Language: **Italian**

33-esima Balkan Mathematical Olympiad
Tirana, sabato 7 maggio 2016

Problema 1.

Determinare tutte le funzioni iniettive $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che, per ogni numero reale x e ogni intero positivo n,

$$\left| \sum_{i=1}^{n} i\Big(f(x+i+1) - f(f(x+i)) \Big) \right| < 2016.$$

Problema 2.

Sia $ABCD$ un quadrilatero ciclico con $AB < CD$. Le diagonali si intersecano nel punto F e le rette AD e BC si intersecano nel punto E. Siano K ed L le proiezioni di F sui lati AD e BC, rispettivamente, e siano M, S e T i punti medi di EF, CF e DF, rispettivamente.
Dimostrare che il secondo punto di intersezione tra le circonferenze circoscritte ai triangoli MKT e MLS sta sul segmento CD.

Problema 3.

Determinare tutti i polinomi monici f a coefficienti interi che soddisfano la seguente condizione: esiste un intero positivo N tale che p divide $2\left(f(p)!\right)+1$ per ogni primo $p > N$ per cui $f(p) > 0$.
Nota: un polinomio si dice monico se ha il coefficiente del termine principale uguale a 1.

Problema 4.

Il piano è suddiviso in quadratini unitari mediante due insiemi di rette parallele, formando una griglia infinita. Ogni quadratino è colorato con uno tra 1201 colori, in maniera tale che nessun rettangolo con perimetro uguale a 100 contenga due quadratini dello stesso colore.
Dimostrare che nessun rettangolo 1×1201 o 1201×1 contiene due quadratini dello stesso colore.
Nota: qui si assume che ogni rettangolo abbia i lati contenuti nelle rette della griglia.

Lingua: italiano

Tempo concesso: 4 ore e 30 minuti
Ogni problema vale 10 punti