC = \frac{\beta}{2} = \angle QBI$ e perciò il quadrilatero $YQBI$ è ciclico. Di conseguenza $\angle BYC = \angle IQB = 90°$, da cui si ottiene ovviamente che il punto medio di BC è centro della circonferenza interessata.



(Testo)

Soluzione di N1: Notiamo innanzitutto che possiamo supporre $k \geq 0$; se poi otterremo una soluzione (n, k) con $k \geq 0$, avremo anche la soluzione $(n, -k)$.

Consideriamo ora il caso in cui $n < 0$. Se $n < -1$, vediamo facilmente che $n^5 + n^4 + n^3 + n^2 + n + 1 < 0$; quindi dobbiamo necessariamente avere $n = -1$, da cui otteniamo la soluzione $(-1, 0)$.

Ci siamo quindi ridotti al caso in cui $n, k \geq 0$. Notiamo innanzitutto che vale la fattorizzazione $n^5 + n^4 + n^3 + n^2 + n + 1 = (n^2 + n + 1)(n^3 + 1)$. Tale identità si può facilmente ricavare notando che

$$\begin{aligned}n^5 + n^4 + n^3 + n^2 + n + 1 &= \frac{n^6 - 1}{n - 1} = \frac{(n^3 - 1)(n^3 + 1)}{n - 1} = \\ &= \frac{(n - 1)(n^2 + n + 1)(n^3 + 1)}{n - 1} = (n^2 + n + 1)(n^3 + 1)\,.\end{aligned}$$

Mostriamo ora che i due fattori $n^2 + n + 1$ e $n^3 + 1$ sono coprimi. Supponiamo per assurdo che esista un primo p che li divide entrambi, allora in particolare $p \mid n^3 + 1$ e $p \mid n^3 - 1 = (n - 1)(n^2 + n + 1)$. Di conseguenza $p \mid (n^3 + 1) - (n^3 - 1) = 2$, quindi $p = 2$; anche questo caso però è assurdo perché $n^3 + 1$ e $n^2 + n + 1$ hanno parità diversa e quindi abbiamo dimostrato la coprimalità.

Per avere $(n^2 + n + 1)(n^3 + 1) = k^2$, deve perciò valere che entrambi i fattori della parte sinistra siano quadrati (visto che sono coprimi). In particolare dobbiamo avere che $n^2 + n + 1 = a^2$, con a intero. Se $n = 0$, otteniamo la soluzione $(0, 1)$ (e quindi $(0, -1)$); altrimenti sappiamo che $n^2 < n^2 + n + 1 < (n + 1)^2$ e di conseguenza $n^2 + n + 1$ non può essere anch'esso un quadrato, poiché compreso fra due quadrati successivi.

Abbiamo perciò ottenuto che le uniche soluzione (n, k) sono $(-1, 0)$, $(0, 1)$ e $(0, -1)$. (Testo)

Soluzione di A2: Mostriamo innanzitutto alcuni lemmi che riguardano stime fra polinomi ed esponenziali, che serviranno sostanzialmente a mostrare il risultato intuitivo per cui un polinomio "cresce meno" di un esponenziale.

Lemma 8.1. *Sia $p(x)$ un polinomio a coefficienti reali e sia k il suo grado. Allora, per x positivo, definitivamente vale*

$$x^{k+1} > p(x)\,.$$

Dimostrazione. Per $x > M + 2$, con M parametro reale, vale

$$x^{k+2} > (M+2)x^{k+1} > (M+1)x^{k+1} - M\,.$$

Allora riarrangiando i termini si ottiene $x^{k+1}(x-1) > M(x^{k+1}-1)$. Dividendo per $x-1$ otteniamo quindi $x^{k+1} > M\sum_{i=0}^{k} x^i$.

Per l'arbitrarietà di M, scegliamo $M = |\max a_i|$, e si ha che

$$M\sum_{i=0}^{k} x^i \geq \sum_{i=0}^{k}|a_i|x^i \geq \left|\sum_{i=0}^{k} a_i x^i\right| \geq p(x)\,,$$

dove la seconda disuguaglianza è la disuguaglianza triangolare. Unendo le due disuguaglianze trovate abbiamo quindi la tesi. □

Lemma 8.2. *Dato a intero, si ha $n \cdot a < 2^n$ per infiniti valori di n.*

Dimostrazione. Sia $b_k = a \cdot k - 2^k$. Intanto proviamo che $b_{k+1} < b_k$ definitivamente. Questo segue dalla definizione di b_k, perché $b_{k+1} = a \cdot k + a - 2 \cdot 2^k < a \cdot k - 2^k = b_k$, per $2^k > a$. Di conseguenza b_k è una sequenza di numeri interi strettamente decrescente, dunque $b_k < 0$ definitivamente, che conclude il lemma. □

Lemma 8.3. *Dato a intero, vale $m^a < 2^m$ per infiniti valori di m.*

Dimostrazione. Basta scegliere $m = 2^n$ per i n che rendono vero il Lemma 8.2. Dunque il lemma è vero per infiniti valori di n. □

Giungiamo dunque al vero e proprio problema e mostriamo che entrambe le successioni non sono polinomiali.

1. Supponiamo per assurdo che esista un polinomio $q(n)$ di grado t tale che $q(n) = 2^n$. Per i Lemmi 8.1 e 8.3 sappiamo però che $q(n) < n^{t+1}$ definitivamente e che $n^{t+1} < 2^n$ definitivamente. Dunque esiste sicuramente un M tale che $q(M) < 2^M$, perciò un polinomio del genere non esiste.

2. Supponiamo per assurdo che esista un polinomio $r(n)$ tale che $r(n) = \left\lfloor \frac{n^3+n+1}{3} \right\rfloor$ e definiamo $h(n) = \frac{n^3+n+1}{3}$.

   Allora, per verifica diretta, $r(n) - h(n) = 0$ per ogni $n = 3k+1$. Dunque $r(n) - h(n)$ è un polinomio che si annulla infinite volte, cioè $r(n) = h(n)$. Però $r(0) = 0 \neq \frac{1}{3} = h(0)$, dunque un polinomio del genere non esiste.

(Testo)

Soluzione di C2: Se n è della forma $7k$, $7k+1$ o $7k+2$ Giada perde, altrimenti Giada vince. Dimostriamo il risultato per induzione su k.

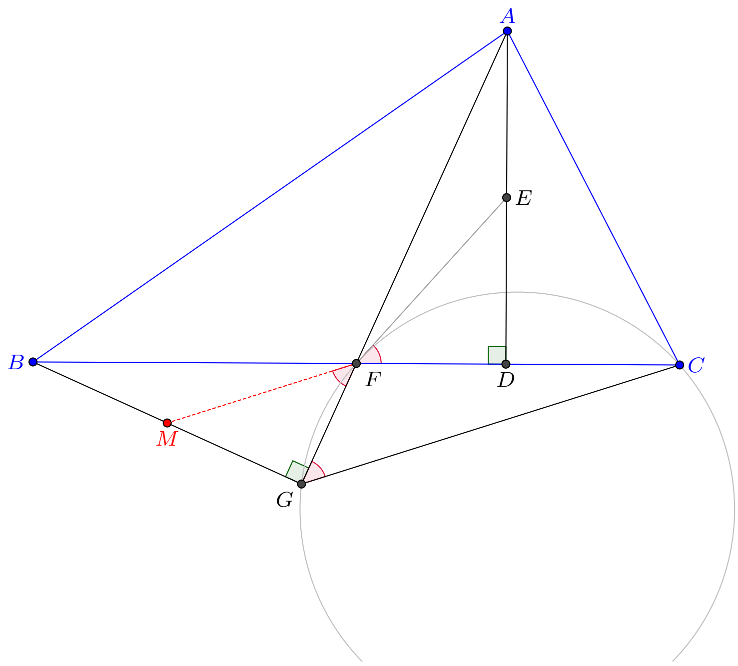
Passo base: $k = 0$. È facile controllare che 0, 1 e 2 sono numeri perdenti per Giada (non può togliere né 3 né 4 palline), mentre 3, 4, 5 o 6 sono vincenti (può togliere 3 o 4 palline e lasciarne a Federico strettamente meno di 4).

Passo induttivo: $k \to k+1$. Se Giada parte da $n = 7(k+1) + a$ con $a = 0, 1, 2$, dovrà lasciare a Federico un numero di palline della forma $7k + b$ con $b = 3, 4, 5, 6$. A questo punto Federico potrà sempre togliere 3 o 4 palline, in modo da lasciare $7k$, $7k+1$ o $7k+2$ palline a Giada, con le quali per ipotesi induttiva perde.

Se invece Giada parte da $7(k+1) + a$ palline con $a = 3, 4, 5, 6$, può rimuoverne 3 o 4 in modo da lasciarne a Federico $7(k+1)$, $7(k+1)+1$ o $7(k+1)+2$, che come abbiamo appena dimostrato sono perdenti.

(Testo)

Soluzione di G2: Condizione equivalente affiché EF tanga la circonferenza passante per G, F, C è che l'angolo $\angle EFC$ sia uguale $\angle FGC$ ($\angle EFC$ deve essere "l'angolo limite" che insiste sull'arco FC).



Definiamo dunque M il punto medio di BG. I triangoli $\triangle AFD$ e $\triangle BFG$ sono simili, poiché sono retti ($\angle ADF = \angle BGF$) e hanno un angolo in comune ($\angle AFD = \angle BFG$). Di conseguenza anche i triangoli $\triangle EFD$ e $\triangle MFG$ sono simili, in quanto E ed M sono i punti medi di lati corrispondenti nella similitudine fra $\triangle AFD$ e $\triangle BFG$. Sfruttando tale similitudine, otteniamo ovviamente che $\angle EFC = \angle MFG$.

Osserviamo ora che F è il punto medio di BC ed M è il punto medio di BG, quindi per il teorema di Talete le rette MF e BC sono parellele. Grazie al parallelismo, abbiamo perciò che $\angle MFG = \angle FGC$.

Infine, unendo le due uguaglianze trovate abbiamo proprio $\angle EFC = \angle MFG = \angle FGC$, che per quanto detto all'inizio è equivalente alla tesi. (Testo)

Soluzione di N2: Vogliamo mostrare che l'unica soluzione è $n = 130$.

Analizziamo innanzitutto l'equazione diofantea $n = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 = 1 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2$ modulo 4, ricordando che i quadrati sono congrui a 0 o 1 modulo 4. Studiamo dunque i 4 casi:

1. se $n \equiv 0 \pmod 4$, si ottiene $d_2 = 2$, che però è assurdo poiché $1 + 4 + d_3^2 + d_4^2 \not\equiv 0 \pmod 4$;

2. se n dispari, bisognerebbe avere che almeno uno tra d_2, d_3 e d_4 sia pari, altrimenti non si ha la congruenza modulo 4. Però n è dispari, quindi non può avere divisori pari, perciò anche questo caso è assurdo;

3. se $n \equiv 2 \pmod 4$, non abbiamo nessun assurdo.

Dunque dobbiamo avere $n = 2 \cdot d$ con d dispari, da cui in particolare $d_2 = 2$. Sia ora p il più piccolo primo che divide d, allora ovviamente $d_3 = p$, visto che n non è divisibile per 4. Infine d_4 deve essere pari, altrimenti l'equazione diofantea iniziale sarebbe falsa, dunque $d_4 = 2 \cdot p$ facilmente.

Mettendo assieme queste informazioni, deve valere che $1 + 4 + p^2 + 4p^2 = n$, cioè $n = 5(p^2 + 1)$. Allora 5 divide n, il che ci dice che $p = 3$ oppure $p = 5$. Infatti 5 deve essere maggiore o uguale al più piccolo primo dispari che divide n. Ci siamo perciò ricondotti a due casi:

$p = 3$. In questo caso otteniamo $n = 50$, assurdo poiché 3 non divide 50.

$p = 5$. In questo caso otteniamo invece $n = 130$, per il quale $d_1 = 1$, $d_2 = 2$, $d_3 = 5$ e $d_4 = 10$ e l'equazione è rispettata.

(Testo)

Soluzione di A3: Ricordiamo innanzitutto un piccolo risultato di teoria.

Lemma 8.4. *Sia $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ un polinomio monico a coefficienti reali e siano $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ le sue radici (eventualmente complesse). Allora, per ogni $k = 1, \ldots, n$, vale che*

$$a_{n-k} = (-1)^k \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} \alpha_{i_1} \ldots \alpha_{i_k} \,.$$

Dimostrazione. Innanzitutto notiamo che $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_n)$. Eguagliando ora il coefficiente di x^{n-k} nei due termini di questa equazione otteniamo proprio quanto cercato. □

Torniamo quindi al nostro problema: vogliamo trovare quanto vale $a^3 + b^3 + c^3$. Per una semplice verifica algebrica vale che

$$a^3 + b^3 + c^3 = (a + b + c)^3 - 3(a + b + c)(ab + bc + ca) + 3abc \,.$$

Per il Lemma 8.4, abbiamo però che

$$\begin{cases} a + b + c = -a_2 = 0 \\ ab + bc + ca = a_1 = -17 \\ abc = -a_0 = 19 \end{cases} ,$$

dove abbiamo utilizzato la notazione $x^3 - 17x - 19 = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$. Perciò

$$a^3 + b^3 + c^3 = (a + b + c)^3 - 3(a + b + c)(ab + bc + ca) + 3abc = 3 \cdot 19 = 57 \,.$$

Nota 8.5. Diciamo che una funzione $f(x_1, \ldots, x_n)$ è *simmetrica* se $f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = f(x_1, \ldots, x_n)$ per ogni permutazione σ di $\{1, \ldots, n\}$. Inoltre chiamiamo *funzioni simmetriche elementari* relative ad n, le funzioni

$$e_k(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} x_{i_1} \ldots x_{i_k}$$

per $k = 1, \ldots, n$, che risultano facilmente essere simmetriche.

In generale, data $f(x_1, \ldots, x_n)$ una funzione simmetrica, allora f si può scrivere come un polinomio in $e_1, \ldots, e_n$, cioè

$$f(x_1, \ldots, x_n) = p(e_1, \ldots, e_n) \,,$$

dove p è un polinomio in n variabili.

Questo fatto solitamente non viene utilizzato di per sè nelle dimostrazioni, ma è utile tenerlo a mente quando si ha a che fare con funzione simmetriche. Ad esempio $a^3 + b^3 + c^3$ è una funzione simmetrica in a, b, c, quindi a priori già sapevamo di poterlo scrivere in funzione di $a + b + c$, $ab + bc + ca$, abc (di cui poi sapevamo il valore grazie al Lemma 8.4).

(Testo)

Soluzione di C3: Dimostriamo che in A ci sono necessariamente due numeri consecutivi. Consideriamo gli n sottoinsiemi di X dati da:

$$B_i = \{2i - 1, 2i\}$$

per $i = 1, 2, \ldots, n$; tali B_i formano una partizione di X. Per il principio dei cassetti, poiché A ha $n + 1$ elementi, esiste un indice i tale che B_i contiene almeno due elementi di A. Perciò in A è sempre possibile trovare una coppia di numeri consecutivi che, in particolare, sono coprimi.

Per il secondo punto, scriviamo ogni elemento di X nella forma $2^k \cdot d$, dove d è un numero dispari minore di $2n$. Consideriamo i sottoinsiemi di X descritti da:

$$C_i = \{x \in X \mid x = 2^k(2i - 1) \text{ per qualche } k\}$$

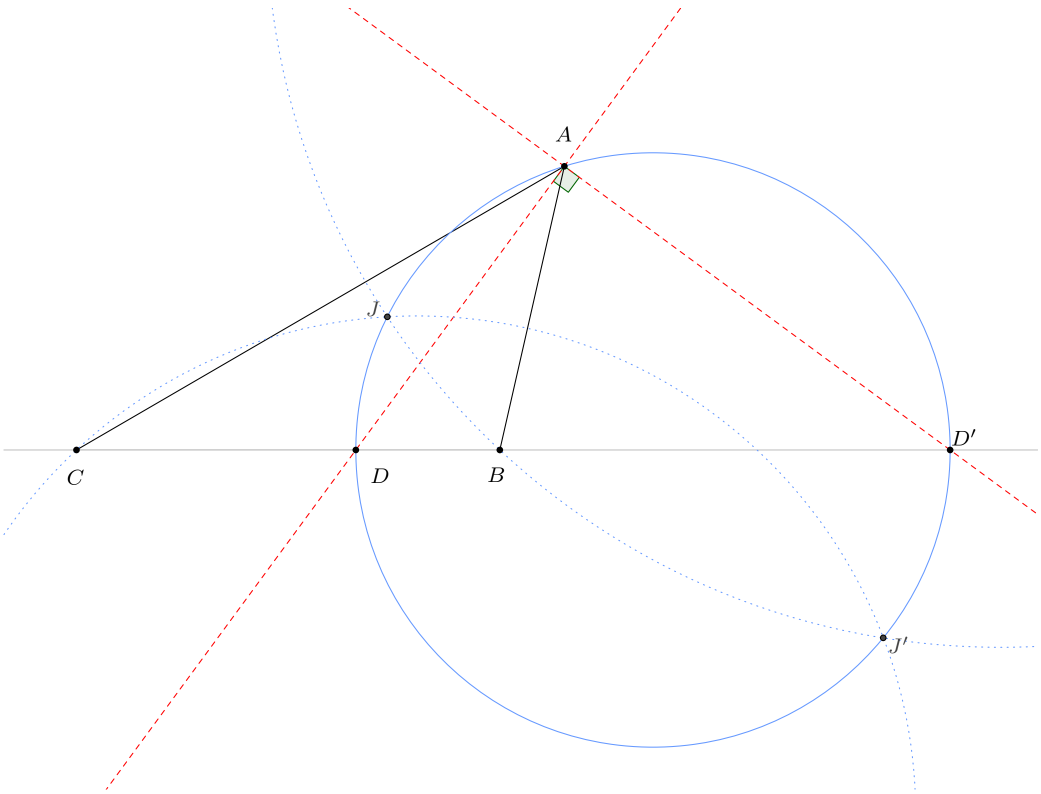
per $i = 1, 2, \ldots, n$. Come prima, si tratta di una partizione in n sottoinsiemi di X e quindi esiste un indice i tale per cui $|A \cap C_i| \geq 2$. Perciò in A troviamo sempre due elementi distinti $2^k(2i - 1)$ e $2^h(2i - 1)$ e concludiamo osservando che necessariamente uno dei due divide l'altro. (Testo)

Soluzione di G3: Poniamoci in un sistema di riferimento cartesiano in cui $B = (1, 0)$ e $C = (-1, 0)$ (a meno di riscalamento possiamo supporlo) e chiamiamo $\alpha = BA/CA$.

Allora il luogo dei punti $X = (x, y)$ per cui $BX/CX = \alpha$ è dato dall'equazione

$$\frac{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}}{\sqrt{(x+1)^2 + y^2}} = \alpha$$
$$\iff (x-1)^2 + y^2 = \alpha^2(x+1)^2 + \alpha^2 y^2$$
$$\iff x^2 + 2\,\frac{\alpha^2+1}{\alpha^2-1}\,x + y^2 + 1 = 0\,,$$

che ovviamente parametrizza una circonferenza.



Ovviamente A appartiene a Γ_A; inoltre ci appartengono facilmente anche D e D' per il teorema della bisettrice. Supponiamo ora senza perdita di generalità che $AB < AC$, allora abbiamo che $\angle DAB = \alpha/2$ e $\angle BAD' = 90° - \alpha/2$, quindi $\angle DAD' = \angle DAB + \angle BAD' = 90°$. Perciò DD' risulta il diametro della circonferenza Γ_A.

Sia ora J un'intersezione fra Γ_A e Γ_B, vogliamo mostrare che J appartiene anche a Γ_C per concludere la dimostrazione dell'esercizio. Visto che $J \in \Gamma_A$ e $J \in \Gamma_B$, abbiamo che

$$\begin{cases} BJ/CJ = BA/CA \\ CJ/AJ = CB/AB \end{cases}$$

da cui, unendo le due equazioni, otteniamo

$$AJ/BJ = AC/BC\,,$$

che ci dice proprio che J appartiene a Γ_C, come voluto. (Testo)

Soluzione di N3: Dimostriamo prima di tutto un lemma preliminare; procederemo poi per induzione su N.

Lemma 8.6. *Sia I un insieme finito non vuoto di numeri naturali maggiori o uguali a 2, non consecutivi, e sia $m = \max I$. Allora*

$$\sum_{i \in I} F_i < F_{m+1} .$$

Dimostrazione. Procediamo per induzione su $m = \max I$. Per $m = 2$, avremo necessariamente che $I = \{2\}$ e la tesi è valida poiché $1 = F_2 < F_3 = 2$. Analogamente, per $m = 3$ dovremmo avere $I = \{3\}$ e ancora la tesi è vera. Consideriamo quindi $m \geq 4$ e per ipotesi induttiva supponiamo che valga la formula del lemma per ogni naturale strettamente minore di m. Se $I = \{m\}$ si conclude facilmente osservando che $F_m < F_{m+1}$. Supponiamo quindi che $J = I \setminus \{m\}$ sia non vuoto; allora

$$\sum_{i \in I} F_i = F_m + \sum_{j \in J} F_j .$$

Per ipotesi induttiva, se $m' = \max J \leq m - 2$, otteniamo

$$\sum_{j \in J} F_j < F_{m'+1} \leq F_{m-1} ,$$

da cui ricaviamo la tesi cercata:

$$\sum_{i \in I} F_i < F_m + F_{m-1} = F_{m+1} .$$

□

Dimostriamo ora, per induzione su N, che N ammette un'unica scrittura come somma di numeri di Fibonacci non consecutivi diversi da F_0 e F_1.

Per $N = 1 = F_2$ la tesi è evidente. Supponiamo quindi che essa valga per ogni naturale strettamente minore di un certo N. Consideriamo $k \geq 3$ tale che

$$F_k \leq N < F_{k+1} .$$

Possiamo scrivere

$$N = F_k + (N - F_k)$$

con $0 \leq N - F_k < N$. Se $N = F_k$, abbiamo già una scrittura che soddisfa le condizioni richieste (per il momento non sappiamo ancora che è unica); altrimenti, per ipotesi induttiva, $N - F_k$ si può scrivere come

$$N - F_k = F_{n_1} + F_{n_2} + \cdots + F_{n_s}$$

con $2 \leq n_1 < n_2 < \cdots < n_s$ non consecutivi e univocamente determinati. Inoltre $N - F_k < F_{k-1}$ poiché $N < F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$, dunque $n_s \leq k - 2$. Perciò anche N ammette una scrittura come somma di numeri di Fibonacci non consecutivi, data da

$$N = F_{n_1} + F_{n_2} + \cdots + F_{n_s} + F_k .$$

Dimostriamo che tale rappresentazione è unica. Supponiamo che

$$N = \sum_{i \in I} F_i$$

con I insieme finito di naturali non consecutivi. Notiamo che $m = \max I \leq k$, poiché $N < F_{k+1}$. Se fosse $m < k$ avremmo, per il Lemma 8.6, che

$$N = \sum_{i \in I} F_i < F_{m+1} \leq F_k \leq N\,,$$

assurdo. Dunque $k = \max I$ e F_k deve necessariamente comparire in una somma di numeri di Fibonacci non consecutivi che dà come risultato N. La tesi a questo punto segue poiché, per ipotesi induttiva, la scrittura di $N - F_k$ è unica. (Testo)

Soluzione di A4:

1. Vale ovviamente che

$$\sum_{cyc} \frac{a_1}{a_1+a_2+a_3} > \sum_{cyc} \frac{a_1}{a_1+a_2+\ldots+a_n} = \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{a_1+a_2+\ldots+a_n} = 1\,,$$

   da cui la prima disuguaglianza è dimostrata. Per l'altra si procede analogamente, infatti

$$\begin{aligned}\sum_{cyc} \frac{a_1}{a_1+a_2+a_3} &= \sum_{cyc} 1 - \frac{a_2+a_3}{a_1+a_2+a_3} = \\ &= n - \sum_{cyc} \frac{a_2}{a_1+a_2+a_3} - \sum_{cyc} \frac{a_3}{a_1+a_2+a_3} < n-2\,,\end{aligned}$$

   dove l'ultima uguaglianza si ottiene in modo del tutto simile al caso precedente, poiché si utilizza che

$$\sum_{cyc} \frac{a_2}{a_1+a_2+a_3} > 1 \quad \text{e} \quad \sum_{cyc} \frac{a_3}{a_1+a_2+a_3} > 1\,.$$

2. È sufficiente mostrare che esistono scelte di $a_1, \ldots, a_n$ per cui la somma ciclica considerata è arbitrariamente vicina ad 1 e a $n-2$.

   Poniamo $a_k = m^k$ per $k = 1, \ldots, n$, allora

$$\sum_{cyc} \frac{a_1}{a_1+a_2+a_3} = \sum_{k=1}^{n-2} \frac{m^k}{m^k+m^{k+1}+m^{k+2}} + \frac{m^{n-1}}{m^{n-1}+m^n+m} + \frac{m^n}{m^n+m+m^2}\,.$$

   Facendo tendere m all'infinito si ha facilmente che tutti i termini della sommatoria tendono a 0, tranne l'ultimo che tende a 1; otteniamo quindi che ci si può avvicinare arbitrariamente a 1.

   Mostriamo ora che ci si può avvicinare a piacere a $n-2$. Per farlo consideriamo $a_k = 1/m^k$ e osserviamo che in questo caso

$$\sum_{cyc} \frac{a_1}{a_1+a_2+a_3} = \sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{1+1/m+1/m^2} + \frac{1}{1+1/m+m^{n-2}} + \frac{1}{1+m^{n-1}+m^{n-2}}\,.$$

   Quindi per m che tende ad infinito i primi $n-2$ termini della sommatoria tendono a 1, mentre gli ultimi due a 0; ottenendo che ci si può avvicinare arbitrariamente a $n-2$.

(Testo)

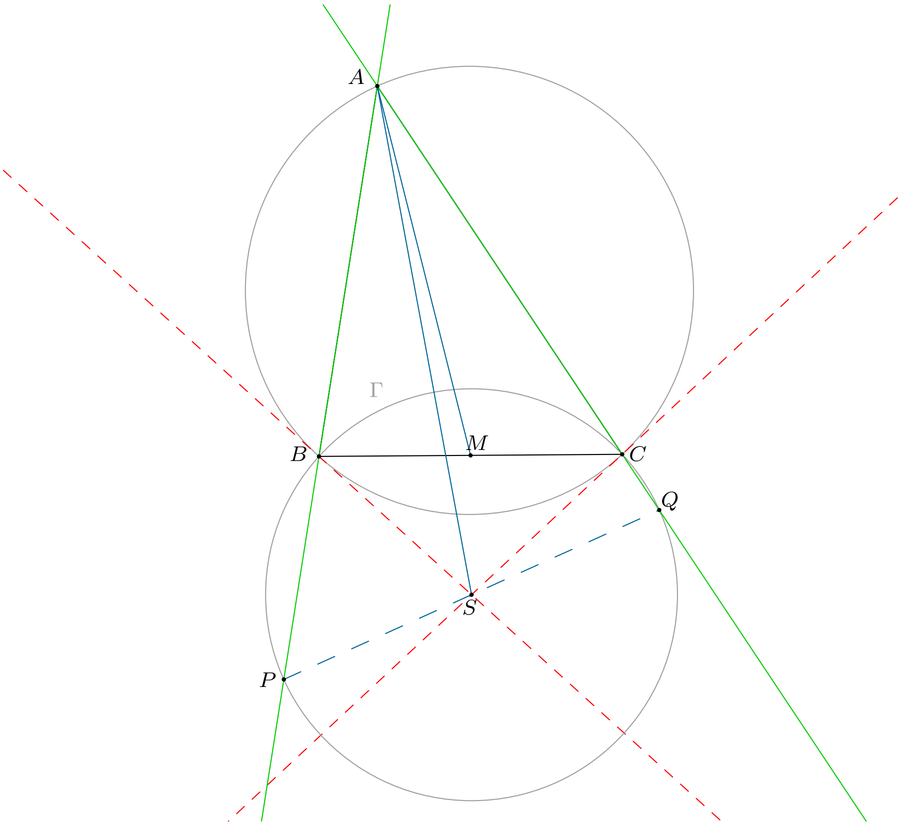
Soluzione di C4: Chiamiamo *bordanti* i segmenti con vertici in S che costituiscono l'inviluppo convesso di S, cioè i segmenti per cui la retta su cui giacciono lascia S tutto nello stesso semipiano. Allora sicuramente i segmenti bordanti saranno sempre tracciati, a prescindere dalle mosse fatte, poiché nessun altro segmento li interseca.

La configurazione finale sarà costituita quindi dal poligono convesso che ha come lati i segmenti bordanti, suddiviso in triangoli. Consideriamo ora la somma degli angoli interni di tali triangoli; questa sarà uguale alla somma degli angoli interni del poligono più $360°$ per il numero di punti strettamente interni al poligono. Tale numero è perciò uguale ad una costante c e visto che ogni triangolo ha somma degli angoli interni uguale a $180°$ si avrà sempre $N = c/180°$. (Testo)

Soluzione di G4: Per dimostrare il primo punto dell'esercizio avremo bisogno del seguente lemma.

Lemma 8.7 (Lemma della simmediana)**.** *Sia ABC un triangolo e sia M il punto medio del lato BC. Si traccino le rette tangenti alla circonferenza circoscritta ad ABC nei punti B e C e sia S il loro punto di intersezione. Allora AS è la simmediana corrispondente al vertice A, cioè la retta simmetrica ad AM rispetto alla bisettrice uscente da A.*

Dimostrazione. Per ottenere la tesi è necessario dimostrare che $\angle BAS = \angle MAC$. Sia Γ la circonferenza di centro S e raggio $BS = CS$. Siano P e Q rispettivamente i punti in cui i prolungamenti dei lati AB e AC incontrano nuovamente Γ.



Notiamo che i triangoli ABC e AQP sono simili: infatti $\angle ABC = \pi - \angle PBC = \angle PQA$ e analogamente $\angle ACB = \angle APQ$.

È sufficiente dimostrare che i punti P, S e Q sono allineati: sapendo ciò, S è il punto medio del segmento PQ e quindi per la similitudine dei triangoli ABC e AQP possiamo concludere che $\angle BAS = \angle MAC$. Osserviamo però che

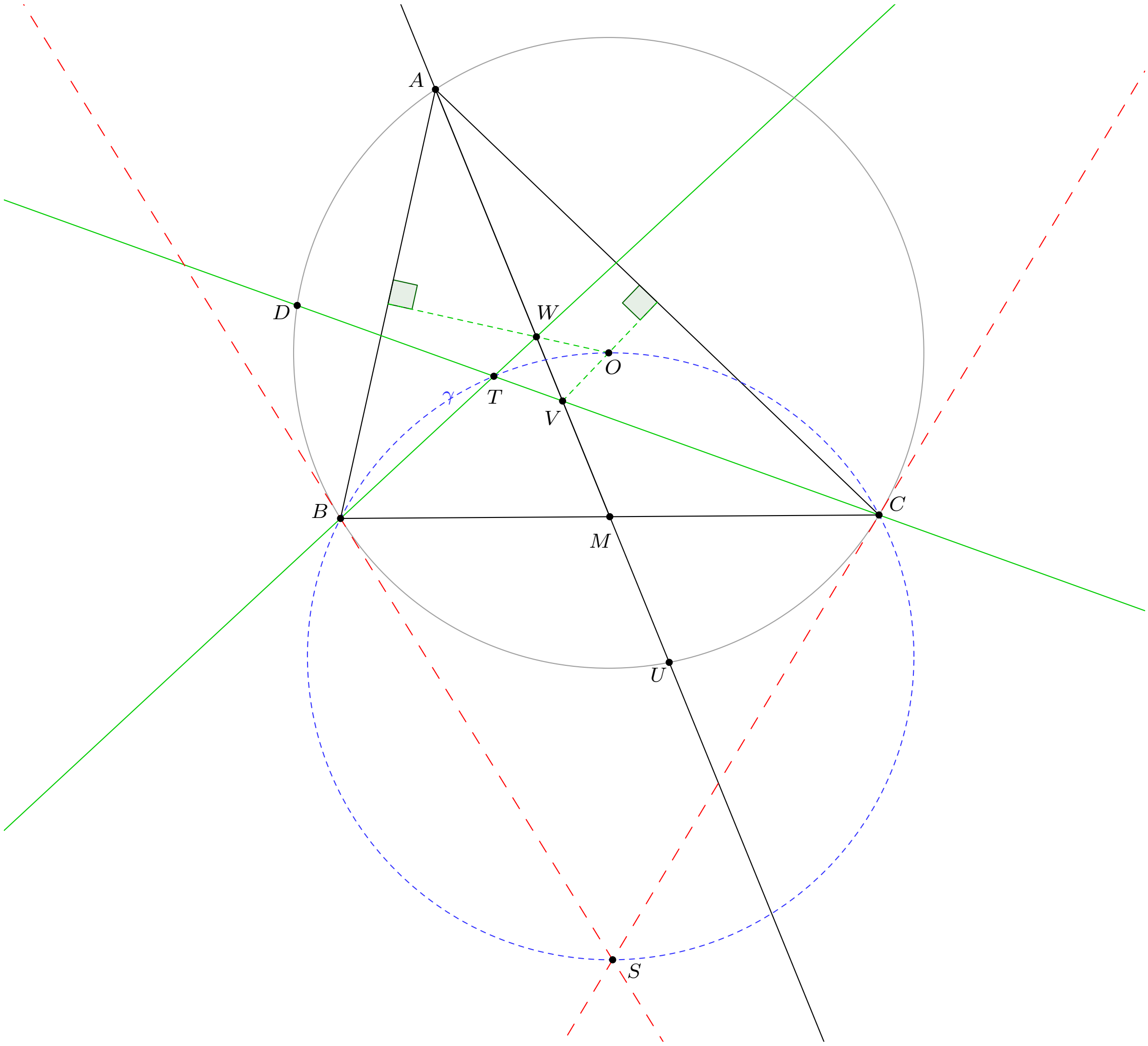
$$\angle PBQ = \angle BAQ + \angle AQB = \angle BAC + \frac{\angle BSC}{2}\,.$$

Inoltre $\angle SBC = \angle SCB = \angle BAC$ perché angoli alla circonferenza che insistono sull'arco BC. Quindi avremo

$$\angle BSC = \pi - 2\angle BAC\,.$$

Combinando le uguaglianze trovate otteniamo $\angle PBQ = \frac{\pi}{2}$, cioè PQ è un diametro, e questo conclude. $\square$

Siano O il circocentro di ABC ed M il punto medio di BC. Notiamo che, poiché V appartiene all'asse del lato AC, avremo $AV = VC$ e $\angle VAC = \angle VCA$; analogamente $AW = WB$ e $\angle WAB = \angle WBA$.



Dimostriamo che il quadrilatero $BTOC$ è ciclico: per fare ciò è sufficiente dimostrare che $\angle BTC = \angle BOC$. Osserviamo però che

$$\angle TBC + \angle TCB = \angle ABC - \angle BAW + \angle ACB - \angle CAV = \pi - 2\angle BAC$$

e quindi $\angle BTC = 2\angle BAC = \angle BOC$ come voluto.

La tesi seguirà dal fatto che AT è la simmediana uscente dal vertice A: infatti, se $\angle BAT = \angle MAC$, allora i triangoli ATB e CTA sono simili, poiché

$$\angle BAT = \angle MAC = \angle ACT\,, \quad \angle ABT = \angle BAM = \angle TAC\,.$$

Dunque dalla similitudine si deduce che $AT^2 = BT \cdot CT$.

Dimostriamo che AT è la simmediana. Costruiamo le rette tangenti alla circonferenza circoscritta ad ABC per B e per C; sia S il loro punto di intersezione. Il quadrilatero $BOCS$ è ciclico, dunque i punti B, T, O, C ed S si trovano tutti su una stessa circonferenza γ. Dimostriamo che i punti A, T ed S sono allineati: detto T' il punto di intersezione tra AS e γ, è sufficiente dimostrare che $\angle TBC = \angle T'BC$ (a quel punto sarà $T = T'$). Vale:

$$\begin{aligned}\angle T'BC = \angle ASC &= \pi - \angle SAC - \angle ACB - \angle BCS = \\ &= \pi - \angle SAC - \angle ACB - \angle BAC = \angle ABC - \angle SAC\,.\end{aligned}$$

Inoltre

$$\angle TBC = \angle ABC - \angle ABT = \angle ABC - \angle BAM\,.$$

Per il Lemma 8.7 (Lemma della simmediana) $\angle SAC = \angle BAM$ e si conclude.

Per dimostrare il secondo punto dell'esercizio, consideriamo il punto D di intersezione tra la retta CT e la circonferenza circoscritta ad ABC. Il triangolo BDT è isoscele sulla base BD. Infatti $\angle BDT = \angle BAC$ e

$$\begin{aligned}\angle DBT = \angle DBA + \angle ABT &= \angle DCA + \angle BAM = \\ &= \angle CAM + \angle BAM = \angle BAC\,.\end{aligned}$$

A questo punto avremo che $BT + CT = CD = CV + VD = AV + VD$. Ma anche il triangolo DVU è isoscele poiché

$$\angle UDV = \angle UAC = \angle DCA = \angle DUV\,,$$

da cui $BT + CT = AV + DU = AU$. (Testo)

Soluzione di N4: L'unica soluzione è la quaterna $(0,0,0,0)$.

Dimostriamo che non ci sono altre soluzioni con il metodo della *discesa infinita*: data una soluzione non banale, ne troveremo un'altra non banale e "più piccola". Sia (x,y,z,w) una soluzione dell'equazione proposta diversa da $(0,0,0,0)$; sappiamo che $3 \mid x^2+y^2$ e si verifica immediatamente che ciò può accadere solo nel caso in cui $x \equiv y \equiv 0 \pmod 3$. Perciò possiamo scrivere $x = 3x'$ e $y = 3y'$. Semplificando l'equazione che si ottiene sostituendo, arriviamo a

$$3(x'^2 + y'^2) = z^2 + w^2\,.$$

Ripetendo il ragionamento, troviamo che $z = 3z'$ e $w = 3w'$, per ottenere

$$x'^2 + y'^2 = 3(z'^2 + w'^2)\,.$$

Perciò (x',y',z',w') è soluzione non banale dell'equazione. Questo procedimento si può iterare infinite volte e almeno una delle componenti delle quaterne che troviamo è sempre non nulla. Ad ogni passo, questa componente viene divisa per 3 e quindi diminuisce strettamente: questo è assurdo.

Una soluzione che usa la discesa infinita si può sempre trasformare in una soluzione più concisa. In questo caso si può procedere così: sia per assurdo (x,y,z,w) una soluzione non banale tale che $x+y+z+w$ sia minima. Come sopra, dividendo tutte le variabili per 3 otteniamo una soluzione (x',y',z',w') fatta da interi non negativi, con $x'+y'+z'+w' = \frac{1}{3}(x+y+z+w) < x+y+z+w$, assurdo per la minimalità di (x,y,z,w). (Testo)

Soluzione di A5: Dimostriamo per induzione su n che

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} \leq 1 - \frac{1}{\prod_{k=1}^{n} x_k},$$

da cui seguirà ovviamente la tesi, poiché gli x_k sono tutti strettamente positivi.

Il passo base per $n = 1$ è ovvio, in quanto $1/x_1 = 1/2 = 1 - 1/2 = 1 - 1/x_1$. Vediamo quindi il passo induttivo: supponiamo che la tesi sia vera per n e dimostriamola per $n+1$. Utilizzando la definizione della successione e semplici manipolazioni, abbiamo che

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{x_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} + \frac{1}{x_{n+1}} \leq 1 - \frac{1}{\prod_{k=1}^{n} x_k} + \frac{1}{x_{n+1}} = 1 - \frac{x_{n+1} - \prod_{k=1}^{n} x_k}{\prod_{k=1}^{n+1} x_k} = 1 - \frac{1}{\prod_{k=1}^{n+1} x_k},$$

che dimostra proprio quanto cercato. (Testo)

Soluzione di C5: Dimostriamo la formula facendo vedere che gli insiemi $(n+2)$-buoni che non contengono il numero $n+2$ sono esattamente a_{n+1}, mentre quelli che lo contengono sono $a_n + 1$.

Supponiamo che A sia $(n + 2)$-buono e che $n + 2 \notin A$. Allora A è anche $(n + 1)$-buono, infatti è non vuoto, $A \subseteq \{1, 2, \dots, n + 1\}$ e $|A| \leq \min A$ per ipotesi. Viceversa, un insieme $(n+1)$-buono B è sempre anche $(n+2)$-buono. Abbiamo perciò una semplice corrispondenza biunivoca tra gli insiemi $(n + 2)$-buoni che non contengono $n + 2$ e gli insiemi $(n + 1)$-buoni; questo dimostra la prima parte dell'affermazione iniziale.

Supponiamo ora che $n+2 \in A$. Allora o $A = \{n+2\}$ oppure $A \setminus \{n+2\}$ è non vuoto. Mostriamo che gli insiemi di quest'ultimo tipo sono proprio a_n costruendo una bigezione con gli insiemi n-buoni: questo ci permetterà di concludere. Notiamo che se $n + 2 \in A$ e $A' = A \setminus \{n + 2\}$ è non vuoto, allora $|A| \geq 2$ e conseguentemente $\min A \geq 2$. Associamo quindi all'insieme A l'insieme

$$B = \{b \mid b + 1 \in A'\} .$$

L'insieme B così definito è non vuoto e poiché $A' \subseteq \{2, 3, \dots, n + 1\}$ avremo che $B \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$. Inoltre B è n-buono, infatti

$$|B| = |A'| = |A| - 1 \leq \min A - 1 = \min A' - 1 = \big(\min B + 1\big) - 1 = \min B .$$

Inoltre dato un insieme n-buono B, ricaviamo un insieme $(n + 2)$-buono A tramite

$$A = \{b + 1 \mid b \in B\} \cup \{n + 2\} .$$

In modo del tutto analogo a quanto già fatto si verifica che A è un insieme $(n+2)$-buono (e ovviamente $n + 2 \in A$, $A \setminus \{n + 2\}$ non vuoto). Le due operazioni descritte sono una l'inversa dell'altra e permettono di trovare la bigezione voluta. (Testo)

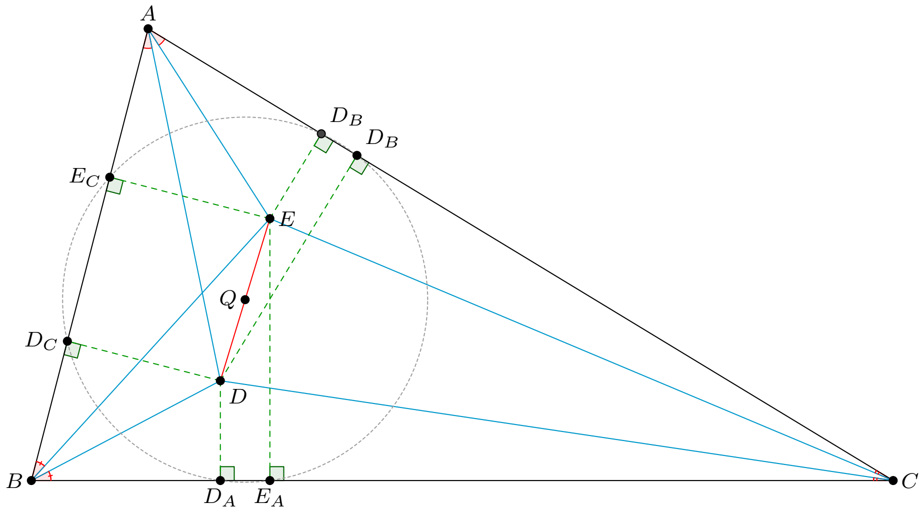
Soluzione di G5: Introduciamo innanzitutto un lemma noto, conseguenza del teorema di Ceva, che ci sarà utile nella dimostrazione.

Lemma 8.8 (Ceva trigonometrico)**.** *Sia ABC un triangolo e P un punto interno ad esso, allora vale che*

$$\frac{\sin \angle BAP}{\sin \angle PAC} \cdot \frac{\sin \angle ACP}{\sin \angle PCB} \cdot \frac{\sin \angle CBP}{\sin \angle PBA} = 1\,.$$

Dimostrazione. Segue facilmente dal teorema di Ceva utilizzando il teorema dei seni. □

Costruiamo E come il punto interno al triangolo tale che $\angle EAB = \angle DAC$ e $\angle EBC = \angle DBA$ (che esiste facilmente) e mostriamo che E rispetta anche la terza uguaglianza di angoli. Questo però segue facilmente dal Lemma 8.8 (Ceva trigonometrico).



Chiamiamo ora D_A, D_B, D_C le proiezioni di D su BC, CA, AB rispettivamente e analogamente definiamo E_A, E_B, E_C. Per costruzione di E vale ovviamente che i triangoli ADD_C e AEE_B sono simili, così come i triangoli AEE_C e BDD_B. Otteniamo perciò

$$AE_C \cdot AD_C = \left(AD_B \cdot \frac{AE}{AD}\right) \cdot \left(AE_B \cdot \frac{AD}{AE}\right) = AD_B \cdot AE_B\,,$$

che implica che D_B, E_B, D_C, E_C sono conciclici (per potenza rispetto ad A). Analogamente si ha la ciclicità anche con D_A e E_A, quindi ci rimane solo da mostrare che la circonferenza che contiene questi punti è centrata in Q.

Vale però facilmente che l'asse di D_AE_A passa per Q, coì come gli assi dei segmenti D_BE_B e D_CE_C, quindi Q è il centro della circonferenza cercata. (Testo)

Soluzione di N5: Definiamo innanzitutto $a_1, \ldots, a_n$ reali positivi tali che

$$\begin{cases} a_n = \sqrt{\sigma(n)} \\ a_k = \sqrt{\sigma(k) + a_{k+1}} \quad \text{per } k = 1, \ldots, n-1 \end{cases}$$

In particolare con questa notazione l'espressione considerata corrisponde ad a_1.

Osserviamo che tutti gli a_k per $k = 1, \ldots, n$ devono essere interi positivi. Innanzitutto devono essere razionali, poiché a_1 si richiede sia razionale, di conseguenza $a_2 = a_1^2 - \sigma(1)$ è razionale e così via tutti gli a_k. Ora $a_n = \sqrt{\sigma(n)}$ è un razionale che è radice di un intero e quindi deve essere anch'esso intero; perciò $a_{n-1} = \sqrt{\sigma(n-1) + a_n}$ analogamente è un razionale radice di un intero e quindi un intero; così via a_k è intero per ogni $k = 1, \ldots, n$.

Vediamo ora che $a_k \leq \lceil \sqrt{n} \,\rceil$ per induzione "discendente" su k. Se $k = n$, abbiamo $a_n = \sqrt{\sigma(n)} \leq \sqrt{n} \leq \lceil \sqrt{n} \,\rceil$. Supponiamo che la proprietà valga per $k+1$ e dimostriamolo per k; abbiamo infatti

$$a_k^2 = \sigma(k) + a_{k+1} \leq n + \lceil \sqrt{n} \,\rceil < \lceil \sqrt{n} \,\rceil^2 + 2\lceil \sqrt{n} \,\rceil + 1 = (\lceil \sqrt{n} \,\rceil + 1)^2 \,,$$

da cui otteniamo proprio $a_k \leq \lceil \sqrt{n} \,\rceil$.

Osserviamo che se $n = 1$ la tesi è vera, quindi supponiamo $n > 1$. Ora definiamo $m \in \mathbb{N}$ tale che $n \in (\, m^2, (m+1)^2 \,]$, allora sicuramente esiste k tale che $\sigma(k) = m^2 + 1$. Notiamo che k è diverso da n, perché $m^2 + 1$ non è un quadrato perfetto per $n > 1$. Abbiamo perciò $a_k^2 = m^2 + 1 + a_{k+1} \leq m^2 + 1 + \lceil \sqrt{n} \,\rceil \leq (m+1)^2$. D'altra parte $a_k^2 \geq m^2$, quindi otteniamo $a_k = m+1$. Di conseguenza $a_{k+1} = (m+1)^2 - (m^2+1) = 2m$; avevamo però mostrato prima $a_{k+1} \leq \lceil \sqrt{n} \,\rceil \leq m + 1$, quindi l'unica possibilità è $m = 1$ ed $n = 2, 3, 4$. Basta dunque controllare questi tre casi per concludere:

- se $n = 2$, l'unica possibilità è $\sigma(2) = 1$ e $\sigma(1) = 2$, che però non dà soluzione;
- se $n = 3$, la permutazione $\sigma(1) = 2, \sigma(2) = 3, \sigma(3) = 1$ rispetta le richieste;
- se $n = 4$, le uniche possibilità sono $\sigma(4) = 1, 4$, che però non danno soluzioni.

Abbiamo quindi mostrato gli unici n richiesti sono 1 e 3. (Testo)

Soluzione di A6: Richiamiamo una nota disuguaglianza.

Lemma 8.9 (Cauchy-Schwarz). *Siano $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ reali allora vale*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right).$$

Mostriamo dunque il nostro problema. Applichiamo il Lemma 8.9 (Cauchy-Schwarz) alle terne $(\sqrt{x^3y}, \sqrt{y^2z}, \sqrt{z^3x})$ e $(\sqrt{z}, \sqrt{x}, \sqrt{y})$ e otteniamo

$$(x^3y + y^3z + z^3x)(x + y + z) \geq (\sqrt{x^3yz} + \sqrt{y^3zx} + \sqrt{z^3xy})^2 = xyz(x + y + z)^2,$$

da cui dividendo per $x + y + z$, visto che x, y, z sono positivi, otteniamo

$$x^3y + y^3z + z^3x \geq xyz(x + y + z) = x^2yz + y^2zx + z^2xy,$$

che è proprio la tesi cercata. (Testo)

Soluzione di C6: In ogni momento sulla lavagna avremo $1 \leq k \leq n$ numeri che indicheremo con $a_1^k, \ldots, a_k^k$. Quindi all'inizio abbiamo $a_1^n = a_2^n = \ldots = a_n^n = 1$.

Consideriamo la quantità

$$S_k = \frac{1}{a_1^k} + \frac{1}{a_2^k} + \ldots + \frac{1}{a_k^k}\,.$$

Inizialmente si ha $S_n = 1 + \ldots + 1 = n$, mentre alla fine risulta $S_1 = \frac{1}{a_1^1}$. Se dimostriamo che $S_k \leq S_{k+1}$, cioè la quantità diminuisce ad ogni mossa, allora avremo che $\frac{1}{a_1^1} = S_1 \leq S_n = n$ da cui $a_1^1 \geq \frac{1}{n}$, che è proprio quanto cercato.

Assumiamo che per passare da $k+1$ a k abbiamo agito su a e b, allora

$$S_{k+1} - S_k = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{\frac{a+b}{4}}\,;$$

infatti tutti gli altri addendi di S_{k+1} e S_k sono uguali e si cancellano. Noi vogliamo $S_{k+1} - S_k \geq 0$ e ciò è equivalente a

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{\frac{a+b}{4}} \iff \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2} \geq \frac{2}{\frac{1}{\frac{1}{a}} + \frac{1}{\frac{1}{b}}}\,,$$

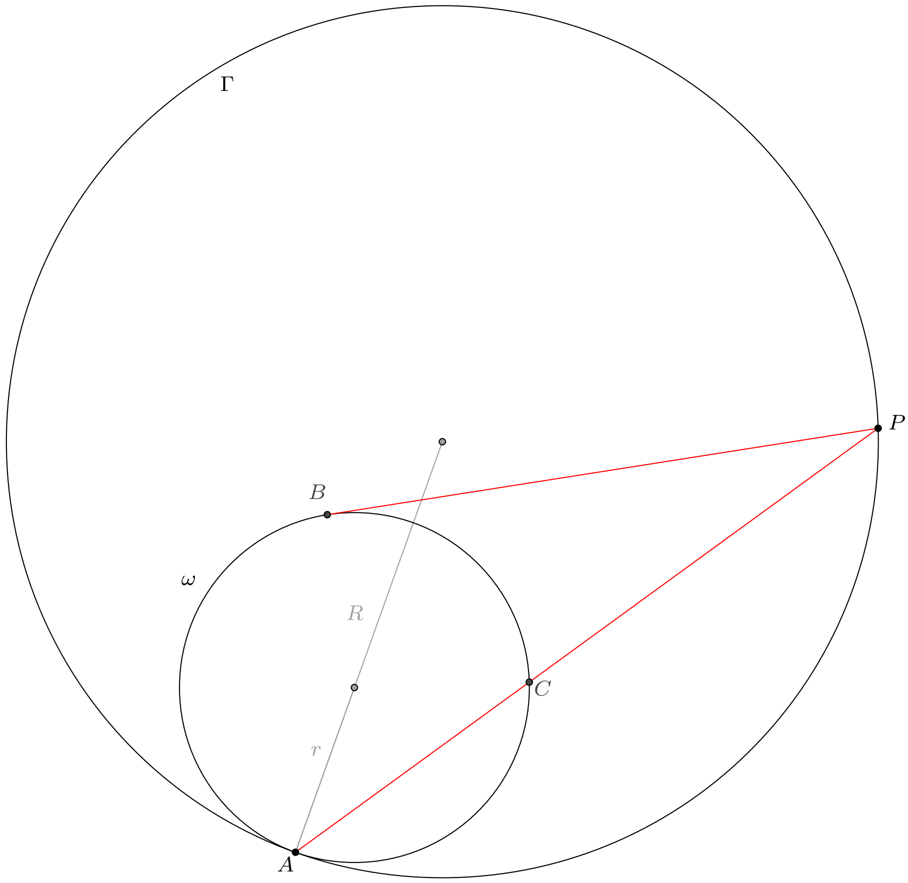
che è vero perché $AM \geq HM$ (media aritmetica maggiore o uguale a media armonica) sulla coppia $(\frac{1}{a}, \frac{1}{b})$. (Testo)

Soluzione di G6: Chiamiamo C l'ulteriore intersezione fra AP e ω ed r, R i raggi rispettivamente di Γ e ω.

Facendo un'omotetia di fattore R/r e di centro A, la circonferenza ω viene mandata nella circonferenza Γ e il punto C va nel punto P. Abbiamo perciò che $PC/PA = (R-r)/r = k$. D'altra parte, per la potenza di P rispetto ad ω, abbiamo $PB^2 = PA \cdot PC$. Unendo le due uguaglianze otteniamo

$$PB^2 = PA \cdot PC = k \cdot PA^2 \Rightarrow PA/PB = \sqrt{k}\,,$$

con $k = (R-r)/r$, che ci dà quindi quanto cercato.



(Testo)

Soluzione di N6:

a) Se $f(n) = f(n+1)$ allora $(f(n), f(n+1)) \neq 1$, che non può essere, quindi $f(n) \neq f(n+1)$. D'altra parte $f(n) \leq f(n+1)$, quindi $f(n) < f(n+1)$ e allora è banale per induzione che $f(n) \leq n$.

b) Fissato n, consideriamo l'insieme (di n elementi distinti) $\mathcal{I}_n = \{f(1), \ldots, f(n)\}$. Per la proprietà di coprimalità rispettata da f, solo un elemento di $\mathcal{I}_n$ può essere divisibile per un primo p.

Se vale $f(n) < 2n$, allora di certo $\mathcal{I}_n \subseteq \{1, 2, \ldots, 2n\}$ per la crescenza di f. Inoltre nell'insieme $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ ci sono al più $2n(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})+6$ numeri non divisibili per 2 o per 3 e visto che al più 2 elementi di $\mathcal{I}_n$ possono essere divisi da 2 o 3 allora

$$n - 2 = |\mathcal{I}_n| - 2 \leq 2n\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right) + 6 = \frac{2}{3}n + 6$$

$$\iff \frac{1}{3}n \leq 8 \iff n \leq 24\,.$$

Quindi se $f(n) < 2n$, allora $n \leq 24$ e ciò mostra quanto voluto.

c) Si ragiona in maniera analoga a quanto fatto nel punto b), ma considerando i primi 2,3,5,7. Infatti se $f(n) \leq 4n$ si ha

$$n - 4 = |\mathcal{I}_n| - 4 \leq 4n\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right) + 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7$$

$$\iff n - 4 \leq n\frac{32}{35} + 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7 \iff \frac{3}{35}n \leq 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7 + 4$$

e ciò limita la dimensione di n.

Ragionando come nelle dimostrazioni di b) e c) e sfruttando che $\prod_{p \text{ primo}}\left(1-\frac{1}{p}\right) = 0$ si può dedurre che, fissato $c > 0$, per n sufficientemente grande $f(n) \leq cn$.

(Testo)