PROBLEMI DI AMMISSIONE AL WC 2018 (TDN)

1. Determinare tutte le terne (p, a, m), dove p è un numero primo ed a e m sono interi positivi, che soddisfano le seguenti condizioni:

(a) $a \leq 5p^2$;

(b) $(p-1)! + a = p^m$.

2. Sia n un intero positivo. Sia A_n l'insieme dei numeri primi p per i quali esistono interi positivi a, b tali che entrambe le seguenti condizioni siano verificate:

(a) $\frac{a+b}{p}$ e $\frac{a^n+b^n}{p^2}$ sono interi;

(b) $\frac{a+b}{p}$ e $\frac{a^n+b^n}{p^2}$ sono coprimi con p.

Se A_n è un insieme finito, denotiamo con $f(n)$ il numero di elementi di A_n.

Dimostrare che:

(a) A_n è un insieme finito se e solo se $n \neq 2$.

(b) Se m, k sono interi positivi dispari, con massimo comune divisore uguale a d, allora

$$f(d) \leq f(k) + f(m) - f(km) \leq 2f(d).$$

3. Sia a un intero positivo tale che, per ogni intero positivo n, il numero $n^2a - 1$ ha un divisore maggiore di 1 e congruo a 1 modulo n.

Dimostrare che a è un quadrato perfetto.