The 9^{th} Romanian Master of Mathematics Competition

Giorno 1: Venerdì 24 Febbraio 2017, Bucharest

Language: Italian

Problema 1. **(a)** Dimostrare che ogni intero positivo n si può scrivere in modo unico nella forma

$$n = \sum_{j=1}^{2k+1} (-1)^{j-1} 2^{m_j},$$

dove $k \geq 0$ e $0 \leq m_1 < m_2 < \cdots < m_{2k+1}$ sono numeri interi.
Questo numero k è chiamato il *peso* di n.

(b) Determinare (in forma chiusa) la differenza fra il numero di interi positivi $\leq 2^{2017}$ con peso pari e il numero di interi positivi $\leq 2^{2017}$ con peso dispari.

Problema 2. Determinare tutti gli interi positivi n che soddisfano la seguente condizione: per ogni polinomio monico P di grado al più n a coefficienti interi, esistono un intero positivo $k \leq n$ e $k+1$ interi distinti x_1, x_2, $\ldots$, x_{k+1} tali che

$$P(x_1) + P(x_2) + \cdots + P(x_k) = P(x_{k+1}).$$

Nota. Un polinomio si dice *monico* se il coefficiente della potenza più grande è pari a uno.

Problema 3. Sia n un intero maggiore di 1 e sia X un insieme di n elementi. Una collezione non vuota di sottoinsiemi A_1, $\ldots$, A_k di X si dice *stretta* se l'unione $A_1 \cup \cdots \cup A_k$ è un sottoinsieme proprio di X e nessun elemento di X appartiene ad esattamente uno degli A_i.
Determinare la massima cardinalità di una collezione di sottoinsiemi propri e non vuoti di X che non ha nessuna sottocollezione stretta.

Nota. Un sottoinsieme A di X si dice *proprio* se $A \neq X$. I sottoinsiemi in una collezione si suppongono distinti. Un'intera collezione si suppone essere una sottocollezione di se stessa.

Ogni problema vale 7 punti.
Il tempo a disposizione è di 4 ore e 30 minuti.