Allenamenti EGMO 2017 – 4

Esercizio 1. Trovare tutti i polinomi $p(x)$ a coefficienti reali tali che $p(x) \cdot p(x^2) = p(x^3)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Esercizio 2. Giada e Federico giocano ad un gioco. Hanno messo in fila $n \geq 5$ pile di monete, che hanno rispettivamente $1, 2, 2^2, \ldots, 2^{n-1}$ monete ciascuna. Una mossa consiste nel scegliere 5 pile e togliere una moneta da ognuna delle pile scelte. Perde chi non può più muovere. Chi vince, se inizia Giada?

Esercizio 3. Sia ABC un triangolo e sia Γ la sua circonferenza circoscritta. Sia ω una circonferenza tangente ad AB, AC in P, Q rispettivamente e internamente a Γ in S. Sia T l'intersezione fra PQ e AS. Dimostrare che $\angle BTP = \angle CTQ$.

Esercizio 4. Una successione $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ di numeri naturali è tale che $a_{n+1} = a_n + b_n$, per $n = 1, 2, \ldots$, dove b_n è la cifra delle unità di a_n. Dimostrare che la sequenza contiene infinite potenze di 2 se e solo se a_1 non è divisibile per 5.