Allenamenti EGMO 2018

Il Team degli Allenamenti EGMO

6 aprile 2018

Sommario

Raccoglieremo in questo documento teoria, problemi, hints e soluzioni proposti come Allenamenti EGMO 2018, di cui trovate tutte le informazioni alla pagina http://www.oliforum.it/viewtopic.php?f=21&t=20541. Questo file sarà via via aggiornato nel corso delle sessioni. Se avete qualsiasi correzione o commento, potete contattarci all'indirizzo email allenamenti.egmo@gmail.com.

Giada Franz
Alice Cortinovis
Federica Cecchetto
Giulia Trevisan
Clara Antonucci
Alessandra Caraceni
Camilla Casamento Tumeo
Marianna Crupi
Morena Porzio
Vittoria Ricciuti
Francesca Rizzo
Veronica Sacchi
Angela Veronese

Indice

1 Allenamenti EGMO 2018 – Algebra **1**
- 1.1 Funzioni . . . 1
- 1.2 Disuguaglianze . . . 3
- 1.3 Successioni . . . 5
- 1.4 Hints . . . 7
- 1.5 Problemi . . . 8
  - 1.5.1 Hints dei problemi . . . 9
  - 1.5.2 Soluzioni . . . 10

2 Allenamenti EGMO 2018 – Combinatoria **12**
- 2.1 Conteggi . . . 12
- 2.2 Double counting . . . 14
- 2.3 Principio dei cassetti, o pigeonhole . . . 15
- 2.4 Invarianti . . . 16
- 2.5 Grafi . . . 17
- 2.6 Colorazioni . . . 19
- 2.7 Hints . . . 21
- 2.8 Problemi . . . 24
  - 2.8.1 Hints dei problemi . . . 25
  - 2.8.2 Soluzioni . . . 26

3 Allenamenti EGMO 2018 – Geometria **28**
- 3.1 Definizioni e preliminari . . . 28
- 3.2 Punti notevoli . . . 29
- 3.3 Omotetia . . . 30
- 3.4 Trigonometria . . . 31
- 3.5 Ceva e Menelao . . . 34
- 3.6 Ciclicità . . . 35
- 3.7 Hints . . . 38
- 3.8 Problemi . . . 40
  - 3.8.1 Hints dei problemi . . . 41
  - 3.8.2 Soluzioni . . . 42

4 Allenamenti EGMO 2018 – Teoria dei numeri **48**
- 4.1 Divisibilità . . . 48
- 4.2 Algoritmo di Euclide . . . 48
- 4.3 Identità di Bezout . . . 49
- 4.4 Congruenze . . . 50
- 4.5 Esercizi base . . . 52
- 4.6 Teorema cinese del resto . . . 54
- 4.7 Struttura moltiplicativa . . . 56
- 4.8 Hints . . . 59
- 4.9 Problemi . . . 62
  - 4.9.1 Hints dei problemi . . . 63
  - 4.9.2 Soluzioni . . . 64

5 Allenamenti EGMO 2018 – Misto **67**
5.1 Problemi 67
5.1.1 Hints dei problemi 68
5.1.2 Soluzioni 69

6 Allenamenti EGMO 2018 – 6 **73**
6.1 Problemi 73
6.1.1 Hints dei problemi 74
6.1.2 Soluzioni 75

7 Allenamenti EGMO 2018 – 7 **78**
7.1 Problemi 78
7.1.1 Hints dei problemi 79
7.1.2 Soluzioni 80

8 Allenamenti EGMO 2018 – 8 **84**
8.1 Problemi 84
8.1.1 Hints dei problemi 85
8.1.2 Soluzioni 86

9 Allenamenti EGMO 2018 – 9 **90**
9.1 Problemi 90
9.1.1 Hints dei problemi 91
9.1.2 Soluzioni 92

Allenamenti EGMO 2018 – Algebra

1.1 Funzioni

Siano A e B due insiemi. Una *funzione* $f : A \to B$, cioè da A (detto *dominio*) a B (detto *codominio*), è una cosa che associa ad ogni elemento di A un elemento di B. Inoltre diciamo che la funzione f è:

- *iniettiva* se ad ogni elemento di B corrisponde al più un elemento di A, cioè se $f(x_1) = f(x_2)$ con $x_1, x_2 \in A$ allora $x_1 = x_2$;
- *suriettiva* se ogni elemento di B è *immagine* di almeno un elemento di A, cioè per ogni $y \in B$ esiste $x \in A$ tale che $f(x) = y$;
- *bigettiva* se è sia iniettiva che suriettiva.

Esempio. Consideriamo gli insiemi $A = \{Alice\,, Francesca\,, Giada\,, Morena\}$ e $B = \{mela\,, fragola\,, mirtillo\,, pera\,, pesca\}$. La funzione che associa ad ogni ragazza il suo frutto preferito fra quelli a disposizione è una funzione.

Supponiamo per esempio che Alice preferisca le fragole, Giada i mirtilli e Francesca e Morena le pere. Questa funzione non è iniettiva perché Francesca e Morena preferiscono entrambe le pere. Inoltre la funzione non è nemmeno surgettiva, perché nessuno preferisce le pesche e le mele.

Esempio. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione tale che $f(x) = x$, cioè la funzione identità dall'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali in se stesso. Tale funzione è facilmente bigettiva.

Esercizio 1.1. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione tale che

$$f(x + f(y + f(z))) = y + f(x + z)\,.$$

Dimostrare che f è bigettiva. [Hint]

Equazioni funzionali

Un'equazione funzionale è un'equazione che coinvolge una funzione. Generalmente in un esercizio con un'equazione funzionale viene chiesto di trovare tutte le funzioni che la rispettano. Presentiamo di seguito un esercizio di questo tipo.

Esercizio 1.2. Trovare tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che

$$f(x^2) - f(y^2) = (x - y)(f(x) + f(y))\,. \tag{1.1}$$

Essendo la prima equazione funzionale che affrontiamo, proponiamo anche una guida alla soluzione:

- Sostituire $y = 0$ nell'equazione iniziale e chiamare $a = f(0)$, per ottenere

$$f(x^2) = x(f(x) + a) + a\,. \tag{1.2}$$

- Utilizzare l'Equazione (1.2) sia per x che per $-x$ e unire le due equazioni ottenute sfruttando che $f((-x)^2) = f(x^2)$. Ottenere quindi che

$$x(f(x) + a) + a = -x(f(-x) + a) + a\,. \tag{1.3}$$

- Sostituire $y = -x$ nell'equazione iniziale e utilizzare nell'Equazione (1.3) la relazione ottenuta. Concludere che $f(0) = a = 0$.

- Utilizzare che $a = 0$ nell'Equazione (1.2) e sostituire quanto ottenuto nell'equazione iniziale. Notare che l'unica possibilità è che valga $f(x) = \lambda x$ per qualche numero reale λ.

- Sostituire nell'equazione iniziale $f(x) = \lambda x$ per verificare che effettivamente la rispetti.

L'ultimo punto non è da trascurare in ogni equazione funzionale. È infatti importante controllare sempre che ogni soluzione trovata rispetti effettivamente l'equazione iniziale!

Polinomi

Un *polinomio* p è una funzione della forma $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ dove $a_0, \ldots, a_n$ sono numeri fissati detti *coefficienti*. Il dominio e l'insieme di appartenenza dei coefficienti possono essere i numeri naturali $\mathbb{N}$, i numeri interi $\mathbb{Z}$, i numeri razionali $\mathbb{Q}$, i numeri reali $\mathbb{R}$ o i numeri complessi $\mathbb{C}$.

Il numero n è detto *grado del polinomio*[1] e il polinomio p è detto monico se $a_n = 1$. Inoltre diciamo che λ è una radice del polinomio p se $p(\lambda) = 0$.

Esercizio 1.3. Sia p un polinomio a coefficienti interi e siano $h, k \in \mathbb{Z}$ due interi. Dimostrare che

$$h - k \mid p(h) - p(k)\,.$$ [2]

[Hint]

Esercizio 1.4. Sia $p(x) = x^2 + ax + b$ con $a, b \in \mathbb{R}$ e siano λ_1, λ_2 le sue radici. Trovare il valore delle seguenti espressioni in funzione di a, b:

1. $\lambda_1 + \lambda_2$;
2. $\lambda_1 \cdot \lambda_2$;
3. $\lambda_1^2 + \lambda_2^2$;
4. $\lambda_1^3 + \lambda_2^3$.

[Hint]

[1] Stiamo assumendo che a_n sia diverso da zero.
[2] Il simbolo $\mid$ significa "divide".

1.2 Disuguaglianze

Riarrangiamento

Siano $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$ e $b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n$ dei numeri reali positivi. Sia poi $\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ una *permutazione*, cioè una funzione bigettiva dall'insieme $\{1, 2, \ldots, n\}$ in se stesso. La disuguaglianza di riarrangiamento dice che

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \geq \sum_{i=1}^{n} a_i b_{\sigma(i)} \geq \sum_{i=1}^{n} a_i b_{n-i+1}.$$

Il simbolo di sommatoria $\sum$ indica che si stanno sommando tutti i termini facendo variare l'indice i da 1 a n; per chiarezza, la disuguaglianza di riarrangiamento è quindi:

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n \geq a_1 b_{\sigma(1)} + a_2 b_{\sigma(2)} + \ldots + a_n b_{\sigma(n)} \geq a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \ldots + a_n b_1.$$

La disuguaglianza, informalmente, ci sta dicendo che se abbiamo due liste ordinate di numeri che vogliamo *accoppiare* a due a due senza ripetizioni, per massimizzare la somma dei prodotti delle coppie dobbiamo prenderli in ordine, per minimizzarla dobbiamo prenderli in ordine inverso.

Esercizio 1.5. Provare la disuguaglianza di riarrangiamento nel caso $n = 2$ (cioè dimostrare che se $a_1 \leq a_2$ e $b_1 \leq b_2$ si ha che $a_1 b_1 + a_2 b_2 \geq a_1 b_2 + a_2 b_1$).

Dimostriamo ora la disuguaglianza nel caso generale. Dimostriamo inizialmente la disuguaglianza a sinistra. Supponiamo che la permutazione σ non sia l'identità: allora esistono due indici $i < j$ compresi tra 1 e n tali che $\sigma(i) > \sigma(j)$ (perché?).

Esercizio 1.6. Considerare la funzione $\tau : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ definita come

$$\tau(k) = \begin{cases} \sigma(j) & \text{se } k = i\,, \\ \sigma(i) & \text{se } k = j\,, \\ \sigma(k) & \text{altrimenti}\,. \end{cases}$$

Dimostrare che τ è una permutazione e dimostrare che $\sum_{k=1}^{n} a_k b_{\tau(k)} \geq \sum_{k=1}^{n} a_k b_{\sigma(k)}$. [Hint]

Se τ non è l'identità, si può ripetere quello che è stato fatto nell'esercizio, fino a quando dopo un numero finito di passi (perché finito?) si arriva alla funzione identità, che è il membro sinistro della disuguaglianza che volevamo dimostrare.

Esercizio 1.7. Dimostrare ora la disuguaglianza a destra, cioè che

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_{\sigma(i)} \geq \sum_{i=1}^{n} a_i b_{n-i+1}.$$

[Hint]

Esercizio 1.8. Siano $x, y, z > 0$. Dimostrare che $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \geq 3$. [Hint]

Cauchy-Schwarz

Siano $a_1, \dots, a_n$ e $b_1, \dots, b_n$ dei numeri reali. La disuguaglianza di Cauchy-Schwarz afferma che

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right).$$

Vediamo come si può dimostrare questa disuguaglianza. Sia x un'indeterminata, consideriamo il polinomio $p(x) = \sum_{i=1}^{n}(a_i x - b_i)^2$. Questo polinomio è di secondo grado e $p(x) \geq 0$ per ogni x, quindi avremo $\Delta \leq 0$.

Esercizio 1.9. Calcolare il discriminante Δ di $p(x)$ (ricordarsi che data un'equazione di secondo grado $ax^2 + bx + c = 0$ il discriminante è $\Delta = b^2 - 4ac$) e verificare che si ottiene esattamente la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz.

Esercizio 1.10. (Lemma di Titu) Dimostrare che se $a_1, \dots, a_n > 0$ e $b_1, \dots, b_n > 0$ allora

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{b_i} \geq \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} b_i}.$$

[Hint]

Medie

D'ora in poi supponiamo di avere n numeri reali positivi $a_1, \dots, a_n$. Elenchiamo di seguito varie medie che si possono calcolare per n numeri reali positivi:

- media aritmetica $AM = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$;
- media geometrica $GM = (a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n}$;
- media quadratica $QM = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$;
- media armonica $HM = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)^{-1}$.

Valgono le seguenti disuguaglianze tra le medie: $HM \leq GM \leq AM \leq QM$.

Esercizio 1.11. Dimostrare che $AM \leq QM$, cioè che

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \leq \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i^2}.$$

[Hint]

Esercizio 1.12. Dimostrare che $HM \leq AM$. [Hint]

Esercizio 1.13. (Difficile) L'obiettivo di questo esercizio è dimostrare che $GM \leq AM$.

1. Dimostrare che $GM \leq AM$ vale per $n = 2$.
2. Ora dimostrare che vale per $n = 4$.
3. Dimostrare che $GM \leq AM$ per $n = 3$.
4. (Generalizzazione del punto 2) Dimostrare che se $GM \leq AM$ vale con n allora vale anche con $2n$.
5. (Generalizzazione del punto 3) Dimostrare che se $GM \leq AM$ vale con n allora vale con $n - 1$.
6. Usando tutto questo, concludere che $GM \leq AM$ vale per ogni n.

[Hint]

1.3 Successioni

Progressione aritmetica

Una successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una *progressione aritmetica* di ragione k se $a_{n+1} - a_n$ è costante e pari a k per ogni $n \in \mathbb{N}$, ovvero se $a_{n+1} = a_n + k$ per ogni $n \geq 0$.

Esempio. I numeri naturali sono una progressione aritmetica di ragione 1 e termine iniziale 0.

Dimostriamo per induzione su n che se $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una progressione aritmetica di ragione k vale che $a_n = nk + a_0$.

Passo base: Se $n = 0$ la tesi è ovvia, infatti $a_0 = a_0 + 0 \cdot k$.

Passo induttivo: Supponiamo che $a_n = nk + a_0$ e dimostriamo che $a_{n+1} = (n+1)k + a_0$.

Per definizione sappiamo che $a_{n+1} = a_n + k$ e per ipotesi induttiva vale che $a_n = nk + a_0$, perciò $a_{n+1} = nk + a_0 + k = (n + 1)k + a_0$.

Esercizio 1.14. Dimostrare che la somma dei primi n numeri naturali è $\frac{n(n+1)}{2}$, cioè

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

[Hint]

Esercizio 1.15. Trovare la somma dei primi n termini di una generica progressione aritmetica di ragione k in funzione del primo termine a_0.

Progressione geometrica

Una successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una *progressione geometrica* di fattore α se $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ è costante e pari ad α per ogni $n \in \mathbb{N}$, ovvero se $a_{n+1} = \alpha a_n$ per ogni $n \geq 0$.

Esercizio 1.16. Dimostrare che, se $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una progressione geometrica di fattore α, vale che $a_n = \alpha^n a_0$ per ogni $n \geq 0$. [Hint]

Esercizio 1.17. Trovare la somma primi n termini di una generica progressione geometrica $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di fattore α in funzione del primo termine $a_0 \in \mathbb{R}$ della successione. [Hint]

Successioni per ricorrenza

In generale una successione di $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è detta *per ricorrenza* se esiste una funzione f tale che $a_n = f(a_{n-1}, \dots, a_{n-k}, n)$ per qualche $k \in \mathbb{N}$, cioè a_n è esprimibile come funzione di n e dei k termini precedenti della successione.

Esercizio 1.18. Calcolare i termini a_1, a_3, a_7 per le seguenti successioni per ricorrenza:

1. $a_0 = 3$, $a_{n+1} = 2a_n + 5$ per ogni $n \geq 0$;
2. $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = -1$, $a_{n+1} = a_n a_{n-2} + n$ per ogni $n \geq 2$.

Esercizio 1.19. Consideriamo la successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ data da $a_{n+1} = ha_n + k$ per $n \geq 0$ e a_0 fissato. Trovare la formula esplicita per a_n in funzione di a_0, h, k. [Hint]

Esercizio 1.20. Trovare la formula esplicita per la successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ del punto 1 dell'Esercizio 1.18.

Consideriamo ora le successioni che dipendendono linearmente dai due termini precedenti, cioè $a_{n+2} = ha_{n+1} + ka_n$ con a_0 e a_1 fissati.

Esercizio 1.21. Sia $a_{n+2} = ha_{n+1} + ka_n$ e siano λ_1, λ_2 le due radici del polinomio $x^2 - hx - k = 0$ (detto *polinomio caratteristico* associato alla successione per ricorrenza).

1. Dimostrare che $a_n = \alpha\lambda_1^n + \beta\lambda_2^n$ per α, β tali che $\alpha + \beta = a_0$ e $\alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2 = a_1$.
2. Calcolare esplicitamente α e β in funzione di $\lambda_1, \lambda_2, a_0, a_1$.

Esercizio 1.22. I *numeri di Fibonacci* sono una particolare successione per ricorrenza definita da

$$\begin{cases} F_0 = 0\,,\ F_1 = 1\,, \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad \text{per ogni } n \geq 0\,. \end{cases}$$

1. Trovare la formula esplicita per F_n.
2. Dimostrare che $F_{n-1}F_{n+1} = F_n^2 + (-1)^n$ per ogni $n \geq 1$.

[Hint]

Esercizio 1.23. Sia $p(x) = x^2 + ax + b$ con $a, b \in \mathbb{R}$ e siano λ_1, λ_2 le sue radici, come nell'Esercizio 1.4. Trovare la ricorrenza rispettata dalla successione $a_n = \lambda_1^n + \lambda_2^n$.

1.4 Hints

Esercizio 1.1: Provare a sostituire $x = z = 0$. A questo punto notare che nell'immagine di f ci stanno tutti i numeri reali, quindi f è surgettiva. Perché f è anche iniettiva? Cosa succederebbe se $f(y_1) = f(y_2)$? (Testo)

Esercizio 1.3: Se scriviamo $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$, vale che $p(h) - p(k) = \sum_{i=0}^{n} a_i(h^i - k^i)$. A questo punto concludiamo poiché $h - k$ divide $h^i - k^i$ per ogni $i \geq 0$ (perché?). (Testo)

Esercizio 1.4: Se λ_1 e λ_2 sono le radici di p, allora vale che $p(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2)$. Dunque $a = -(\lambda_1 + \lambda_2)$ e $b = \lambda_1 \lambda_2$. (Testo)

Esercizio 1.6: Per la seconda parte: si possono cancellare tutti i termini in cui k è diverso da i e da j; poi bisogna ricordarsi che $i < j$ e $\sigma(i) > \sigma(j)$. (Testo)

Esercizio 1.7: Applicare la disuguaglianza simistra alle due n-uple $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$ e $-b_n \leq -b_{n-1} \leq \ldots \leq -b_1$. (Testo)

Esercizio 1.8: Supponendo senza perdita di generalità che $x \leq y \leq z$, come sono ordinati $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$ e $\frac{1}{z}$? (Testo)

Esercizio 1.10: Applicare la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz alle seguenti n-uple: $(\frac{a_1}{\sqrt{b_1}}, \ldots, \frac{a_n}{\sqrt{b_n}})$ e $(\sqrt{b_1}, \ldots, \sqrt{b_n})$. (Testo)

Esercizio 1.11: Elevare al quadrato entrambi i membri e ricondursi a usare la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz sulle n-uple $(a_1, \ldots, a_n)$ e $(1, \ldots, 1)$. (Testo)

Esercizio 1.12: Utilizzare Cauchy-Schwarz. (Testo)

Esercizio 1.13: Per il punto 2, chiamare $b_1 = \frac{a_1+a_2}{2}$ e $b_2 = \frac{b_1+b_2}{2}$; allora si ha che $AM(a_1, a_2, a_3, a_4) = AM(b_1, b_2)$. Utilizzare quindi $AM \leq GM$ sui b_i e successivamente sulle coppie (a_1, a_2) e (a_3, a_4).

Per il punto 3, sapendo che vale per $n = 4$, data una terna (a_1, a_2, a_3) chiamare $a_4 = (a_1 a_2 a_3)^{1/3}$ e applicare $AM \leq GM$ alla quaterna (a_1, a_2, a_3, a_4). (Testo)

Esercizio 1.14: Procedere per induzione su n. (Testo)

Esercizio 1.16: Procedere per induzione su n. (Testo)

Esercizio 1.17: Come si fattorizza $x^{n+1} - 1$? (Testo)

Esercizio 1.19: Questa successione è simile ad una progressione geometrica di fattore h, ma "traslata" di k, provare quindi a considerare la successione $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ data da $b_n = a_n + z$ per qualche $z \in \mathbb{R}$ (da determinare opportunamente). (Testo)

Esercizio 1.22: Per il punto 2, procedere per induzione su n. (Testo)

1.5 Problemi

A1. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione non costante. Dimostrare che esistono $x, y \in \mathbb{R}$ tali che $f(x + y) < f(xy)$. [Hint] [Soluzione]

A2. Siano $0 \le a_1, \ldots, a_n \le 1$ numeri reali con $n \ge 1$. Dimostrare che

$$a_1 + \ldots + a_n \le a_1 a_2 \ldots a_n + n - 1\,.$$

[Hint] [Soluzione]

A3. Siano $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la successione per ricorrenza definita da

$$\begin{cases} a_0 = 4\,,\ a_1 = 11\,, \\ a_{n+2} = 7a_{n+1} - 10a_n \quad \text{per ogni } n \ge 0\,. \end{cases}$$

Calcolare la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}\,.$$

[Hint] [Soluzione]

A4. Trovare tutte le $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che $f(xf(x)+f(y)) = f(x)^2+y$. [Hint] [Soluzione]

1.5.1 Hints dei problemi

Problema A1: Ragionare per assurdo, riconducendosi a studiare le funzioni che rispettano $f(x+y) \geq f(xy)$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$. A questo punto fare delle sostituzioni adeguate per cercare di ottenere che $f(x) = f(0)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, che contraddice l'ipotesi. (Testo)

Problema A2: Dimostrare i casi $n = 1, 2$ e poi procedere per induzione. (Testo)

Problema A3: Calcolare la formula esplicita della successione e sfruttare il calcolo di una serie geometrica. (Testo)

Problema A4: Sostituendo $x = 0$, otteniamo che $f(f(y)) = y + f(0)^2$, da cui concludiamo che f è bigettiva (perché?). Sfruttando adeguatamente questo fatto ottenere $f(f(y)) = y$ e successivamente provare a sostituire $x = f(z)$. (Testo)

1.5.2 Soluzioni

Soluzione di A1: Supponiamo per assurdo che esista una funzione f non costante per cui la tesi non sia vera. Allora vale che $f(x+y) \geq f(xy)$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$.

Sostituendo $y = 0$ nell'equazione iniziale, otteniamo che per ogni $x \in \mathbb{R}$ vale

$$f(x) \geq f(0)\,. \tag{1.4}$$

Poniamo dunque $y = -x$, sempre nell'equazione iniziale, e abbiamo

$$f(0) \geq f(-x^2)$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$. Questo, unito all'Equazione (1.4), ci dice facilmente che $f(x) = f(0)$ per ogni x reale negativo. Infatti, al variare di x reale, $-x^2$ assume tutti i possibili valori negativi.

Infine sostituiamo $y = x$ con x reale negativo nell'equazione iniziale e, sfruttando che $2x \leq 0$, otteniamo

$$f(0) = f(2x) \geq f(x^2)\,,$$

che, unito all'Equazione (1.4), dimostra $f(x) = f(0)$ anche per ogni x reale positivo. A questo punto abbiamo dunque ottenuto che $f(x) = f(0)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, che contraddice l'ipotesi di f non costante. Abbiamo dunque ottenuto un assurdo e dimostrato quanto volevamo. (Testo)

Soluzione di A2: Dimostriamo il risultato per induzione su n.

<u>Passo base</u>: Se $n = 1$ la tesi è ovvia, infatti equivale a mostrare che $a_1 \leq a_1$. Se invece $n = 2$, utilizzando che $a_1, a_2 \leq 1$, otteniamo che

$$(1 - a_1)(1 - a_2) \geq 0 \implies a_1 + a_2 \leq a_1 a_2 + 1\,,$$

come cercato.

<u>Passo induttivo</u>: Supponiamo che il risultato sia vero per $k \leq n$ e dimostriamolo per $n + 1$. Utilizzando l'ipotesi induttiva abbiamo che

$$a_1 + \ldots + a_n + a_{n+1} \leq a_1 \ldots a_n + n - 1 + a_{n+1}\,.$$

Ora riutilizziamo l'ipotesi induttiva nel caso di 2 termini (per questo abbiamo fatto il passo base anche per $n = 2$) applicandolo a $a_1 \ldots a_n$ e a_{n+1} e otteniamo

$$(a_1 \ldots a_n + a_{n+1}) + n - 1 \leq (a_1 \ldots a_{n+1} + 1) + n - 1 = a_1 \ldots a_{n+1} + n\,,$$

che dimostra proprio quanto voluto.

(Testo)

Soluzione di A3: Sfruttando i risultati di teoria sulle successioni, troviamo la formula esplicita della successione. Il polinomio caratteristico associato è $x^2 - 7x + 10$, che ha radici 2 e 5. Dunque abbiamo che

$$a_n = \alpha 2^n + \beta 5^n .$$

Imponendo le condizioni iniziali $a_0 = 4$ e $a_1 = 11$, ricaviamo che $\alpha = 3$ e $\beta = 1$ e perciò

$$a_n = 3 \cdot 2^n + 5^n .$$

Abbiamo dunque che

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(3 \cdot \frac{2^n}{10^n} + \frac{5^n}{10^n} \right) = 3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{5^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 3 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{5}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{23}{4} ,$$

dove abbiamo utilizzato la formula per il calcolo della serie geometrica. (Testo)

Soluzione di A4: Poniamo $x = 0$ nell'equazione iniziale e otteniamo

$$f(f(y)) = y + a^2 ,$$

dove abbiamo posto $f(0) = a$. Da questo concludiamo che f è bigettiva; infatti $y + a^2$ è bigettiva e in generale vale che se $g(h(x))$ è bigettiva con $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, allora g è suriettiva e h è iniettiva (perché?).

Dunque, per suriettività, sicuramente esiste $b \in \mathbb{R}$ tale che $f(b) = 0$. Sostituendo allora $x = b$ nell'equazione iniziale, abbiamo

$$f(f(y)) = y .$$

Ponendo ora $x = f(z)$ nell'equazione iniziale, concludiamo che

$$z^2 + y = f(f(z))^2 + y = f(zf(z) + f(y)) = f(z)^2 + y ,$$

dove abbiamo riutilizzato l'equazione iniziale per l'ultima uguaglianza. Da quest'ultima equazione, otteniamo che $f(x)^2 = x^2$, cioè $f(x) = \pm x$, per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Verifichiamo subito che $f(x) = x$ ed $f(x) = -x$ rispettano l'equazione iniziale, infatti

- se $f(x) = x$, vale $f(xf(x) + f(y)) = f(x^2 + y) = x^2 + y = f(x)^2 + y$;
- se $f(x) = -x$, vale invece $f(xf(x) + f(y)) = f(-x^2 - y) = x^2 + y = f(x)^2 + y$.

Ci manca dunque da escludere il cosiddetto *mistone*, cioè che per alcuni $x \in \mathbb{R}$ valga $f(x) = x$ e per gli altri $f(x) = -x$. Supponiamo dunque che esistano $x, y \in \mathbb{R}$ non nulli per cui $f(x) = x$ e $f(y) = -y$. Di conseguenza vale che $f(xf(x) + y) = f(-x^2 + y)$ e $f(x)^2 + y = x^2 + y$; però $f(-x^2 + y) = \pm(-x^2 + y)$, che non può essere uguale a $x^2 + y$, poiché x e y sono diversi da 0.

Dunque abbiamo escluso anche quest'ultima possibilità e otteniamo che le uniche funzioni f che rispettano l'equazione del testo sono $f(x) = x$ e $f(x) = -x$. (Testo)

Allenamenti EGMO 2018 – Combinatoria

2.1 Conteggi

Iniziamo con qualche esercizietto di base per riscaldarci.

Esercizio 2.1. Quante sono le possibili password composte da 4 cifre fra 0 e 9? [Hint]

Esercizio 2.2. Quante sono le possibili password composte da 4 cifre fra 0 e 9 *distinte*? [Hint]

Esercizio 2.3. Dati due insiemi A, B di cardinalità a, b rispettivamente, trovare il numero di funzioni e il numero di funzioni *iniettive* da A a B. [Hint]

Esercizio 2.4. Dimostrare che il numero di permutazioni di n elementi distinti è $n!$, dove ricordiamo che

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1\,.$$ [3]

Anagrammi

Esercizio 2.5. Quanti sono gli anagrammi della parola “ALICE”? E della parola “ANNA”?

Esercizio 2.6. Supponiamo di avere n palline, di cui n_1 del colore 1, n_2 del colore 2 e così via, fino ad n_k del colore k. Notare in particolare che $n = n_1 + \ldots + n_k$. Dimostrare che il numero di modi di disporre le palline in fila, considerando indistinguibili palline dello stesso colore, risulta

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}\,.$$

[Hint]

Coefficienti binomiali

Esercizio 2.7. In quanti modi possono essere scelti due rappresentanti in una classe di n studenti? [Hint]

L’esercizio precedente si può generalizzare al seguente problema: in quanti modi posso scegliere k elementi da un insieme di n elementi, senza curarsi dell’ordine in cui vengono presi?

[3] Ricordiamo inoltre che per definizione $0! = 1$.

La risposta è il *coefficiente binomiale* di n su k, cioè

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \, .$$

Supponiamo di decidere i k elementi da prendere in questo modo: mettiamo in fila gli n elementi in qualche ordine e scegliamo i primi k della fila. Il numero di modi di mettere in fila gli elementi è $n!$ (cioè il numero di permutazioni di n elementi); ma quand'è che due permutazioni ci danno la stessa scelta di k elementi? Quando si ottengono una dall'altra permutando i primi k elementi e gli ultimi $n-k$ elementi fra loro!

Dunque nel modo appena descritto stiamo contando ogni scelta di k elementi $k! \cdot (n-k)!$ volte, che corrispondono ai modi di permutare i primi k e gli ultimi $n-k$ elementi. Dunque il risultato è $\frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$, che è proprio quanto volevamo.

Esercizio 2.8. In quanti modi è possibile scegliere la squadra italiana che andrà alle EGMO (composta da 4 ragazze) tra le 24 partecipanti agli allenamenti EGMO?

Esercizio 2.9. Calcolare il numero totale di diagonali di un poligono regolare di n lati.

Esercizio 2.10. Una cavalletta si trova nella casella in basso a sinistra di una tabella $n \times m$ e vuole raggiungerne la casella in alto a destra. Per ottimizzare il percorso, la cavalletta fa solo salti verso l'alto o verso destra e un suo salto la fa sempre muovere dalla casella in cui si trova ad una adiacente.

Quanti sono i possibili percorsi che può effettuare la cavalletta per arrivare a destinazione? [Hint]

Esercizio 2.11. In quanti modi si può scrivere il numero n come somma di k interi positivi, considerando distinti due modi che differiscono anche solo per l'ordine degli addendi? Per esempio nel caso $n = 4$ e $k = 2$, le scritture $1 + 3$ e $3 + 1$ sono considerate distinte. [Hint]

Esercizio 2.12. Dimostrare le seguenti identità di binomiali:

1. $$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \, ;$$

2. $$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} \, ;$$

3. $$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \, .$$

2.2 Double counting

Il double counting è una tecnica molto utile in combinatoria. Consiste nel contare una quantità desiderata in due modi diversi, e questo spesso permette di ottenere informazioni nuove. Un classico esempio è dato dal conteggio della somma dei numeri da 1 ad n, che vediamo nell'esercizio seguente.

Esercizio 2.13. Trovare una formula chiusa che calcoli la somma dei numeri da 1 ad n.

Consideriamo una tabella con 2 righe ed n colonne. Nella prima riga scriviamo i numeri da 1 ad n in ordine crescente, mentre nella seconda riga scriviamo i numeri in ordine decrescente:

1	2	...	...	n
n	$n-1$	...	...	1

Ora chiamiamo S la somma di tutti i numeri contenuti nella tabella e la calcoliamo in due modi diversi.

Il primo modo è sommare per righe. Abbiamo due addendi: la somma della prima riga e la somma della seconda riga; è evidente che le due somme sono uguali, quindi otteniamo

$$S = \sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} i = 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} i\,.$$

Il secondo modo è sommare per colonne. Osserviamo che ogni colonna ha somma $n+1$ (è questa la ragione per cui li abbiamo scritti in ordine crescente sopra e decrescente sotto!). Quindi otteniamo che

$$S = (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) = n \cdot (n+1)\ .$$

Uguagliando le due espressioni si ottiene

$$2 \sum_{i=1}^{n} i = n\,(n+1)\ ,$$

da cui

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n\,(n+1)}{2}\,,$$

che è la formula che volevamo ottenere.

Esercizio 2.14. Dimostrare che la somma dei numeri dispari fino a $2n-1$ è uguale ad n^2. [Hint]

Esercizio 2.15. Sia n un numero naturale non nullo. Dimostrare che

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} = 2^n\,,$$

poiché entrambe le espressioni contano il numero di modi in cui si può pitturare un insieme di n persone con due colori (ogni persona va pitturata o in blu o in rosso). [Hint]

Esercizio 2.16. Determinare il massimo valore di n tale che esiste una sequenza di n numeri reali che che rispetta le seguenti condizioni:

1. presi comunque 7 termini consecutivi la loro somma deve risultare strettamente negativa;
2. presi comunque 11 termini consecutivi la loro somma deve risultare strettamente positiva.

[Hint]

2.3 Principio dei cassetti, o pigeonhole

Il principio dei cassetti è estremamente semplice, eppure in certi casi permette di arrivare a conclusioni molto interessanti. L'idea di base, da cui il nome, è la seguente: supponiamo di avere una cassettiera con 8 cassetti. Sappiamo che in totale ci sono 9 camicie nella cassettiera. Allora si può dedurre che c'è almeno un cassetto che contiene almeno 2 camicie. Infatti se nessun cassetto avesse almeno 2 camicie, allora le camicie in totale sarebbero al massimo 8.

L'idea di base è chiara, e la generalizzazione non è molto più difficile.

Teorema 2.1 (Principio dei cassetti, o pigeonhole). *Se abbiamo una cassettiera con n cassetti che in totale contiene k camicie, allora esiste almeno un cassetto che contiene almeno $\left\lceil \frac{k}{n} \right\rceil$ [4] camicie.*

È importante osservare bene anche cosa il teorema non dice: non possiamo dire che esistono almeno *due* cassetti tali che ognuno contenga almeno un certo numero di camicie (perché? Provate a trovare un controesempio).

Esercizio 2.17. Dimostrare il teorema.

Esercizio 2.18. Nelle stesse ipotesi del teorema, si può dedurre che esiste almeno un cassetto che contiene *al più* m camicie. Trovare il minimo valore di m.

Esercizio 2.19. Dimostrare che a Firenze esistono due persone che hanno esattamente lo stesso numero di capelli in testa, sapendo che la popolazione di Firenze è di 380 000 abitanti e il numero di capelli massimo sulla testa di una persona è 200 000.

Esercizio 2.20. Veronica si reca a mezzanotte in cucina per fare uno spuntino, ma non volendo svegliare i genitori non può accendere la luce. Apre il cassetto delle merendine. Non riesce a vederle, ma sa che ci sono 13 cornetti alla crema, 15 alla marmellata e 23 al cioccolato.

1. Quante merendine deve prendere al minimo per essere sicura di averne prese almeno 3 dello stesso gusto?

[4] Dato un numero reale x, il simbolo $\lceil x \rceil$ indica la parte intera superiore di x.

2. Quante ne deve prendere invece per essere sicura di averne almeno una per gusto?

[Hint]

Esercizio 2.21. Giada ha una lavagna su cui ha scritto 27 numeri distinti da 1 a 100, tutti dispari. Dimostrare che esiste una coppia di numeri la cui somma è 102. [Hint]

Esercizio 2.22. Ad aprile (che dura 30 giorni) Alice mangia almeno una mela al giorno. Sappiamo che in in tutto il mese mangia 45 mele. Dimostrare che esiste almeno una sequenza di giorni consecutivi in cui ha mangiato esattamente 14 mele. [Hint]

Esercizio 2.23. Consideriamo un numero n e prendiamo dei numeri naturali $a_1, \ldots, a_n$. Dimostrare che è possibile scegliere un sottinsieme (non vuoto) di $\{a_1, \ldots, a_n\}$ tale che la somma dei numeri scelti sia divisibile per n. [Hint]

2.4 Invarianti

In molti problemi di combinatoria è utile considerare quantità *invarianti* per le mosse consentite dal problema.

Esercizio 2.24. Francesca si sta annoiando e decide quindi di fare il seguente gioco. Sceglie un numero intero positivo dispari n e scrive alla lavagna i numeri $1, 2, \ldots, 2n$. Poi, ad ogni mossa, sceglie due numeri a, b scritti alla lavagna, li cancella e scrive al loro posto il numero $|a - b|$. Dimostrare che il numero scritto alla lavagna alla fine sarà dispari.

Questo è il classico esercizio in cui la prima idea che dovrebbe venire in mente è cercare un invariante. La tesi chiede di dimostrare che il numero alla fine è dispari; quindi cerchiamo una quantità che all'ultima mossa è la parità del numero, all'inizio è dispari e si conserva con le mosse consentite.

Una quantità che rispetta queste proprietà risulta essere la parità della somma dei numeri scritti alla lavagna (in altre parole la congruenza della somma modulo 2). Infatti all'inizio la somma è $1 + 2 + \ldots + 2n = n(2n + 1)$, che è dispari perché n e $2n + 1$ sono dispari. La quantità si conserva ad ogni mossa, poiché la somma diminuisce di $2 \min(a, b)$. Inoltre alla fine l'invariante mi dà proprio la parità del numero scritto alla lavagna, che dunque è dispari poiché all'inizio il nostro inviarante è dispari.

Esercizio 2.25. Morena ha a gettoni rossi, b gettoni blu e c gettoni verdi. Al negozio di gettoni è possibile consegnare due gettoni di colori diversi e ricevere in cambio un gettone del terzo colore.

Dopo vari scambi al negozio di gettoni a Morena rimane solo un gettone. Dimostrare che il colore di tale gettone non dipende da come Morena ha scelto di scambiarli.

In questo caso il problema è affrontabile con un invariante, ma non in senso classico come nell'esercizio precedente... Proviamo a considerare la parità di a, b e c. Ad ogni mossa la parità di tutti e tre i numeri cambia. Questo dunque non è propriamente un invariante, ma ci dà comunque informazioni interessanti! Infatti, poiché ad ogni mossa la somma del numero di gettoni diminuisce di 1, sappiamo dopo quante mosse (se succede) Morena si ritrova con un solo gettone e di conseguenza sappiamo la parità del numero di gettoni di ciascun tipo alla fine (che dovranno essere pari, pari, dispari in qualche ordine).

Cercate di sistemare i dettagli della dimostrazione per esercizio.

Esercizio 2.26. Clara ha una scacchiera composta da 12 righe e 20 colonne, con caselle di lato unitaro. Inoltre ha una pedina posizionata nella casella in alto a sinistra e Clara ha scelto un numero intero positivo r. Clara ha deciso che può spostare la sua pedina da una casella in un'altra solo se la distanza fra i centri delle caselle è $\sqrt{r}$. Il suo obiettivo è far arrivare la pedina nella casella in alto a destra.

Dimostrare che Clara non potrà raggiungere il suo obiettivo se r è divisibile per 2 o per 3. [Hint]

2.5 Grafi

Definizione 2.2. Un *grafo* è una coppia (V, E), dove V è un insieme finito $\{v_1, ..., v_n\}$ (i cui elementi vengono detti *vertici* o *nodi*) ed E è un sottoinsieme delle coppie (non ordinate) ottenibili dagli elementi di V, cioè $E \subseteq \{\{v_i, v_j\} \ : \ v_i, v_j \in V \text{ e } i \neq j\}$. I suoi elementi sono detti *archi* o *lati* ed esprimono il fatto che alcuni elementi di V sono messi in relazione.

Informalmente un grafo è un insieme di punti (i *vertici* o *nodi*) di cui alcuni di questi sono collegati tra loro (tramite i *lati* o *archi*). Per chiarire le idee, la seguente figura rappresenta un grafo.

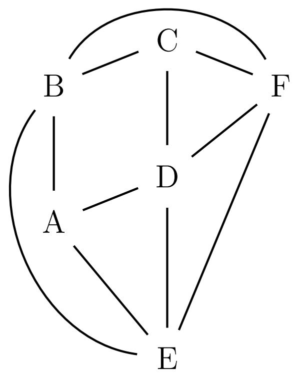


Figura 1: Esempio di grafo.

Introduciamo della terminologia ulteriore sui grafi:

- Il *grado* di un vertice v_k, che si indica con $\deg(v_k)$ è il numero di elementi di E in cui compare v_k, cioè il numero di archi uscenti da v_k.

- Un *cammino* è una successione di vertici $w_1, ..., w_l$ tali che w_i è collegato a w_{i+1} per ogni $i = 1, \dots, l-1$. Ad esempio in Figura 1 la sequenza di vertici $A-B-C-B-C$ è un cammino. Il cammino è detto *semplice* se non contiene due volte lo stesso nodo.

- Un *ciclo* è un cammino semplice $w_1, \dots, w_l$ tale che inoltre w_1 è collegato a w_l ed $l \geq 3$.

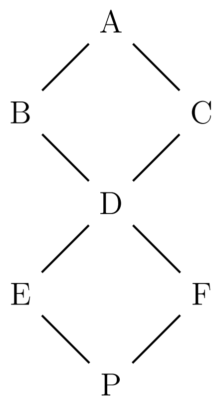
- Si dice che un grafo è *connesso* se per ogni coppia di vertici del grafo esiste un cammino che li collega.
- Un *albero* è un grafo connesso che non contiene cicli.
- Infine un grafo si dice *completo* se ogni coppia di vertici è collegata da un arco.

Esercizio 2.27. Nelle notazioni precedenti, dimostrare che

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E| \,.$$

Esercizio 2.28. Dimostrare che un grafo connesso con n vertici è un albero se e solo se ha $n-1$ archi.

Esercizio 2.29. Sia dato il seguente grafo G: unione di due quadrati attaccati per un



vertice dove al posto di ogni vertice c'è una lampadina che può essere accesa o spenta. Una pulce si trova sulla lampadina nel vertice P e vuole dormire. Dunque vuole spegnere tutte le lampadine seguendo gli archi del grafo per poi tornare a riposarsi in P. Tuttavia ogni volta che arriva su una lampadina ne cambia lo stato. Se inizialmente l'unica lampadina accesa è quella nel vertice A, la pulce riuscirà a spegnere tutte le lampadine tornando in P e fare così sogni felici? [Hint]

Cammini euleriani

Definizione 2.3. Si dice che un grafo (V, E) ammette un *cammino euleriano* se esiste un cammino che percorre tutti gli archi del grafo una ed una sola volta.

Intuitivamente tali grafi sono quelli che si possono disegnare senza mai staccare la matita dal foglio.

Esercizio 2.30. Dimostrare che un grafo ammette un cammino euleriano se e solo se è connesso e vale una delle seguenti due condizioni:

- i suoi vertici hanno tutti grado pari;
- contiene esattamente due vertici di grado dispari.

[Hint]

Grafi bipartiti

Definizione 2.4. Un grafo (V, E) si dice bipartito se esistono due sottoinsiemi di V chiamati V_1 e V_2 tali che:

1. $V_1 \cup V_2 = V$
2. $V_1 \cap V_2 = \varnothing$
3. non vi sono archi che collegano vertici appartenenti allo stesso sottoinsieme, ovvero tutti gli elementi di E collegano un elemento di V_1 a uno di V_2.

Esercizio 2.31. Dimostrare che se un grafo è connesso e i suoi cammini chiusi (cioè con vertice finale che coincide con quello iniziale) hanno tutti lunghezza pari, allora è bipartito. [Hint]

2.6 Colorazioni

L'esempio più famoso di problema di colorazione è il seguente: data una scacchiera 8×8 a cui siano state tolte due caselle d'angolo opposte (come nella Figura 2) è possibile tassellarla con piastrelle 1×2? Le piastrelle devono ricoprire interamente la scacchiera, non possono sovrapporsi tra di loro, devono avere i lati paralleli ai lati della scacchiera e non possono "uscire" dalla scacchiera. La risposta è che non è possibile: infatti ogni piastrella 1×2 copre esattamente una casella nera e una rosa della scacchiera, ma la scacchiera "mutilata" ha 30 caselle rosa e 32 caselle nere.

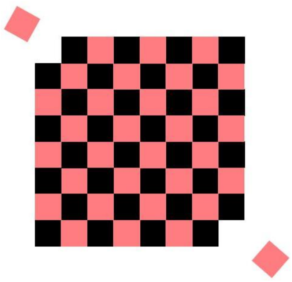


Figura 2: Scacchiera senza due caselle d'angolo opposte.

Di seguito proponiamo altri esercizi che si possono risolvere con questa idea.

Esercizio 2.32. Considerare i 5 possibili tetramini (gli oggetti che si possono formare unendo 4 caselle, in Figura 3). È possibile formare un rettangolo unendoli tutti e 5? [Hint]

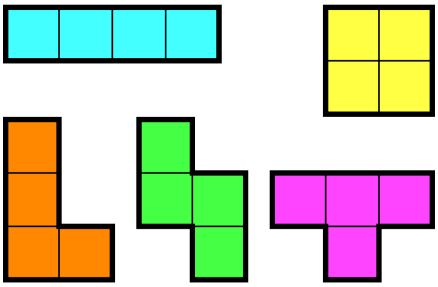


Figura 3: I 5 tetramini.

Esercizio 2.33. È possibile ricoprire una tabella 10×10 con 25 tetramini a T (come quello viola nella Figura 3)? [Hint]

A volte due colori non bastano...

Esercizio 2.34. È possibile ricoprire una tabella 10×10 con 25 tetramini dritti (come quello azzurro della Figura 3)? [Hint]

Altre volte invece servono colorazioni più fantasiose!

Esercizio 2.35. In una tabella 5×5 c'è un -1 in una casella e un $+1$ in ciascuna delle altre. Una mossa consiste nel cambiare il segno alle caselle di un sottoquadrato $n \times n$ con $n \geq 2$. Per quali posizioni del -1 iniziale è possibile, tramite mosse legali, ottenere $+1$ in tutte le caselle? [Hint]

2.7 Hints

Esercizio 2.1: In quanti modi posso scegliere la prima cifra? E la seconda? (Testo)

Esercizio 2.2: Una volta scelta la prima cifra, in quanti modi posso scegliere la seconda? (Testo)

Esercizio 2.3: Nel primo caso, quanti possibili elementi di B possono essere associati ad ogni elemento di A? E nel secondo caso? Supponiamo di scegliere un ordine in A in cui assegnare i valori della funzione. In quanti modi possiamo scegliere il valore della funzione nel primo elemento? Nel secondo? E nell'n-esimo? (Testo)

Esercizio 2.6: In un primo momento supponiamo di scrivere un numero da 1 a n su ogni pallina, in modo che siano tutte distinte. Allora il numero di modi di disporre in file le palline è $n!$. A questo punto ritorniamo al problema iniziale, dimenticandoci nuovamente dei numeri scritti sulle palline. Quante volte ho contato ogni disposizione? (Testo)

Esercizio 2.7: Se scegliamo i 2 rappresentanti in ordine, possiamo scegliere il primo in n modi e il secondo in $n-1$. In questo modo però abbiamo contanto tutte le scelte 2 volte (perché?). (Testo)

Esercizio 2.10: Ogni percorso della cavalletta può essere rappresentato da un'unica sequenza di $n-1$ frecce $\uparrow$ e $m-1$ frecce $\rightarrow$ (perché?). A questo punto il problema si riconduce a calcolare tutte le possibili sequenze di questo tipo, che equivale a calcolare i modi di scegliere le $n-1$ posizioni sulle $n+m-2$ possibili in cui mettere una freccia $\uparrow$. (Testo)

Esercizio 2.11: Provare a pensare il problema come i modi di "dividere" in k gruppi una sequenza di n palline disposte in fila. Un modo per scegliere la divisione è per esempio scegliere le k palline che saranno alla fine di ogni gruppo. (Testo)

Esercizio 2.14: Disegnare una griglia $n \times n$ e contarne le celle in modo furbo. (Testo)

Esercizio 2.15: Una colorazione in rosso e blu di n persone si può effettuare decidendo di che colore pitturare ogni persona oppure decidendo quali persone colorare di rosso... (Testo)

Esercizio 2.16: Scrivere una sequenza di numeri incogniti e cercare di capire di che segno devono essere certe somme. Ad esempio se

$$x_1 + \cdots + x_7 < 0\,,$$

$$x_1 + \cdots + x_{11} > 0\,,$$

cosa posso dire di $x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11}$? Ragionare così fino ad arrivare ad un assurdo (cioè che qualche somma deve essere sia maggiore di zero che minore di zero), capendo da quale m in poi l'assurdo funziona. Infine costruire una sequenza di $m-1$ numeri reali che rispetti le ipotesi, mostrando così l'ottimalità della soluzione. (Testo)

Esercizio 2.20: Le due domande sembrano simili, ma in realtà sono molto diverse. Una sola delle due è riconducibile al principio dei cassetti. In particolare, in un caso la risposta dipende dai numeri 13, 15 e 23, nell'altro caso invece no. (Testo)

Esercizio 2.21: Accoppiamo i numeri dispari da 1 a 100 che hanno somma 102, cioè $(3, 99), (5, 97), \ldots, (49, 53)$. I dispari tra 1 e 100 che non stanno in nessuna di queste coppie sono 1 e 51. Se supponiamo per assurdo che nessuna coppia di numeri scelti abbia somma 102, quanti numeri abbiamo preso al più? (Testo)

Esercizio 2.22: Chiamare $a_1, \ldots, a_{30}$ il numero di mele mangiate ogni giorno e studiare i valori di $a_1 + \ldots + a_k$ al variare di k. (Testo)

Esercizio 2.23: Considerare le possibili classi di congruenza modulo n, e poi lasciarsi ispirare dall'esercizio precedente. (Testo)

Esercizio 2.26: Clara può spostare la pedina dalla casella (a_1, b_1) alla casella (a_2, b_2) se $(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2 = r$. Se r è divisibile per 2, allora $a_1 - a_2$ e $b_1 - b_2$ devono essere tutti e due pari o tutti e due dispari. Dunque la parità di $a_i + b_i$ è costante (perché?). All'inizio però questo numero è pari $(1 + 1)$ e alla fine è dispari $(1 + 20)$.

Se invece r è divisibile per 3, allora $a_1 - a_2$ e $b_1 - b_2$ devono essere entrambi divisibili per 3 (perché?). Di conseguenza $a_i + b_i$ è costante modulo 3, ma all'inizio è 2 e alla fine è 0. (Testo)

Esercizio 2.29: Notare che tutti i cammini chiusi hanno lunghezza pari e ragionare sulla parità delle lampadine cambiate ad ogni ciclo. (Testo)

Esercizio 2.30: Condizione necessaria: considerare un cammino euleriano e dedurre la connessione e la condizione sul grado (se un cammino giunge ad un vertice attraverso un arco esce da esso per un arco diverso dal precedente, a meno che non sia il vertice finale del cammino).

Condizione sufficiente: a meno di creare un arco fittizio fra i due vertici di grado dispari, si può supporre che il grado di tutti i vertici sia pari. Dunque considerare il cammino C di lunghezza massima che passa per archi tutti distinti. Ora supporre per assurdo che esista un lato non attraversato dal cammino C e dimostrare che allora è possibile allungare il cammino.

Il punto fondamente è che se il grado di ogni vertice è pari e sto percorrendo un cammino che non ripassa mai da un arco già attraversato, quando arrivo in un vertice avrò sempre modo di uscirne, a meno di non essere ritornata al vertice iniziale. (Testo)

Esercizio 2.31: Fissare un vertice v e definire $d(w)$ come la minima lunghezza di un cammino da v a w, per ogni vertice $w \in V$. A questo punto definire V_1 come l'insieme dei vertici per cui $d(w)$ è pari e V_2 come l'insieme dei vertici per cui $d(w)$ è dispari. (Testo)

Esercizio 2.32: Quali possono essere le dimensioni di base e altezza del rettangolo? Se si colora il rettangolo a scacchiera, quante sono le caselle bianche e quelle nere? Quante caselle bianche e quante caselle nere copre ciascun tetramino? (Testo)

Esercizio 2.33: No, non è possibile. Colorare la tabella a scacchiera e ricordarsi che 25 è un numero dispari. (Testo)

Esercizio 2.34: Colorare la tabella con 4 colori A, B, C, D in modo che ogni tetramino debba necessariamente coprire un A, un B, un C e un D. Poi contare quante caselle ci sono per ciascun colore. (Testo)

Esercizio 2.35: Se il -1 sta nella casella centrale, è possibile: come si fa? Altrimenti non è possibile. Coloriamo infatti la colonna centrale di nero e lasciamo le altre 20 caselle bianche. Ogni volta che si cambia il segno di un quadrato, cosa succede alla parità delle caselle bianche che contengono -1? In questo modo si conclude che il -1 deve stare nella colonna nera; ma il ragionamento di ripete scambiando righe e colonne. (Testo)

2.8 Problemi

C1. Durante un ballo ogni donna balla con almeno un uomo e nessun uomo balla con tutte le donne.

Dimostrare che esistono due uomini U ed U' e due donne D e D' tali che U balla con D, U' balla con D', ma U non balla con D' e U' non balla con D. [Hint] [Soluzione]

C2. Alle EGMO quest'anno ci sono $3n!$ concorrenti con $n \geq 1$. Ogni coppia di ragazze parla esattamente di uno fra n hobby, alternativi alla matematica, di cui sono appassionate.

Dimostrare che ci sono 3 ragazze che parlano fra loro dello stesso hobby. [Hint] [Soluzione]

C3. Dato un intero positivo n, definiamo $P(n)$ come il numero di permutazioni $\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ tali che $k\sigma(k)$ è un quadrato perfetto per ogni $k = 1, \ldots, n$.

Trovare il minimo n tale che $P(n)$ è multiplo di 2017. [Hint] [Soluzione]

C4. Dimostrare che la somma degli elementi minimi di tutti i possibili sottoinsiemi di k elementi dell'insieme $\{1, \ldots, n\}$ è $\binom{n+1}{k+1}$. [Hint] [Soluzione]

2.8.1 Hints dei problemi

Problema C1: Iniziare considerando uno degli uomini che ha ballato con il maggior numero di donne. (Testo)

Problema C2: Procedere per induzione su n. (Testo)

Problema C3: Come deve essere fatto $\sigma(k)$ in modo che $k\sigma(k)$ sia un quadrato? Provare ad iniziare studiando il caso in cui k è quadrato. (Testo)

Problema C4: Osservare che la quantità cercata è uguale alla somma del numero di sottoinsiemi di k elementi con elemento minimo maggiore o uguale ad i, per i da 1 a $n - k + 1$. (Testo)

2.8.2 Soluzioni

Soluzione di C1: Sia U l'uomo che ha ballato con il maggior numero di donne (in caso di parità fra più uomini, ne scelgo uno a caso) e sia D' una donna che non ha ballato con U e che esiste per ipotesi. Consideriamo ora un uomo U' che ha ballato con D' e che esiste anch'esso per ipotesi.

Esiste sicuramente una donna D, fra quelle che hanno ballato con U, che non ha ballato con U', perché altrimenti U' avrebbe ballato almeno con una donna in più di U e questo contraddirebbe l'ipotesi di massimalità su U.

Dunque U, U', D e D' scelti come descritto, rispettano le richieste che volevamo. (Testo)

Soluzione di C2: Dimostriamo il risultato per induzione su n.

Passo base: Per $n = 1$ ci sono 3 ragazze e 1 hobby, quindi la tesi è ovvia.

Passo induttivo: Supponiamo che il risultato sia vero per n e dimostriamolo per $n+1$. Prendiamo in considerazione una concorrente. Per il principio dei cassetti esiste un hobby del quale questa ragazza parla con almeno $\left\lceil \frac{3(n+1)!-1}{n+1} \right\rceil = 3n!$ altre concorrenti.

Se fra queste concorrenti ce ne sono due che parlano tra loro dell'hobby appena considerato, abbiamo trovato quello che cerchiamo. Altrimenti queste $3n!$ concorrenti parlano di al più n hobby fra loro e dunque per ipotesi induttiva troviamo 3 ragazze che parlano dello stesso hobby, come voluto.

(Testo)

Soluzione di C3: Ogni numero $k = 1, \dots, n$ può essere espresso in un unico modo come $k = s \cdot m^2$ con s, m interi positivi ed s *libero da quadrati*, cioè tale che non esiste nessun primo p tale che p^2 divide s.

Affinché $k\sigma(k)$ sia un quadrato perfetto, se k si decompone come $s \cdot m^2$, anche $\sigma(k)$ deve essere della forma $s \cdot l^2$ per qualche intero positivo l.

Dunque una permutazione buona permuterà gli elementi dell'insieme $A_s = \{s \cdot m^2 \ : \ 1 \leq s \cdot m^2 \leq n\}$ per ogni s intero positivo libero da quadrati, con $1 \leq s \leq n$. Di conseguenza abbiamo che

$$P(n) = \prod_{\substack{s \text{ libero da quadrati} \\ 1 \leq s \leq n}} |A_s|! \,.$$

Essendo 2017 primo, abbiamo che $P(n)$ è multiplo di 2017 se e solo se esiste s libero da quadrati tale che A_s ha cardinalità maggiore o uguale a 2017. È però facile notare che l'insieme A_s di cardinalità maggiore è quello relativo ad $s = 1$, cioè l'insieme dei quadrati perfetti minori o uguali a n.

Di conseguenza 2017 divide $P(n)$ se e solo se $A_1 = \{m^2 \ : \ 1 \leq m^2 \leq n\}$ ha cardinalità maggiore o uguale a 2017, cioè se e solo se $n \geq 2017^2$. Perciò il minimo n cercato è 2017^2. (Testo)

Soluzione di C4: La somma degli elementi minimi di tutti i possibili sottoinsiemi di k elementi in $\{1, \dots, n\}$ è la somma per i da 1 a $n-k+1$ di i per il numero di sottoinsiemi di cardinalità k con elemento minimo uguale ad i. Questo valore risulta essere uguale alla somma per i da 1 a $n-k+1$ del numero di sottoinsiemi di cardinalità k con elemento minimo *maggiore o uguale* ad i (perché?).

Dunque il valore cercato è

$$\sum_{i=1}^{n-k+1} \binom{n-i+1}{k}.$$

Dimostriamo per induzione su $n \geq k$ che questa sommatoria è uguale a $\binom{n+1}{k+1}$.

Passo base: Per $n = k$ la sommatoria è composta da un unico addendo uguale a $\binom{k}{k} = 1 = \binom{k+1}{k+1}$.

Passo induttivo: Supponiamo che la tesi sia vera per n e dimostriamola per $n+1$. Abbiamo che

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{(n+1)-k+1} \binom{(n+1)-i+1}{k} &= \binom{n+1}{k} + \sum_{i=2}^{(n+1)-k+1} \binom{(n+1)-i+1}{k} = \\ &= \binom{n+1}{k} + \sum_{j=1}^{n-k+1} \binom{n-j+1}{k} = \\ &= \binom{n+1}{k} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1},\end{aligned}$$

dove per l'ultima uguaglianza abbiamo utilizzato il punto 2 dell'Esercizio 2.12.

(Testo)

Allenamenti EGMO 2018 – Geometria

3.1 Definizioni e preliminari

Nel corso di questa sessione di geometria, daremo per scontate le nozioni di angolo alla circonferenza, angolo supplementare, disuguaglianza triangolare, i teoremi di Euclide e di Talete, i criteri di congruenza e di similitudine. Iniziamo dunque con delle definizioni e dei risultati preliminari, soprattutto relativi alla geometria del triangolo.

Dato un triangolo ABC chiameremo $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$ le lunghezze dei lati e $\alpha = \angle BAC$, $\beta = \angle CBA$, $\gamma = \angle ACB$ le ampiezze degli angoli di tale triangolo.

Definizione 3.1 (Circonferenze notevoli)**.** Dato un triangolo ABC definiamo

- *circonferenza circoscritta* ad ABC la circonferenza passante per i vertici A, B, C del triangolo;
- *circonferenza inscritta* ad ABC la circonferenza interna ad ABC e tangente ai tre lati del triangolo.

Definizione 3.2 (Rette notevoli)**.** Dato un triangolo ABC definiamo

- l'*altezza* uscente da A come la retta passante per A e perpendicolare al lato BC, opposto ad A (e definiamo il *piede* dell'altezza relativa ad A come il punto di intersezione di questa retta con il lato BC);
- la *bisettrice* (interna) uscente da A come la retta passante per A che divide in due parti uguali l'angolo α;
- la *bisettrice esterna* uscente da A come la retta passante per A che divide in due parti uguali l'angolo complementare ad α in A;
- la *mediana* uscente da A come la retta passante per A e per il punto medio del segmento BC.

Analogamente possiamo dare le stesse definizioni relative ai vertici B e C.

Definizione 3.3 (Punti notevoli)**.** Dato un triangolo ABC definiamo

- l'*ortocentro* di ABC, solitamente indicato con H, come l'intersezione delle altezze del triangolo;
- l'*incentro* di ABC, solitamente indicato con I, come l'intersezione delle bisettrici del triangolo o, analogamente, come il centro della circonferenza inscritta ad ABC;
- il *baricentro* di ABC, solitamente indicato con G, come l'intersezione delle mediane del triangolo;
- il *circocentro* di ABC, solitamente indicato con O, come il centro della circonferenza circoscritta al triangolo ABC.

Provare a dimostrare che questi punti notevoli sono effettivamente ben definiti, cioè le rette in questione effettivamente concorrono. Infatti in quasi tutte le definizioni abbiamo a che fare con tre rette (altezze, bisettrici, mediane, ecc), che a priori potrebbero non concorrere. Noi dimostreremo tali concorrenze tramite il teorema di Ceva, ma tutte ammettono delle dimostrazioni puramente sintetiche.

3.2 Punti notevoli

In questa sezione esploreremo alcune relazioni fra i punti notevoli di un triangolo, molte delle quali risultano utili come sottocasi di problemi più complessi. Inoltre i seguenti esercizi aiutano ad acquisire un po' di manualità nello sfruttare adeguatamente gli angoli per risolvere problemi.

Esercizio 3.1. Siano A, B, C i vertici di un triangolo, H l'ortocentro di ABC, H_a, H_b rispettivamente i piedi dell'altezza uscente da A e dell'altezza uscente da B. Dimostrare che il quadrilatero AH_bH_aB è inscrittibile in una circonferenza. Qual è il centro di tale circonferenza? [Hint]

Esercizio 3.2. Siano A, B, C i vertici di un triangolo, H l'ortocentro di ABC, H_b, H_c rispettivamente i piedi dell'altezza uscente da B e dell'altezza uscente da C. Dimostrare che il quadrilatero AH_cHH_b è ciclico. [Hint]

Esercizio 3.3. Siano A, B, C i vertici di un triangolo, H l'ortocentro di ABC, H_a, H_b, H_c rispettivamente i piedi delle altezze uscenti da A, B e C. Dimostrare che H è l'incentro di $H_aH_bH_c$. [Hint]

Nei prossimi due esercizi indaghiamo rispettivamente i simmetrici dell'ortocentro rispetto ai lati e i simmetrici dell'ortocentro rispetto ai punti medi.

Esercizio 3.4. Siano A, B, C i vertici di un triangolo, H l'ortocentro di ABC e H'_a il simmetrico di H rispetto al lato BC. Dimostrare che H'_a appartiene alla circonferenza circoscritta ad ABC. [Hint]

Esercizio 3.5. Siano A, B, C i vertici di un triangolo, H l'ortocentro di ABC e H''_a il simmetrico di H rispetto al punto medio di BC. Dimostrare che H''_a appartiene alla circonferenza circoscritta ad ABC. [Hint]

Esercizio 3.6. (Circonferenza di Feuerbach) Siano A, B, C i vertici di un triangolo. Dimostrare che i piedi delle altezze e i punti medi dei lati appartengono ad una stessa circonferenza, detta *circonferenza di Feuerbach*, il cui centro è il punto medio fra ortocentro e circocentro. [Hint]

Esercizio 3.7. (Esistenza degli excentri) Sia ABC un triangolo. Dimostrare che la bisettrice interna di A, la bisettrice esterna di B e la bisettrice esterna di C concorrono in un punto, l'*excentro* relativo ad A, che è il centro di una circonferenza tangente a BC e ai prolungamenti di CA e AB. [Hint]

Esercizio 3.8. Sia ABC un triangolo. Siano M il punto medio dell'arco BC non contenente A nella circonferenza circoscritta ad ABC, I l'incentro di ABC e I_A l'excentro relativo al vertice A. Dimostrare che IBI_AC è inscrittibile in una circonferenza centrata in M. [Hint]

3.3 Omotetia

Per affrontare alcuni esercizi, a volte risulta utile avere in mente la nozione di omotetia, che introduciamo di seguito.

Definizione 3.4 (Omotetia)**.** Un'*omotetia* è una trasformazione geometrica del piano. Per definire un'omotetia è necessario specificare un punto O del piano, detto *centro di omotetia*, e un numero reale λ, diverso da zero, detto *fattore di omotetia*.

Allora, un generico punto P del piano viene mandato, tramite l'omotetia di centro O e fattore λ, nel punto P' tale che:

- i punti O, P, P' sono allineati;
- $OP' = \lambda OP$.

Il segno di λ è da intendersi nel seguente modo: se $\lambda > 0$, P' giace sulla semiretta OP di estremo O; se invece $\lambda < 0$, P' si trova sulla parte opposta a P rispetto a O sulla retta OP.

Un'omotetia può quindi essere vista come una dilatazione o contrazione del piano rispetto a un fissato punto.

È importante osservare che l'omotetia conserva gli angoli e i rapporti tra segmenti. Una qualsiasi retta r sarà mandata, tramite un'omotetia, in una retta parallela a r. Una qualsiasi figura (ad esempio un triangolo, un quadrilatero o una circonferenza) sarà mandata in una copia ingrandita o rimpicciolita di se stessa.

Esercizio 3.9. Siano Γ_1 e Γ_2 due circonferenze tangenti internamente in P, tali che Γ_2 è interna a Γ_1. Sia poi t una retta tangente a Γ_2 in T. La retta t interseca Γ_1 in A, B. Sia M il punto di intersezione della retta PT con Γ_1. Mostrare che M è il punto medio dell'arco AB non contenente P. [Hint]

Grazie al concetto di omotetia, possiamo ora cercare di dimostrare il seguente importante teorema, che ancora una volta relaziona punti notevoli di un triangolo.

Teorema 3.5 (Retta di Eulero)**.** *Sia ABC un triangolo. Siano H, G, O rispettivamente l'ortocentro, il baricentro e il circocentro di ABC. Allora questi tre punti giacciono su una stessa retta, detta* retta di Eulero *di ABC, inoltre vale $GH = 2GO$.*

Esercizio 3.10. Dimostriamo il Teorema 3.5 (Retta di Eulero), seguendo la seguente linea dimostrativa.

- Detti M_A, M_B, M_C i punti medi dei lati di ABC, si noti che l'omotetia di centro G e fattore -2 manda il triangolo $M_AM_BM_C$ nel triangolo ABC.
- Si noti che O è l'ortocentro di $M_AM_BM_C$.
- Poiché un punto di $M_AM_BM_C$ viene mandato tramite l'omotetia nel corrispondente punto di ABC, l'ortocentro di $M_AM_BM_C$ (ovvero O) sarà mandato nell'ortocentro di ABC (ovvero H). Per cui H, G e O sono allineati e $GH = 2GO$.

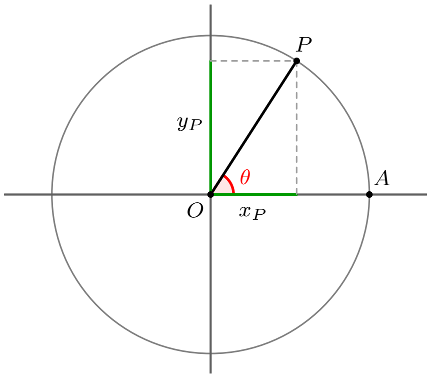
3.4 Trigonometria

Siano dati la circonferenza unitaria nel piano cartesiano di origine O e un punto P di coordinate (x_P, y_P) appartenente ad essa. Sia A il punto $(1,0)$. Definiamo

$$\cos(\angle AOP) = x_P$$

$$\sin(\angle AOP) = y_P$$

Vale dunque, per ogni angolo θ, $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.



Notiamo subito alcune facili periodicità e simmetrie, come, ad esempio:

- $\cos(\theta + 2\pi) = \cos\theta\,, \quad \sin(\theta + 2\pi) = \sin\theta$
- $\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta\,, \quad \sin(\pi - \theta) = \sin\theta$
- $\cos(\pi + \theta) = -\cos\theta\,, \quad \sin(\pi + \theta) = -\sin\theta$
- $\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sin\theta\,, \quad \sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cos\theta$

Un'altra funzione trigonometrica fondamentale è la funzione

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\,.$$

Vediamo subito alcuni valori notevoli delle tre funzioni trigonometriche appena incontrate:

θ	$\cos\theta$	$\sin\theta$	$\tan\theta$
0	1	0	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	0	1	non è definita, ma tende all'infinito se θ tende a $\frac{\pi}{2}$
π	-1	0	0

Esercizio 3.11. Verificare i valori scritti sopra.

Formule

Vediamo adesso alcune formule trigonometriche utili:

1. Formule di addizione:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta$$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\cos\beta\sin\alpha + \sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta} = \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1 - \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} =$$
$$= \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

2. Formule di duplicazione:

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

$$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

3. Formule di bisezione:

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$
$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sin(\frac{\alpha}{2})}{\cos(\frac{\alpha}{2})} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos^2\alpha}{(1+\cos\alpha)^2}} = \pm\sqrt{\frac{\sin^2\alpha}{(1+\cos\alpha)^2}} =$$
$$= \pm\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

Esercizio 3.12. Calcolare $\sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$ in funzione di $\cos\alpha$ e $\sin\alpha$.

Esercizio 3.13. Siano $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \pi)$. Dimostrare che $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ se e solo se $\tan(\frac{\alpha}{2})\tan(\frac{\beta}{2}) + \tan(\frac{\beta}{2})\tan(\frac{\gamma}{2}) + \tan(\frac{\gamma}{2})\tan(\frac{\alpha}{2}) = 1$. [Hint]

Trigonometria del triangolo

Consideriamo innanzitutto un triangolo rettangolo ABC, dove C è il vertice dell'angolo retto. Con le notazioni descritte nella Sezione 3.1 (Definizioni e preliminari), valgono allora le seguenti relazioni:

$$\cos\alpha = \frac{CA}{AB}, \quad \sin\alpha = \frac{BC}{AB}$$

e, analogamente:

$$\cos\beta = \frac{BC}{AB}, \quad \sin\beta = \frac{CA}{AB}.$$

Dunque abbiamo:

$$\tan\alpha = \frac{BC}{CA}, \quad \tan\beta = \frac{CA}{BC}.$$

Consideriamo ora un triangolo generico ABC e sia D il piede dell'altezza uscente da A. Allora, essendo il triangolo BDA rettangolo, per quanto appena visto vale $AD = AB \cdot \sin\beta = c \cdot \sin\beta$. Allora, l'area del triangolo ABC vale

$$[ABC] = \frac{BC \cdot AD}{2} = \frac{1}{2}\, ac \sin\beta\,.$$

Mostriamo ora due fondamentali teoremi di trigonometria del triangolo.

Esercizio 3.14. (Teorema dei seni) Dato un triangolo ABC, vale la seguente relazione fra lati e angoli:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

[Hint]

Esercizio 3.15. (Teorema di Carnot (o del coseno)) Dato un triangolo ABC, vale la seguente relazione fra lati e angoli:

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

[Hint]

Esercizio 3.16. (Teorema della bisettrice) Sia ABC un triangolo, D il piede della bisettrice uscente da A ed E il piede della bisettrice esterna uscente da A. Allora vale che

$$\frac{c}{b} = \frac{BD}{DC} = \frac{BE}{EC}.$$

[Hint]

Esercizio 3.17. Sia ABC un triangolo rettangolo in B tale che $AB = 10$ e $BC = 24$. Sia M il punto medio di AC. Calcolare $\cos(\angle ABM)$. [Hint]

Esercizio 3.18. (Teorema di Stewart) Dimostrare che, dato un triangolo ABC e un punto D su BC, vale

$$a \cdot (CD \cdot BD + AD^2) = b^2 \cdot CD + c^2 \cdot BD \,.$$

[Hint]

3.5 Ceva e Menelao

Teorema 3.6 (Ceva). *Sia ABC un triangolo e siano D, E, F punti rispettivamente sui segmenti BC, CA, AB. Allora AD, BE e CF concorrono se e solo se*

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1 \,. \tag{3.1}$$

Vediamo la dimostrazione del teorema attraverso i seguenti due esercizi.

Esercizio 3.19. Provare che, se le rette AD, BE e CF concorrono in P, allora vale l'Equazione (3.1). Per farlo, provare a scrivere i rapporti coinvolti nell'Equazione (3.1) in funzione delle aree $[APB]$, $[APC]$ e $[BCP]$ [5]. [Hint]

Esercizio 3.20. Mostriamo l'altra implicazione del teorema di Ceva. Supponiamo che valga l'Equazione (3.1) e che per assurdo AD, BE e CF non concorrano. Siano poi $P = BE \cap AD$ e $F' = CP \cap AB$.

1. Dimostrare sfruttando l'esercizio precedente che

$$\frac{AF'}{F'B} = \frac{AF}{FB} \,.$$

2. Dimostrare che $F \equiv F'$ e dedurne che allora AD, BE e CF concorrono.

Il Teorema 3.6 (Ceva) è molto utile per dimostrare che tre rette concorrono, in particolare si può utilizzare per mostrare l'esistenza, per esempio, di baricentro e ortocentro.

Esempio. Le altezze AD, BE e CF del triangolo ABC (in particolare D, E, F appartengono rispettivamente a BC, AC, AB) concorrono, pertanto esiste l'ortocentro.

Infatti, usando un po' di trigonometria, si ottiene che:

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = \frac{b\cos\alpha}{a\cos\beta} \cdot \frac{c\cos\beta}{b\cos\gamma} \cdot \frac{a\cos\gamma}{c\cos\alpha} = 1 \,.$$

Quindi le altezze di un triangolo concorrono.

Esercizio 3.21. Dimostrare che anche il baricentro è ben definito, cioè le mediane di un triangolo concorrono.

[5] Dato un triangolo ABC, indichiamo con $[ABC]$ la sua area.

Esercizio 3.22. (Punto di Gergonne) Sia ABC un triangolo e γ la sua circonferenza inscritta. Siano D, E, F i punti in cui γ interseca rispettivamente BC, CA, AB. Dimostrare che AD, BE e CF concorrono in un punto detto *punto di Gergonne*.

Teorema 3.7 (Menelao)**.** *Sia ABC un triangolo e siano D, E, F punti rispettivamente sulle rette BC, CA, AB. Indichiamo con AF/FB il rapporto delle lunghezze dei segmenti AF e FB con segno, positivo se F giace all'interno del segmento AB e negativo altrimenti. Analogamente indichiamo BD/DC e CE/EA.*

Allora D, E, F sono allineati se e solo se

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = -1\,. \tag{3.2}$$

Dimostriamo un'implicazione del Teorema 3.7 (Menelao) nel seguente esercizio.

Esercizio 3.23. Sia ABC un triangolo e siano D, E, F punti rispettivamente sulle rette BC, CA, AB. Supponiamo che D, E, F siano allineati e sia r la retta passante per D, E, F. Siano poi A', B', C' le proiezioni di A, B, C su r. Mostrare che allora vale l'Equazione (3.2). [Hint]

Esercizio 3.24. Sia ABC un triangolo. Siano $D \in BC$, $E \in AC$ tali che AD e BE siano bisettrici. Sia poi F il punto di intersezione tra la retta AB e la bisettrice esterna a C. Dimostrare che D, E, F sono allineati. [Hint]

3.6 Ciclicità

Potenza di un punto

Sia Γ una circonferenza di centro O e raggio R. Fissata Γ, a ogni punto P del piano è associato un numero reale, detto *potenza* del punto P rispetto alla circonferenza Γ.

Questo numero si indica con $\mathrm{pow}_\Gamma(P)$ e, per definizione, vale $\mathrm{pow}_\Gamma(P) = OP^2 - R^2$, dove con OP si indica la lunghezza del segmento OP.

Si noti che $\mathrm{pow}_\Gamma(P)$ vale zero se e solo se il punto P appartiene alla circonferenza, è un numero positivo se P è esterno alla circonferenza ed è un numero negativo se P è un punto interno alla circonferenza.

Esempio. Consideriamo la situazione in cui P è esterno alla circonferenza, e tracciamo una tangente t da P alla circonferenza Γ. Detto T il punto di tangenza della retta t con Γ, si noti che, per il teorema di Pitagora sul triangolo POT, vale $\mathrm{pow}_\Gamma(P) = PT^2$, ovvero la potenza di P rispetto a Γ è uguale al quadrato della lunghezza del segmento di tangenza da P a Γ.

Esercizio 3.25. Si verifichi che:

1. se P è esterno alla circonferenza, comunque presa una retta r passante per P che interseca Γ in due punti A, B, vale $\mathrm{pow}_\Gamma(P) = PA \cdot PB$;

2. se P è interno alla circonferenza, comunque presa una corda AB di Γ passante per P, vale $\mathrm{pow}_\Gamma(P) = -PA \cdot PB$.

Esercizio 3.26. Siano A, B, C tre punti su una circonferenza Γ, dove B è il punto medio dell'arco AC. Sia D il punto di intersezione delle tangenti a Γ in A e in B. Sia $E = CD \cap \Gamma$. Si mostri che la retta AE biseca il segmento BD. [Hint]

Assi radicali

Date due circonferenze Γ_1 e Γ_2, abbiamo visto che ad ogni punto P del piano possiamo associare due valori $\text{pow}_{\Gamma_1}(P)$ e $\text{pow}_{\Gamma_2}(P)$. Si verifica facilmente (provate a farlo in geometria analitica!) che il luogo dei punti del piano che hanno la stessa potenza rispetto a due date circonferenze è una retta. Tale retta è chiamata *asse radicale* delle circonferenze Γ_1 e Γ_2.

Esempio. Supponiamo che le circonferenze Γ_1 e Γ_2 si intersechino nei punti X, Y. Poiché X sta su entrambe le circonferenze, si ha $\text{pow}_{\Gamma_1}(X) = 0 = \text{pow}_{\Gamma_2}(X)$, per cui X appartiene all'asse radicale delle due circonferenze. Poiché lo stesso vale per Y, deduciamo che l'asse radicale delle due circonferenze è proprio la retta XY.

Teorema 3.8 (Centro radicale)**.** *Siano Γ_A, Γ_B, Γ_C tre circonferenze, allora i tre assi radicali delle tre coppie di circonferenze concorrono in un punto, detto* centro radicale *delle tre circonferenze.*

Chiamiamo r_{AB}, r_{BC}, r_{AC} i tre assi radicali delle tre coppie di circonferenze e sia inoltre $P = r_{AB} \cap r_{BC}$. Poiché $P \in r_{AB}$ vale $\text{pow}_{\Gamma_A}(P) = \text{pow}_{\Gamma_B}(P)$; poiché invece $P \in r_{BC}$ vale $\text{pow}_{\Gamma_B}(P) = \text{pow}_{\Gamma_C}(P)$. Questo implica $\text{pow}_{\Gamma_A}(P) = \text{pow}_{\Gamma_C}(P)$, ovvero $P \in r_{AC}$.

Questo semplice risultato può rivelarsi molto utile in problemi che chiedano di dimostrare la concorrenza di tre rette.

Esercizio 3.27. Siano Γ_1 e Γ_2 due circonferenze che si intersecano in X, Y. Sia t una tangente comune alle due circonferenze. Detti T_1 e T_2 i punti di intersezione di t con le due circonferenze, e detto M il punto di intersezione delle rette t e XY, si mostri che $MT_1 = MT_2$.

Esercizio 3.28. Sia ABC un triangolo di ortocentro H. Detta Γ la circonferenza circoscritta ad ABC, sia G il punto diametralmente opposto ad A su Γ, sia P il punto di intersezione, distinto da G, della retta GH con Γ. Siano D ed E i piedi delle altezze da B, C. Si mostri che:

1. il pentagono $APDEH$ è ciclico.
2. le rette AP, DE, BC concorrono in un punto.

Teorema di Simson

Concludiamo con il seguente teorema a cavallo fra ciclicità e geometria del triangolo.

Teorema 3.9 (Simson)**.** *Sia ABC un triangolo e sia P un punto generico. Siano inoltre D, E, F le proiezioni di P rispettivamente sulle rette AB, AC, BC. Allora D, E, F sono allineati se e solo se P appartiene alla circonferenza circoscritta ad ABC.*

Esercizio 3.29. Proviamo a dimostrare il Teorema 3.9 (Simson). Supponiamo che P appartenga alla circonferenza circoscritta ad ABC. Possiamo supporre senza perdita di generalità che P appartenga all'arco di circonferenza tra A e C.

1. Mostrare che $BFPD$, $AEPD$, $FCPE$ sono ciclici;
2. Provare che $\angle AED = \angle FEC$, dunque D, E, F risultano allineati.

Per il viceversa, provare a seguire la stessa dimostrazione ma al contrario.

3.7 Hints

Esercizio 3.1: Trovare due angoli retti che insistono sulla stessa corda. (Testo)

Esercizio 3.2: Trovare due angoli congruenti che insistono sulla stessa corda. (Testo)

Esercizio 3.3: Potrebbero essere utili i quadrilateri ciclici visti nei due esercizi precedenti! (Testo)

Esercizio 3.4: Notare che gli angoli $\angle CAB$ e $\angle BH_a'C$ sono supplementari. (Testo)

Esercizio 3.5: Cercare di calcolare più angoli possibile e notare che $BH_a'CH$ è un parallelogramma. (Testo)

Esercizio 3.6: Denotando con M_A, M_B, H_B, H_A rispettivamente i punti medi di BC, AC e i piedi delle altezze uscenti da B e A, si ha che $M_AM_BH_BH_A$ è ciclico. Il centro di tale circonferenza sarà l'intersezione fra gli assi di due dei lati del quadrilatero. Si procede analogamente con gli altri tre lati e si osserva che le tre circonferenze individuate coincidono. (Testo)

Esercizio 3.7: La bisettrice di un angolo è il luogo dei punti equidistanti dai lati dell'angolo. (Testo)

Esercizio 3.8: Cercare angoli retti e triangoli iscosceli. (Testo)

Esercizio 3.9: Considerare un'omotetia di centro P che manda Γ_2 in Γ_1. (Testo)

Esercizio 3.13: Per una freccia, utilizzare la formula di bisezione della tangente sostituendo $\gamma = \pi - \beta - \alpha$. (Testo)

Esercizio 3.14: Se D è il piede della retta uscente da A, vale $AD = c \cdot \sin\beta = b \cdot \sin\gamma$. (Testo)

Esercizio 3.15: Sia E il piede della bisettrice uscente da B, allora vale che $CE^2 + BE^2 = a^2$, per il teorema di Pitagora. Cercare quindi di esprimere BE e CE in termini dei lati e dell'angolo α. (Testo)

Esercizio 3.16: Utilizzare il teorema dei seni sui triangoli ABD e ADC. (Testo)

Esercizio 3.17: Notare che il triangolo ABM è isoscele. (Testo)

Esercizio 3.18: Sfruttare il teorema del coseno. (Testo)

Esercizio 3.19: Si ha che

$$\frac{BD}{DC} = \frac{[BPD]}{[PDC]} = \frac{[ABD]}{[ADC]} = \dots$$

(Testo)

Esercizio 3.23: Basta mostrare che

$$\frac{AF}{FB} = \frac{AA'}{BB'}$$

e ciclici. (Testo)

Esercizio 3.24: Usare l'Esercizio 3.16. (Testo)

Esercizio 3.26: Detto $X = AE \cap DB$, si mostri che i triangoli DXE e DXA sono simili. (Testo)

3.8 Problemi

G1. Sia ABC un triangolo rettangolo in A, non isoscele. Sia Γ una circonferenza passante per B e C, che interseca i lati AB e AC in D ed E rispettivamente. Siano inoltre O il centro di questa circonferenza, M il punto medio di BC, S il piede dell'altezza da A e K l'intersezione di ED con AS. Dimostrare che $AMOK$ è un parallelogramma. [Hint] [Soluzione]

G2. Sia AB il diametro di una circonferenza Γ, C un punto su questa, distinto da A e da B. Sia D il punto medio dell'arco AC che non contiene B, E il piede della perpendicolare tracciata da D alla retta BC. Sia $F = EA \cap \Gamma$. Si dimostri che la retta BF biseca il segmento DE. [Hint] [Soluzione]

G3. Sia ABC un triangolo. Sia A_1, B_1, C_1 il triangolo formato dai piedi delle altezze di ABC. Sia $A_2B_2C_2$ il triangolo formato dai punti di tangenza dell'incerchio di $A_1B_1C_1$. Dimostrare che la retta di Eulero di ABC e la retta di Eulero di $A_2B_2C_2$ coincidono. [Hint] [Soluzione]

G4. Sia ABC un triangolo e sia M il punto medio di BC. Sia D l'intersezione tra la circonferenza passante per M e tangente a AB in B e la circonferenza passante per M e tangente a AC in C. Sia infine D' il simmetrico di D rispetto a BC. Dimostrare che A, D', M sono allineati. [Hint] [Soluzione]

3.8.1 Hints dei problemi

Problema G1: Dimostrare che K è il punto medio di DE, sfruttando che $\angle BAS = \angle MAC$. (Testo)

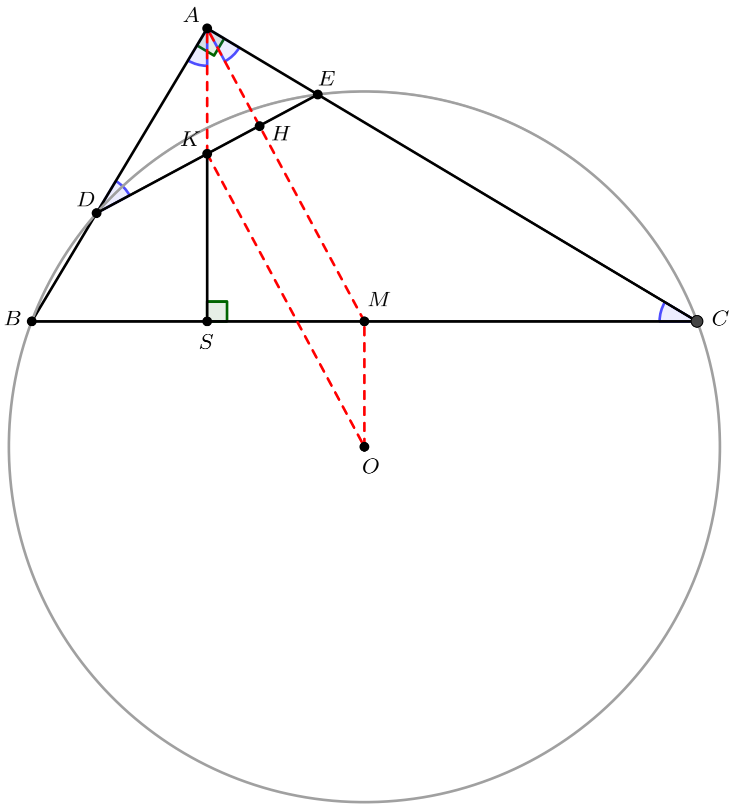
Problema G2: Si noti che DE è parallela ad AC. Detti $X = DE \cap BF$, $Y = AC \cap BF$, si scrivano le potenze di questi due punti rispetto a Γ in due modi equivalenti per ogni punto. Si concluda utilizzando alcune similitudini di triangoli. (Testo)

Problema G3: Dimostrare che l'ortocentro di ABC e il circocentro di $A_2B_2C_2$ coincidono, e che le due rette di Eulero della tesi sono parallele. (Testo)

Problema G4: Applicare quattro volte il teorema dei seni sui triangoli ABM, ACM, BMD, CMD. (Testo)

3.8.2 Soluzioni

Soluzione di G1: Per dimostrare che $AMOK$ è un paralleogramma è sufficiente dimostrare che AK è parallelo a MO e AM è parallelo a KO.



Notiamo innanzitutto che AK e MO sono entrambi perpendicolari a BC, il primo per definizione e il secondo perché O è il centro di una circonferenza passante per BC e dunque MO è l'asse di BC. Perciò $AK \parallel MO$ e ci rimane dunque solo da mostrare l'altro parallelismo, $AM \parallel KO$.

Poiché $BCED$ è un quadrilatero ciclico, abbiamo che $\angle BCA = \angle EDA$. Ricordiamo che in un triangolo rettangolo la mediana relativa all'ipotenusa è lunga metà dell'ipotenusa stessa (quindi divide il triangolo rettangolo in due triangoli isosceli che hanno i cateti come basi); applicando il risultato al triangolo ABC si trova che AMC è isoscele, dunque $\angle MCA = \angle MAC$. I triangoli rettangoli BSA e BAC hanno l'angolo in B in comune, dunque sono simili e $\angle BAS = \angle BCA$ (con questo, abbiamo dimostrato che tutti gli angoli azzurri della figura sono uguali tra loro).

Chiamiamo H il punto di intersezione di AM e DE, vogliamo dimostrare che AM è perpendicolare a DE, facendo vedere che il triangolo AEH è rettangolo in H: si ha infatti che $\angle AHE = \pi - \angle DEA - \angle CAM = \pi - \angle DEA - \angle EDA = \angle EAD = \frac{\pi}{2}$.

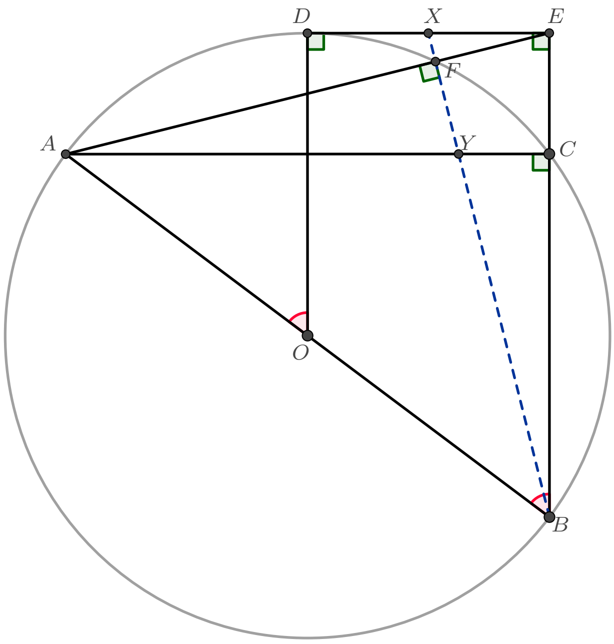
Inoltre abbiamo che i triangoli AED e ASC sono simili (sono triangoli rettangoli e $\angle ACS = \angle ADE$), dunque $\angle EAK = \angle DEA$, quindi il triangolo AKE è isoscele. Siccome anche AKD è isoscele (prima abbiamo dimostrato che $\angle DAK = \angle ADK$), K risulta essere il punto medio di DE. Dunque KO è asse di DE, sfruttando analogamente a prima la ciclicità di $BCED$, ed essendo AM e KO entrambi perpendicolari a DE, ne segue che sono paralleli tra loro, e questo conclude la dimostrazione. (Testo)

Soluzione di G2: Siano $X = DE \cap BF$, $Y = AC \cap BF$. Mostreremo che $XD = XE$.

Poiché AB è diametro, vale $\angle ACB = \frac{\pi}{2}$. Essendo poi per costruzione $\angle DEC = \frac{\pi}{2}$, deduciamo che le rette DE e AC sono parallele. Allora, poiché DE è parallela alla corda AC e passa per il punto medio dell'arco AC, DE è tangente alla circonferenza in D. Scriviamo quindi la potenza del punto X rispetto alla circonferenza come

$$\mathrm{pow}_\Gamma(X) = XD^2 = XF \cdot XB\,. \tag{3.3}$$

Si noti che $\angle XFE = \angle AFY$, in quanto opposti al vertice, e $\angle XEF = \angle FAY$ perché



angoli alterni interni per due rette parallele tagliate da una trasversale. Deduciamo allora che i triangoli XEF e FAY sono simili, in quanto hanno due coppie di angoli uguali. Vale dunque la relazione $\frac{XF}{FY} = \frac{XE}{AY}$, da cui, sostituendo XF nell'Equazione (3.3), si ottiene

$$XD^2 = \frac{XE}{AY} \cdot FY \cdot XB\,. \tag{3.4}$$

Scriviamo ora la potenza del punto Y rispetto a Γ come $\mathrm{pow}_\Gamma(Y) = FY \cdot YB = AY \cdot YC$, da cui $FY = \frac{AY \cdot YC}{YB}$. Sostituendo FY nell'Equazione (3.4) otteniamo perciò

$$XD^2 = \frac{XE \cdot AY \cdot YC \cdot XB}{AY \cdot YB} = \frac{XE \cdot YC \cdot XB}{YB}\,. \tag{3.5}$$

Infine, essendo XE e CY parallele, i triangoli XEB e YCB sono simili, da cui $\frac{YC}{YB} = \frac{XE}{XB}$. Sostituendo $\frac{YC}{YB}$ nell'Equazione (3.5) si ha quindi

$$XD^2 = XE^2 \implies XD = XE\,,$$

e questo conclude la dimostrazione.

Soluzione alternativa: Presentiamo un'altra soluzione, che fa uso di un argomento non affrontato nella sezione di teoria, la geometria analitica.

Sia O il centro di Γ. Dato che D è il punto medio dell'arco AC, $\angle DOA = \frac{\angle COA}{2}$. Poiché $\angle CBA$ e $\angle COA$ insistono entrambi su CA, vale

$$\angle CBA = \frac{\angle COA}{2} = \angle DOA$$

e quindi BC e OD sono paralleli.

Scegliamo l'origine e la direzione degli assi del piano cartesiano in modo che $C = (0,0)$ e B appartenga all'asse y, in particolare siano $(0,-b)$ le sue coordinate. Dato che AB è diametro, AC è perpendicolare a BC e O è il punto medio di AB. Quindi A appartiene all'asse x, siano dunque $(a,0)$ le sue coordinate. Di conseguenza abbiamo che $O = \left(\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$.

Per quanto dimostrato precedentemente, DO è parallelo all'asse y, dunque

$$D = \left(\frac{a}{2}, -\frac{b}{2} + r\right),$$

dove r è il raggio della circonferenza, che è pari a

$$CO = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(-\frac{b}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}.$$

Per ipotesi, DE è perpendicolare all'asse y ed E vi apppartiene, dunque $E = \left(0, -\frac{b}{2} + r\right)$.

A questo punto osserviamo che il coefficiente angolare k della retta EA è

$$k = \frac{y_E - y_A}{x_E - x_A} = \frac{-\frac{b}{2} + r}{-a} = \frac{b - 2r}{2a}.$$

Dato che $\angle AFB$ è un angolo alla circonferenza che insiste su un diametro, le rette EA e BF sono perpendicolari, dunque il coefficiente angolare della retta BF è $-\frac{1}{k} = \frac{2a}{2r-b}$. Pertanto la retta BF ha equazione $y = \frac{2a}{2r-b}x - b$. Osserviamo che per dimostrare che la retta BF biseca il segmento DE basta dimostrare che il punto medio di DE appartiene alla retta BF. Sia $X = \left(\frac{a}{4}, -\frac{b}{2} + r\right)$ il punto medio di DE. Sostituiamo X nell'equazione della retta BF:

$$r - \frac{b}{2} = \frac{2a}{2r-b} \cdot \frac{a}{4} - b \iff r^2 - rb + \frac{b^2}{4} = \frac{a^2}{4} - rb + \frac{b^2}{2} \iff$$
$$\iff r^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} \iff r = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{4}.$$

Questa relazione è vera per quanto dimostrato precedentemente, quindi il problema è concluso. (Testo)

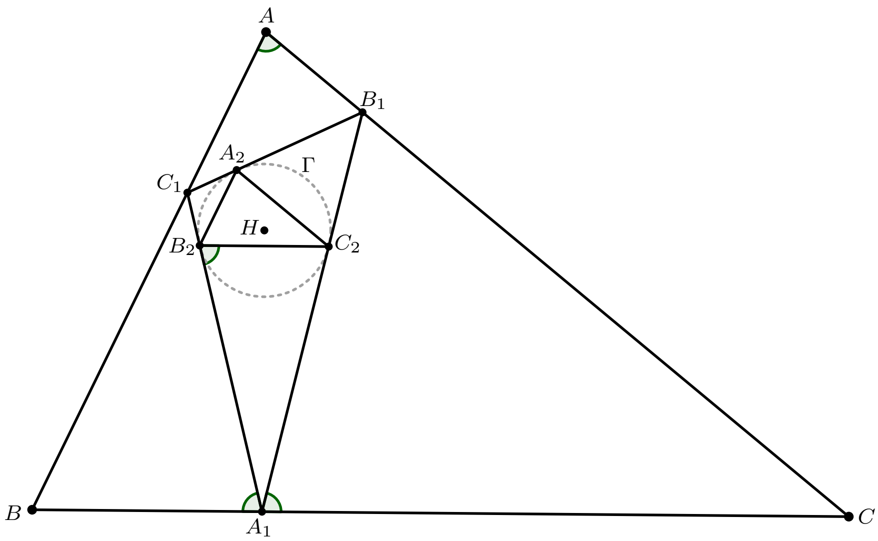
Soluzione di G3: Denotiamo con A_1, B_1, C_1 rispettivamente i piedi delle altezze uscenti da A, B, C, con Γ l'incerchio di $A_1B_1C_1$, con A_2, B_2, C_2 rispettivamente i punti in cui Γ tange B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1, con r_0 e r_2 rispettivamente la retta di Eulero di ABC e quella di $A_2B_2C_2$.

Per l'Esercizio 3.3, l'ortocentro H di ABC è l'incentro di $A_1B_1C_1$. D'altronde l'incerchio di $A_1B_1C_1$ è il circocerchio di $A_2B_2C_2$, quindi H è anche il circocentro di $A_2B_2C_2$. Pertanto H appartiene sia a r_0 sia a r_2.

Dimostriamo che B_2C_2 è parallelo a BC. Dato che $\angle BB_1A$ e $\angle BA_1A$ sono entrambi retti e insistono su AB, AB_1A_1B è ciclico. Quindi $\angle B_1A_1C = \pi - \angle BA_1B_1 = \angle CAB$. Analogamente ACA_1C_1 è ciclico e $\angle BA_1C_1 = \angle CAB$. Dunque $\angle C_2A_1B_2 = \pi - 2\angle CAB$. Dato che A_1B_2 e A_1C_2 sono tangenti a Γ in B_2 e C_2, $B_2A_1C_2$ è isoscele su base B_2C_2, di conseguenza

$$\angle A_1B_2C_2 = \frac{\pi - \angle C_2A_1B_2}{2} = \angle CAB = \angle C_1A_1B$$

e quindi B_2C_2 è parallelo a BC. Analogamente si dimostra che A_2C_2 e A_2B_2 sono rispettivamente paralleli ad AC e AB.



Dato che ABC e $A_2B_2C_2$ hanno i lati a due a due paralleli, sono simili e le loro rette di Eulero sono parallele. Infine, avendo dimostrato che esiste un punto appartenente sia a r_0 sia a r_2, possiamo concludere che r_0 e r_2 coincidono. (Testo)

Soluzione di G4: Mostrare che A, D', M sono allineati è equivalente a mostrare che $\angle AMB = \angle D'MB$. Sappiamo che D' è il simmetrico di D rispetto a BC, quindi $\angle D'MB = \angle DMB$ e dunque basta dimostrare che $\angle AMB = \angle DMB$.

Abbiamo che $\angle ABM = \angle BDM$, in quanto AB è tangente alla circonferenza in B e, analogamente, vale anche $\angle ACM = \angle CDM$.

Chiamiamo ora $\angle BAM = x$, $\angle CAM = y$, $\angle DBM = z$ e $\angle DCM = w$. Per il teorema dei seni sul triangolo ABM, abbiamo che

$$\frac{BM}{\sin x} = \frac{AM}{\sin \beta}$$

e, analogamente, sul triangolo ACM otteniamo

$$\frac{CM}{\sin y} = \frac{AM}{\sin \gamma}.$$

Facendo il rapporto membro a membro di queste due equazioni e sfruttando che $BM = CM$ ricaviamo

$$\frac{\sin y}{\sin x} = \frac{\sin \gamma}{\sin \beta}.$$

Adesso, per il teorema dei seni applicato ai triangolo BMD e CMD, sappiamo che

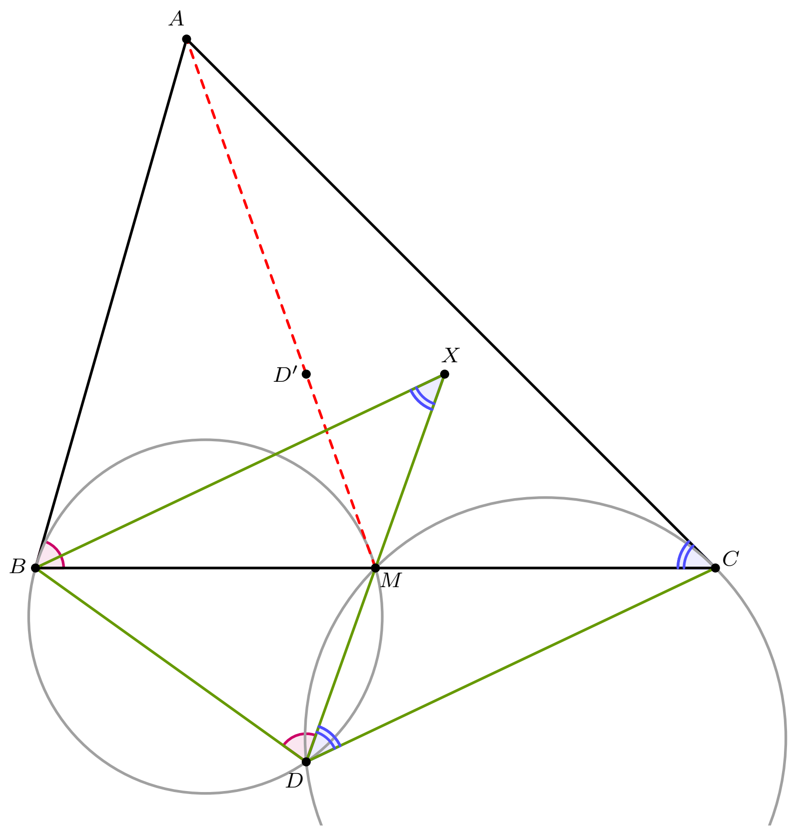
$$\frac{BM}{\sin \beta} = \frac{DM}{\sin z}, \quad \frac{CM}{\sin \gamma} = \frac{DM}{\sin w} \implies \frac{\sin \gamma}{\sin \beta} = \frac{\sin w}{\sin z}.$$

Notiamo quindi che $x + y = \alpha$ e $z + w = \pi - \angle BDM - \angle CDM = \pi - \beta - \gamma = \alpha$, dunque $x + y = z + w$ e inoltre, sfruttando le relazioni ottenute sappiamo che

$$\frac{\sin y}{\sin x} = \frac{\sin w}{\sin z}.$$

Il seno è una funzione crescente nell'intervallo $[0, \frac{\pi}{2}]$ a cui appartengono x, y, z e w, dunque deve necessariamente valere $x = z$ e $y = w$. Perciò i triangoli ABM e BMD hanno due angoli congruenti e dunque, necessariamente, anche il terzo angolo deve essere congruente, cioè deve valere $\angle AMB = \angle DMB$, come volevamo.

Soluzione alternativa: La tesi equivale a mostrare $\angle BMD = \angle BMA$. Notiamo che $\beta = \angle ABM = \angle BDM$, in quanto la retta AB è tangente alla circonferenza passante per B, D, M. Analogamente si ha $\gamma = \angle ACM = \angle CDM$.



Sia X il punto sulla retta DM tale che M sia il punto medio di DX. I triangoli BMX e CMD sono simili, in quanto hanno due coppie di lati uguali ($BM = MC$ per ipotesi e $DM = MX$ per costruzione), e inoltre $\angle BMX = \angle DMC$ in quanto opposti al vertice.

Si ha quindi $\angle BXM = \angle CDM = \gamma$. Il triangolo BDX è allora simile al triangolo ABC, in quanto tali triangoli hanno due coppie di angoli uguali, infatti

$$\beta = \angle ABC = \angle BDM = \angle BDX \quad \text{e} \quad \gamma = \angle ACB = \angle BXM = \angle BXD\,.$$

Per come è stato costruito X, BM è la mediana del triangolo BDX, corrispondente tramite similitudine alla mediana AM nel triangolo ABC. L'angolo $\angle BMD$ che la mediana BM forma con il lato DX è allora uguale all'angolo $\angle AMB$ che la mediana AM forma con il lato BC. Questo conclude la dimostrazione. (Testo)

Allenamenti EGMO 2018 – Teoria dei numeri

4.1 Divisibilità

Ricordiamo che, dati due numeri interi a, m, esistono unici q ed r interi con $0 \leq r < m$, tali che

$$a = mq + r\,.$$

Chiamiamo r il *resto* della divisione di a per m.

Dati a, m interi, diciamo che a è divisibile per m (o m divide a, o m è un *divisore* di a) se il resto della divisione di a per m è 0, cioè se esiste un intero q tale che $a = mq$. In questo caso denotiamo $m \mid a$, che si legge "m divide a".

Un numero intero si dice *primo* se gli unici suoi divisori sono 1 e se stesso. Spesso indicheremo i numeri primi con le lettere p, q.

Infine ricordiamo che ogni $n \in \mathbb{N}$ ammette un'unica *fattorizzazione* in primi, cioè esiste un unico modo (a meno dell'ordine dei fattori) di scrivere n come

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{\alpha_s}$$

dove $p_1, \ldots, p_s$ sono primi distinti e $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ sono interi strettamente positivi.

Esercizio 4.1. Dati a, b, c interi, dimostrare le seguenti proprietà della divisibilità:

1. Se $a \mid b$ e $a \mid c$, allora $a \mid xb + yc$ per ogni x, y interi.
2. Si ha che $a \mid b$ se e solo se $a \mid b + ka$ per un qualche k intero se e solo se $a \mid b + ka$ per ogni k intero.
3. Se $a \mid bc$ e $(a, c) = 1$ (ovvero a e c non hanno fattori in comune), allora $a \mid b$.
4. Dato un primo p, allora $p \mid ab$ se e solo se $p \mid a$ oppure $p \mid b$.

[Hint]

Esercizio 4.2. Trovare il più grande valore possibile di a tale che esistono p e q numeri primi per cui $a = p + q$ e $a = \frac{pq-1}{2}$. [Hint]

4.2 Algoritmo di Euclide

Definizione 4.1. Dati due numeri naturali a e b, si definisce *massimo comun divisore* fra a e b, che denoteremo $MCD(a, b)$ o (a, b), il più grande dei divisori comuni di a e b.

Il primo modo che viene in mente per calcolare l'MCD fra due numeri a, b è fattorizzare i due numeri come

$$a = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_s^{\alpha_s}\,, \qquad b = p_1^{\beta_1} \cdot \ldots \cdot p_s^{\beta_s}\,,$$

dove eventualmente α_i o β_i sono 0 per qualche i, in modo che nella fattorizzazione compaiano gli stessi primi. Allora l'MCD fra a e b sarà

$$(a, b) = p_1^{\min\{\alpha_1, \beta_1\}} \cdot \ldots \cdot p_s^{\min\{\alpha_s, \beta_s\}}\,.$$

Esiste però un modo più rapido della fattorizzazione e che richiede solo operazioni elementari per calcolare l'MCD: l'*algoritmo di Euclide*, che descriviamo di seguito. L'idea è procedere tramite delle divisioni successive, basandosi sul seguente lemma.

Lemma. *Dati due interi a e b si ha che $(a, b) = (r, b)$, dove r è il resto della divisione di a per b.*

Esercizio 4.3. Dimostrare il lemma per esercizio. [Hint]

Dunque consideriamo due interi $a_0 \geq a_1 > 0$, di cui vogliamo calcolare l'MCD (a_0, a_1). Grazie al lemma precedente $(a_0, a_1) = (a_1, a_2)$, dove a_2 è il resto della divisione di a_0 per a_1 e dunque in particolare $0 \leq a_2 < a_1$.

Se $a_2 = 0$, abbiamo trovato che $(a_0, a_1) = (a_1, 0) = a_1$ e abbiamo quindi concluso il calcolo dell'MCD. Altrimenti possiamo ripetere il procedimento e ottenere che $(a_1, a_2) = (a_2, a_3)$, dove a_3 è il resto della divisione di a_1 per a_2.

Procediamo dunque analogamente trovando una successione di interi $a_2, a_3, \ldots, a_n$, di cui a_{i+2} è il resto della divisione di a_i per a_{i+1} per ogni $i \geq 0$.

Notiamo che $a_1 > a_2 > \ldots > a_n$ è una successione *strettamente* decrescente di numeri interi positivi; dunque, continuando l'algoritmo, finiremo a 0 dopo un numero *finito* di passaggi. Questo vuol dire che esisterà $n \geq 1$ tale che $a_{n+1} = 0$ e quindi

$$(a_0, a_1) = (a_1, a_2) = \ldots = (a_n, 0) = a_n \,.$$

Esercizio 4.4. Trovare il massimo valore possibile di $(100+n^2, 100+(n+1)^2)$ al variare di $n \in \mathbb{N}$.

4.3 Identità di Bezout

Teorema 4.2 (Bezout)**.** *Dati due numeri interi a_0 e a_1 con massimo comun divisore $d = (a_0, a_1)$ esistono due interi x e y tali che:*

$$a_0 x + a_1 y = d \,.$$

Per trovare i coefficienti x e y basta infatti percorrere al contrario le divisioni fatte nell'algoritmo di Euclide.

Supponiamo infatti che la successione di interi costruita tramite l'algoritmo di Euclide sia $a_0 \geq a_1 > a_2 > \ldots > a_n = d$. Allora esistono $q_1, \ldots, q_{n-1}$ tali che $a_k = q_{k+1}a_{k+1} + a_{k+2}$ per ogni $k = 0, \ldots, n-2$ e di conseguenza abbiamo che

$$d = a_n = a_{n-2} - q_{n-1}a_{n-1} = a_{n-2} - q_{n-1}(a_{n-3} - q_{n-2}a_{n-2}) = -q_{n-1}a_{n-3} + (1 + q_{n-1}q_{n-2})a_{n-2}$$

Continuando in questo modo, sostituendo sempre l'a_i con indice maggiore con i due precedenti, arriviamo a scrivere d in funzione di a_0 e a_1, trovando quindi i coefficienti x e y tali che $a_0 x + a_1 y = d$.

Esercizio 4.5. Trovare $d = (66, 51)$ ed i coefficienti x e y tali che $66x + 51y = d$.

Equazioni diofantee lineari

Abbiamo ora gli strumenti per affrontare il seguente problema: dati a, b, c interi, studiare l'equazione

$$ax + by = c \tag{4.1}$$

per x, y interi.

Esercizio 4.6. L'Equazione (4.1) ha soluzione se e solo se $(a, b) \mid c$ e in tal caso ammette *infinite* coppie (x, y) che rispettano l'equazione.

Risolvere l'esercizio seguendo la linea risolutiva:

1. Dimostrare che se esistono x, y interi tali che $ax + by = c$, allora $(a, b) \mid c$.
2. Dimostrare che se $(a, b) \mid c$, allora esistono x, y interi tali che $ax+by = c$, utilizzando il Teorema 4.2 (Bezout).
3. Dimostrare che se (x_0, y_0) risolve l'equazione, allora anche

$$\left(x_0 - \frac{b}{(a, b)}k, y_0 + \frac{a}{(a, b)}k \right)$$

per ogni k intero risolve l'equazione. Inoltre le soluzioni sono tutte di questa forma.

4.4 Congruenze

Definizione 4.3. Si dice che a è *congruo* a b modulo m e si indica $a \equiv b \pmod{m}$, se a e b hanno lo stesso resto nella divisione per m.

Esercizio 4.7. La congruenza è una *relazione di equivalenza*, cioè se $a \equiv b \pmod{m}$ e $b \equiv c \pmod{m}$, allora $a \equiv c \pmod{m}$. Dunque, fissato il modulo m, chiamiamo *classe di congruenza* tutti i numeri con lo stesso resto nella divisione per m.

Esercizio 4.8. Dimostrare che le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1. a è congruo a b modulo m;
2. $m \mid a - b$;
3. esiste k tale che $a = km + b$ (*attenzione*: in questo caso k e b non sono necessariamente q e r della divisione euclidea).

Dalla definizione è ovvio che, dati due interi a ed m, allora $a \equiv r \pmod{m}$, dove $0 \leq r < m$ è il resto della divisione di a per m.

Fissato il modulo m, possiamo dunque associare ad ogni intero a il suo resto nella divisione euclidea per m. Tale elemento, compreso fra 0 e $m - 1$, sarà il "rappresentante privilegiato" della classe di congruenza di a. Spesso con "a modulo m" o "a mod m" intendiamo direttamente tale elemento privilegiato della classe di congruenza di a.

Nota. Notare che dati $0 \leq a, b < m$ con $a \neq b$, non può valere $a \equiv b \pmod{m}$.

Le congruenze soddisfano diverse proprietà (che si possono ricavare dalle proprietà della divisione) che elenchiamo di seguito:

1. Se $a \equiv a' \pmod{m}$ e $b \equiv b' \pmod{m}$, allora $a + b \equiv a' + b' \pmod{m}$

   Dimostrazione. Per definizione, se $a \equiv a' \pmod{m}$ e $b \equiv b' \pmod{m}$, allora $m \mid a - a'$ e $m \mid b - b'$ e per le proprietà della divisione ricavo che $m \mid a - a' + b - b' = (a + b) - (a' + b')$, cioè dunque $a + b \equiv a' + b' \pmod{m}$. □

2. Se $a \equiv a' \pmod{m}$ e $b \equiv b' \pmod{m}$, allora $a \cdot b \equiv a' \cdot b' \pmod{m}$

   Dimostrazione. Se $a \equiv a' \pmod{m}$ e $b \equiv b' \pmod{m}$, allora esistono k, h tali che $a = km + a'$ e $b = hm + b'$. Moltiplicando, ricavo dunque $ab = (km + a')(hm + b') = khm^2 + kb'm + ha'm + a'b' \equiv a'b' \pmod{m}$. □

Esercizio 4.9. Per quali numeri n si ha che 3 divide $1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n$? [Hint]

Esercizio 4.10. Dati a, b, m interi positivi tali che $a \equiv b \pmod{m}$, dimostrare che $(a, m) = (b, m)$.

Equazioni diofantee lineari in modulo

Vogliamo ora studiare quando l'equazione

$$ax \equiv b \pmod{m} \tag{4.2}$$

ha soluzione per a, b, m interi positivi.

Esercizio 4.11. Dimostrare che, se $(a, m) = 1$, allora l'Equazione (4.2) ammette soluzione, sfruttando l'Esercizio 4.6. [Hint]

Esercizio 4.12. Trovare un esempio in cui $(a, m) \neq 1$ e

1. l'Equazione (4.2) non ammette soluzione;
2. l'Equazione (4.2) ammette soluzione.

Notare in particolare che se a, m sono due interi positivi coprimi, allora esiste sempre l'inverso di a modulo m, cioè un intero x tale che $ax \equiv 1 \pmod{m}$.

Criteri di congruenza

Esercizio 4.13. Dimostrare i seguenti criteri di congruenza:

- Un numero è congruo modulo 2 alla sua cifra delle unità.
- Un numero è congruo modulo 3 alla somma delle sue cifre.
- Un numero è congruo modulo 4 al numero costituito dalle ultime sue due cifre.
- Un numero è congruo modulo 9 alla somma delle sue cifre.
- Un numero è congruo modulo 11 alla somma delle sue cifre a segno alterno, in modo che la cifra delle unità abbia segno positivo.

[Hint]

4.5 Esercizi base

In questa sezione presentiamo una serie di esercizi che vi guideranno nel prendere maneggevolezza con le nozioni di base di teoria dei numeri.

Esercizio 4.14. Per quali valori di $n \in \mathbb{N}$ il numero $\frac{n^2+3n-5}{n-2}$ è intero? [Hint]

Esercizio 4.15. Per quali valori di $n \in \mathbb{N}$ il numero $\frac{n^3+5}{n^2-1}$ è intero? Seguire questa linea dimostrativa:

1. Scrivere $\frac{n^3+5}{n^2-1}$ nella forma $p(n) + \frac{q(n)}{n^2-1}$ con p e q polinomi a coefficienti interi, e q di grado minore o uguale a 1.
2. Vedere per quali n si ha $|q(n)| < |n^2 - 1|$ e convincersi che per questi n il numero iniziale non è intero, tranne se $q(n) = 0$.
3. Fare *a mano* i (pochi!) casi rimasti.

Esercizio 4.16. Per quali valori interi di a il numero $a^2 + 27a + 91$ è un quadrato perfetto? [Hint]

Esercizio 4.17. Trovare tutte le terne di interi (a, b, c) tali che $a^n + b^n + c^n = 0$ per infiniti valori di $n \in \mathbb{N}$. [Hint]

Esercizio 4.18. Per quali interi n si ha $(2n + 3, n + 7) = 1$? Per quali interi n si ha invece che $(4n^2 - 2, 2n + 5) = 1$? [Hint]

Esercizio 4.19. Sia k un numero intero, siano $A = 2^k - 2$ e $B = 2^k \cdot A$. Dimostrare che $A + 1$ e $B + 1$ hanno lo stesso insieme di divisori primi. [Hint]

Esercizio 4.20. Dimostrare che non esiste un polinomio a coefficienti interi $f(x)$ tale che $f(7) = 11$ e $f(11) = 13$. [Hint]

Esercizio 4.21. Dimostrare che non esiste un intero n tale che la somma delle cifre di n^2 sia uguale a 15. [Hint]

Esercizio 4.22. Dimostrare che le seguenti equazioni non hanno soluzioni per n, m e a interi:

1. $3n - 1 = a^2$;
2. $5n - 2 = a^2$;
3. $7n + 5 = a^2$;
4. $4n + 2 = a^2$;
5. $15n^2 - 7m^2 = 9$.

[Hint]

Esercizio 4.23. Dimostrare che non esiste un triangolo rettangolo con i lati di lunghezza intera ed entrambi i cateti di lunghezza dispari. [Hint]

Esercizio 4.24. Considerare la sequenza dei numeri di Fibonacci, che ricordiamo essere definita come $F_0 = 0, F_1 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ per $n \geq 1$. Dimostrare che esiste $n > 0$ tale che F_n è divisibile per 2017. [Hint]

Esercizio 4.25. Dimostrare che scegliendo $n + 1$ numeri tra $\{1, 2, \ldots, 2n\}$:

1. ce ne sono due coprimi;
2. ci sono a, b distinti tali che a è multiplo di b.

[Hint]

Esercizio 4.26. Dimostrare che dati 5 interi ne esistono 3 con somma multipla di 3. [Hint]

Esercizio 4.27. Dimostrare che se p è un numero primo e $a \in \mathbb{N}$ allora $a^2 - p$ non è divisibile per p^2. [Hint]

Esercizio 4.28. Trovare tutte le soluzioni intere positive di $3^y - x^2 = 17$. Seguire questa via:

1. Dimostrare che x deve essere pari, quindi scriverlo nella forma $x = 2a$ e sostituirlo nell'equazione iniziale.
2. Guardare la nuova equazione modulo 4 e dedurne che y è pari, dunque porre $y = 2b$ e riscrivere l'equazione.
3. Accorgersi che il membro sinistro è una differenza di quadrati: fattorizzare, ricordarsi che 17 è un numero primo quindi i due fattori devono essere 1 e 17, quindi risolvere il sistema che ne deriva.

Esercizio 4.29. Dato un intero positivo n indichiamo con $d(n)$ il numero dei suoi divisori. Per quali n interi positivi $d(n)^2 = n$? Seguire la linea dimostrativa:

1. Scrivere la fattorizzazione di n come $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ e dimostrare che
$$d(n) = (\alpha_1 + 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_k + 1)\,.$$
2. Dal fatto che n è un quadrato, dedurre la parità degli α_i e di conseguenza di $d(n)$.
3. Considerare il caso in cui n sia una potenza di un primo p: dimostrare per induzione che $p^b > (b+1)^2$ per b "grande" e quindi in tal caso non ci possono essere soluzioni. Fare a mano i casi con b "piccolo".
4. Estendere al caso con più di un fattore primo, moltiplicando tra loro le disuguaglianze del punto precedente. Concludere che esiste un unico n che va bene.

[Hint]

4.6 Teorema cinese del resto

Cerchiamo ora di capire quando un sistema di congruenze ha soluzione.

Chiaramente sistemi come

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod 2 \\ x \equiv 2 \pmod 4 \end{cases}$$

non hanno soluzione (non ci sono numeri dispari congrui a 2 modulo 4). Questo succede perché i moduli che abbiamo considerato (2 e 4) non sono coprimi. Sorge allora spontanea la domanda: e se i moduli sono coprimi cosa succede? Il teorema cinese del resto risponde a questo problema.

Teorema 4.4 (Teorema cinese del resto)**.** *Siano n_1, n_2 due interi tali che $(n_1, n_2) = 1$ e a_1, a_2 due interi qualsiasi. Allora il sistema*

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \pmod{n_1} \\ x \equiv a_2 \pmod{n_2} \end{cases} \tag{4.3}$$

ha un'unica soluzione modulo $n_1 \cdot n_2$.

Il teorema ci dice quindi che il sistema 4.3 ha sempre soluzione purché i moduli considerati siano coprimi. In particolare il sistema ha infinite soluzioni in $\mathbb{N}$ ma soltanto una negli interi modulo $n_1 \cdot n_2$ (cioè compresi fra 0 e $n_1 \cdot n_2 - 1$).

Il teorema si può generalizzare a sistemi di tre o più congruenze, vediamo come. Siano $k \in \mathbb{N}$ e $n_1, n_2, \ldots, n_k$ degli interi positivi a due a due coprimi. Consideriamo poi $a_1, a_2, \ldots, a_k$ degli interi qualsiasi, allora il sistema

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \pmod{n_1} \\ x \equiv a_2 \pmod{n_2} \\ \quad \vdots \\ x \equiv a_k \pmod{n_k} \end{cases}$$

ha un'unica soluzione modulo $n_1 \cdot n_2 \cdot \cdots \cdot n_k$.

Da un punto di vista pratico, trovare la soluzione del sistema non è difficile. Vediamolo in questo esempio.

Esempio. Vogliamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} x \equiv 5 \pmod{12} \\ x \equiv 4 \pmod{7} \end{cases}$$

La prima equazione ci dice che $12 \mid x - 5$, cioè esiste $k \in \mathbb{Z}$ tale che $x = 12k + 5$. Sostituendo ciò nella seconda condizione del sistema abbiamo che

$$5 + 12k \equiv 4 \pmod{7},$$

cioè $12k \equiv -1 \pmod{7}$. L'inverso moltiplicativo di $12 \equiv 5 \pmod{7}$ è 3 e quindi se moltiplichiamo per 3 otteniamo:

$$k \equiv -3 \equiv 4 \pmod{7}$$

cioè esiste $j \in \mathbb{Z}$ tale che $k = 7j + 4$. Quindi in particolare

$$x = 5 + 12k = 5 + 12(7j + 4) = 5 + 84j + 48 = 53 + 84j.$$

Abbiamo così trovato la soluzione del sistema, cioè $x \equiv 53 \pmod{84}$.

Da un punto di vista più teorico, il Teorema 4.4 (Teorema cinese del resto) è essenziale in problemi come i seguenti.

Esercizio 4.30. Dimostrare che esistono 2017 interi consecutivi, ciascuno multiplo di un quadrato maggiore di 1. [Hint]

Esercizio 4.31. Dimostrare che, per ogni intero positivo n, esistono n interi consecutivi che non sono potenze perfette. Diciamo che un intero positivo è una potenza perfetta se si può scrivere nella forma m^k, con m, k interi positivi maggiori di 1. [Hint]

4.7 Struttura moltiplicativa

L'obiettivo di questa sezione è studiare come si comportano le potenze di un intero a modulo un altro intero m, cioè $a^0, a^1, a^2, \dots$ modulo m. Di particolare interesse sarà il caso in cui $(a, m) = 1$, cioè quando a ed m sono coprimi.

Esercizio 4.32. Dimostrare che la successione $\{a^n \bmod m\}_{n\in\mathbb{N}}$, costituita dalle classi di congruenza di a^n modulo m, è definitivamente periodica, cioè esistono $k, N \in \mathbb{N}$ tali che

$$a^{k+n} \equiv a^n \pmod{m} \qquad \text{per ogni } n \geq N\,.$$

Inoltre mostrare che se $(a, m) = 1$, allora tale successione è periodica (cioè la proprietà vale con $N = 0$). [Hint]

Definizione 4.5. Dati $a, m \in \mathbb{N}$ tali che $(a, m) = 1$, il periodo delle potenze di a modulo m (che esiste per l'esercizio precedente) è detto *ordine* di a modulo m e si denota $\operatorname{ord}_m(a)$.

Ricordiamo che il *periodo* di una successione periodica $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è il più piccolo $k \in \mathbb{N}$ tale che $a_{n+k} = a_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Esercizio 4.33. Dati $a, m \in \mathbb{N}$ coprimi, supponiamo che $a^n \equiv 1 \pmod{m}$ per un certo $n \in \mathbb{N}$. Allora $\operatorname{ord}_p(a)$ divide n.

Piccolo teorema di Fermat

Concentriamoci innanzitutto sul caso in cui m sia uguale ad un numero primo p. Notiamo innanzitutto che se $(a, p) \neq 1$, allora necessariamente p divide a, ma in questo caso osserviamo che banalmente $a^k \equiv 0 \pmod{p}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Dunque il caso interessante su cui ci concentreremo sarà quello in cui a è coprimo con p.

Teorema 4.6 (Piccolo teorema di Fermat)**.** *Dato un primo $p \in \mathbb{N}$, vale che*

$$a^p \equiv a \pmod{p}$$

per ogni $a \in \mathbb{N}$.

Osserviamo che se $a \equiv 0 \pmod{p}$ la tesi del teorema è ovvia. Altrimenti, se $(a, p) = 1$, il Teorema 4.6 (Piccolo teorema di Fermat) mostra che

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}\,.$$

Vediamo ora due differenti dimostrazioni del Teorema 4.6 (Piccolo teorema di Fermat), presentate attraverso i seguenti due esercizi.

Esercizio 4.34. Dimostrare il Teorema 4.6 (Piccolo teorema di Fermat) per induzione su a.

Esercizio 4.35. Dimostrare il Teorema 4.6 (Piccolo teorema di Fermat) attraverso le seguenti osservazioni:

1. Gli elementi $a, 2a, \dots, (p-1)a \pmod p$ rappresentano tutte le classi di congruenza modulo p.
2. Grazie al punto precedente abbiamo che $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (p-1) \equiv a \cdot 2a \cdot \dots \cdot (p-1)a \pmod p$.

Esercizio 4.36. Calcolare la classe di congruenza di 4^{2017} modulo 11.

Esercizio 4.37. Trovare tutte le coppie di primi (p, q) tali che $pq \mid 2^{pq} + 1$. [Hint]

Funzione ϕ di Eulero

Definizione 4.7. Dato un intero $n \in \mathbb{N}$ definiamo $\phi(n)$ (detta *funzione ϕ di Eulero*) come il numero degli interi fra 1 ed n che sono relativamente primi con n.

Esercizio 4.38. Dato un numero primo p vale che $\phi(p) = p - 1$ e più in generale che $\phi(p^k) = p^{k+1}(p-1)$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. [Hint]

Esercizio 4.39. Dati $a, b \in \mathbb{N}$ interi coprimi, vale che $\phi(a \cdot b) = \phi(a) \cdot \phi(b)$. In altre parole la funzione ϕ di Eulero è moltiplicativa sugli interi coprimi.

Mostrare il risultato appena enunciato seguendo la seguente traccia dimostrativa.

Dato $m \in \mathbb{N}$ definiamo $A_m = \{x \ : \ 0 \le x < m\,, (m, x) = 1\}$. Osservare che la cardinalità di A_m è esattamente $\phi(m)$.

Consideriamo quindi la funzione $\Theta : A_{a \cdot b} \to A_a \times A_b$ definita da

$$\Theta(x) = (x \bmod a, x \bmod b)\,,$$

cioè la funzione che prende un intero $0 \le x < m$ coprimo con m e lo riduce rispettivamente modulo a e modulo b.

1. Dimostare che un intero $x \in \mathbb{N}$ è coprimo con $a \cdot b$ se e solo se è coprimo sia con a che con b. Dunque la funzione Θ è ben definita.
2. Dimostrare che la funzione Θ è iniettiva e surgettiva grazie al Teorema 4.4 (Teorema cinese del resto).
3. Concludere che gli insiemi $A_{a \cdot b}$ e $A_a \times A_b$ hanno la stessa cardinalità e dunque $\phi(a \cdot b) = \phi(a) \cdot \phi(b)$.

Esercizio 4.40. Sia n un intero positivo con fattorizzazione $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_s^{\alpha_s}$. Allora vale che

$$\phi(n) = p_1^{\alpha_1 - 1}(p_1 - 1) \cdot \dots \cdot p_s^{\alpha_s - 1}(p_s - 1) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{p_s}\right)\,.$$

[Hint]

Esercizio 4.41. Dato un intero positivo n dimostrare che

$$\sum_{d|n} \phi(d) = n\,,$$

cioè che la somma di $\phi(d)$ sui divisori d di n è uguale n. [Hint]

Teorema di Eulero - Fermat

Vediamo ora un'estensione del Teorema 4.6 (Piccolo teorema di Fermat) al caso non necessariamente primo, cioè studiamo in generale le classi di congruenza di $a^0, a^1, a^2, \ldots$ modulo m per due interi a, m coprimi generici.

Teorema 4.8 (Eulero-Fermat)**.** *Dato un intero $m \in \mathbb{N}$, vale che*

$$a^{\phi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$$

per ogni $a \in \mathbb{N}$ coprimo con m.

Notare che questo risultato è esattamente il Teorema 4.6 (Piccolo teorema di Fermat) nel caso in cui m sia uguale ad un primo p.

Esercizio 4.42. Provare a riadattare la dimostrazione del Teorema 4.6 (Piccolo teorema di Fermat) vista nell'Esercizio 4.35 per dimostrare anche questo caso più generale. [Hint]

4.8 Hints

Esercizio 4.1: Utilizzare la definizione di divisibilità. (Testo)

Esercizio 4.2: Unendo le due equazioni ricavo $p+q = \frac{pq-1}{2}$, da cui $q = \frac{2p+1}{p-2}$, ma quando è che $p-2 \mid 2p+1$? (Testo)

Esercizio 4.3: Mostrare che un intero d divide sia a che b se e solo se divide sia r che b. Notare poi che questo è sufficiente a concludere. (Testo)

Esercizio 4.9: Quali sono le classi di congruenza di k, $k+1$, $k+2$? (Testo)

Esercizio 4.11: L'Equazione (4.2) ammette soluzione se e solo se esiste un intero y tale che $ax - my = b$. (Testo)

Esercizio 4.13: Scrivere il numero n considerato in base 10, cioè $n = a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \dots a_1 \cdot 10 + a_0$, con $0 \leq a_i < 10$ per ogni $i = 0, \dots, k$, e applicare le proprietà delle congruenze per studiare n modulo i vari numeri considerati. (Testo)

Esercizio 4.14: Fare la divisione di polinomi e scrivere il numero nella forma $p(n) + \frac{b}{n-2}$ per un opportuno polinomio p a coefficienti interi e un opportuno numero intero b. Considerare poi i divisori di b (anche quelli negativi...). (Testo)

Esercizio 4.16: Stringere la quantità $a^2 + 27a + 91$ tra due quadrati, in particolare trovare due interi b e c tali che $(a+b)^2 < a^2 + 27a + 91 < (a+c)^2$. A questo punto, detto n^2 il quadrato perfetto uguale ad $a^2 + 27a + 91$, n deve necessariamente essere uguale a uno tra $a+b+1, a+b+2, \dots, a+c-1$. (Testo)

Esercizio 4.17: Risolvere dapprima il caso in cui (almeno) uno tra a, b e c è uguale a 0. Poi, senza perdita di generalità, si può assumere che l'intero massimo, in valore assoluto, sia a. Allora scrivere $a^n = -b^n - c^n$ e dividere entrambi i membri per a^n. Cosa succede per n *grande* alle potenze n-esime di un numero minore di 1? (Testo)

Esercizio 4.18: Ricordarsi che $(a, b) = (a-bc, b)$ per ogni c intero e usarlo per ricondursi all'MCD fra un numero intero e una quantità che dipende da n $((2n+3, n+7) = ((2n+3) - 2 \cdot (n+7), n+7) = (11, n+7))$. (Testo)

Esercizio 4.19: Dimostrare che se p è un numero primo tale che $p \mid A+1$ allora $p \mid B+1$ e viceversa. (Testo)

Esercizio 4.20: Usare Esercizio 1.3. (Testo)

Esercizio 4.21: Ricordarsi i criteri di divisibilità per 3 e per 9. (Testo)

Esercizio 4.22: Considerare la prima equazione modulo 3, sfruttando che a^2 può assumere solo i valori $0, 1$ modulo 3. Guardare anche le altre equazioni modulo un numero opportuno. (Testo)

Esercizio 4.23: Chiamare a e b i cateti e c l'ipotenusa. Che equazione soddisfano? Guardarla modulo 4. (Testo)

Esercizio 4.24: La sequenza modulo 2017 è periodica (senza antiperiodo!) (Testo)

Esercizio 4.25: Per la prima parte, dimostrare che esiste a tale che sia a sia $a + 1$ stanno nell'insieme dei numeri scelti; per la seconda parte, scrivere ogni numero nella forma $2^k \cdot d$ con d dispari. (Testo)

Esercizio 4.26: I numeri possono essere congrui a 0, 1 o 2 modulo 3. Se ce ne sono tre dello stesso tipo, la tesi è vera (perché?); altrimenti ce ne è almeno uno per tipo, e anche in questo caso la tesi è vera (perché?). (Testo)

Esercizio 4.27: Ragionare per assurdo: se la tesi fosse falsa avrei $a^2 \equiv p \pmod{p^2}$ e quindi esisterebbe un intero b tale che $a^2 = bp^2 + p = p(1 + bp)$. Ora guardare la parità dei fattori p in a^2 e $p(1 + bp)$ e trovare un assurdo. (Testo)

Esercizio 4.29: Nel punto 3, più precisamente, dimostrare per induzione su b che la disuguaglianza vale per $p > 3$ e $b \geq 2$, e vale per $p = 3$ e $b \geq 3$. Il caso $p = 3$, $b = 2$ fornisce in effetti l'unico n che va bene! (Testo)

Esercizio 4.30: Se p è un primo, allora un numero x multiplo di p^2 soddisfa $x \equiv 0 \pmod{p^2}$. Dunque scegliamo 2017 numeri primi distinti $p_0, \ldots, p_{2016}$ e cerchiamo un intero n tale che $n + k$ sia multiplo di p_k^2 per ogni $k = 0, \ldots, 2016$. Questo si riduce ad un sistema di congruenze che possiamo risolvere con il Teorema 4.4 (Teorema cinese del resto). (Testo)

Esercizio 4.31: Notare che se un intero x rispetta $x \equiv p \pmod{p^2}$ per qualche primo p, allora non può essere una potenza perfetta. (Testo)

Esercizio 4.32: Considerare i valori di $a^0, a^1, \ldots, a^m$ modulo m e osservare che per il principio dei cassetti almeno due di questi valori devono coincidere. Nel caso in cui $(a, m) = 1$, osservare che se $a^{n+k} \equiv a^n \pmod{m}$ è possibile semplificare a^n ed ottenere $a^k \equiv 1 \pmod{m}$. (Testo)

Esercizio 4.37: Deve valere che $2^{pq} \equiv -1 \pmod{p}$, ma questo implica che $2^{2q} \equiv 1 \pmod{p}$ (perché?) e quindi $\mathrm{ord}_p(2) \mid 2q$. Notare che questo mi dice che $\mathrm{ord}_p(2)$ è uno fra $1, 2, q, 2q$. Fare ora lo stesso ragionamento scambiando p e q. (Testo)

Esercizio 4.38: Quanti sono i multipli di p fra 1 e $p - 1$? E fra 1 e $p^k - 1$? (Testo)

Esercizio 4.40: Utilizzare gli esercizi precedenti. (Testo)

Esercizio 4.41: Considerare le frazioni $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n}{n}$ e ridurle ai minimi termini (cioè semplificare i fattori comuni a numeratore e denominatore in ogni frazione). Allora il numero di frazioni che dopo la semplificazione avrà denominatore uguale a d, con $d \mid n$, è esattamente $\phi(d)$. (Testo)

Esercizio 4.42: Questa volta considerare le classi $\{x_1, \ldots, x_{\phi(m)}\}$ coprime con m e notare che $\{ax_1, \ldots, ax_{\phi(m)}\}$ rappresentano le stesse classi (eventualmente permutate). (Testo)

4.9 Problemi

N1. Trovare tutte le quadruple (p, q, r, n) di interi positivi tali che p e q sono primi, $p + q$ non è divisibile per 3 e inoltre

$$p + q = r(p - q)^n .$$

[Hint] [Soluzione]

N2. Dato un primo p congruo a 2 modulo 3, dimostrare che esistono al massimo $p - 1$ coppie di interi (m, n) con $0 < m, n < p$ tali che p divida $n^3 - m^2 + 1$. [Hint] [Soluzione]

N3. Dato un intero positivo n, dimostrare che ogni naturale $m \leq n!$ può essere scritto come somma di al più n divisori distinti di $n!$. [Hint] [Soluzione]

N4. Siano a, b interi positivi strettamente maggiori di 1 e sia inoltre $f(n)$ un polinomio a coefficienti interi. Si sa che esiste $N > 0$ naturale tale che

$$b^n \mid a^n + f(n)$$

per ogni $n > N$. Dimostrare che $b \mid a$ e $f(n)$ è il polinomio nullo. [Hint] [Soluzione]

4.9.1 Hints dei problemi

Problema N1: Data una quadrupla che rispetta le richieste, necessariamente deve valere che $p - q \mid p + q$, ma qual è l'MCD fra $p - q$ e $p + q$? (Testo)

Problema N2: Cercare di dimostrare che fissato m compreso fra 1 e $p - 1$ esiste al più un n tale che $n^3 - m^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$. (Testo)

Problema N3: Cercare di dimostrare il risultato per induzione su n, sfruttando la divisione euclidea di m per n, cioè scrivendo $m = nq + r$ con $0 \leq r < n$. (Testo)

Problema N4: Provare a combinare la relazione del testo per due interi n, $n + 1$ consecutivi. In particolare, l'idea chiave è che se $f(x)$ è un polinomio allora anche $f(x + 1) - f(x)$ è un polinomio. (Testo)

4.9.2 Soluzioni

Soluzione di N1: Consideriamo una quadrupla (p, q, r, n) che rispetta le richieste. Notiamo innanzitutto che se p e q sono uguali l'equazione non ha soluzione, dunque possiamo supporre che p e q siano distinti. Inoltre supponiamo per il momento che $p > q$. Vedremo poi che il caso $q < p$ si ottiene facilmente da questo.

Deve valere che

$$p - q \mid r(p-q)^n = p + q$$

e di conseguenza abbiamo che

$$p - q = (p - q, p + q) = (p + q - (p - q), p - q) = (2q, p - q) = (2, p - q)\,,$$

in quanto abbiamo supposto che p e q siano distinti e dunque coprimi.

Abbiamo perciò due casi:

1. Se $q = 2$ (che è l'unico caso in cui $p - q$ non è pari), allora $p - q = (2, p - q) = 1$ e perciò $p = 3$. In tal caso l'equazione diventa $5 = r$ e dunque abbiamo che le quadruple $(3, 2, 5, n)$ rispettano l'equazione per ogni n intero positivo.

2. Se $q \geq 3$, allora $p - q$ è necessariamente pari e $p - q = (2, p - q) = 2$. Di conseguenza vale che $p = q + 2$. Studiamo dunque le varie possibilità modulo 3:

   - Se $q \equiv 0 \pmod 3$, allora necessariamente dobbiamo avere $q = 3$ e $p = 5$, poiché q è primo. L'equazione diventa allora

     $$8 = r \cdot 2^n\,,$$

     che ci dà le quadruple di soluzione $(p, q, r, n) = (5, 3, 4, 1), (5, 3, 2, 2), (5, 3, 1, 3)$.

   - Se $q \equiv 1 \pmod 3$, allora $p \equiv 0 \pmod 3$, che è impossibile perché $p > q \geq 3$ e p è primo.

   - Se $q \equiv 2 \pmod 3$, allora $p + q \equiv (q + 2) + q \equiv 0 \pmod 3$, che è impossibile per ipotesi.

Abbiamo dunque ottenuto che tutte le quadruple di interi positivi che rispettano le richieste e per cui $p > q$ sono $(p, q, r, n) = (5, 3, 4, 1)$, $(5, 3, 2, 2)$, $(5, 3, 1, 3)$ e $(3, 2, 5, n)$ per ogni n intero positivo.

Osserviamo ora che se $p < q$, allora necessariamente n deve essere pari, altrimenti $r(p - q)^n$ sarebbe negativo, mentre $p + q$ positivo. Però, se n è pari, l'equazione diventa $q + p = r(q - p)^n$, cioè esattamente l'equazione iniziale a meno di scambiare p e q. Dunque le soluzioni per le quali $p < q$ sono $(p, q, r, n) = (3, 5, 2, 2)$ e $(2, 3, 5, n)$ per ogni n intero positivo pari. (Testo)

Soluzione di N2: Fissiamo m compreso fra 1 e $p - 1$ e vediamo quanti n possono esistere nello stesso intervallo tali che

$$n^3 \equiv m^2 - 1 \pmod p\,.$$

Supponiamo che esistano $0 < n_1, n_2 < p$ tali che

$$n_1^3 \equiv n_2^3 \equiv m^2 - 1 \pmod{p}.$$

Allora in particolare

$$n_1^3 \equiv n_2^3 \pmod{p} \implies \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^3 \equiv 1 \pmod{p},$$

dove con $\frac{n_1}{n_2}$ indichiamo n_1 moltiplicato per l'inverso di n_2 modulo p, che esiste per l'Esercizio 4.11.

Dunque $\text{ord}_p(\frac{n_1}{n_2})$ divide sia 3 che $p-1$, ma per ipotesi $p-1$ non è divisibile per 3 e perciò $\text{ord}_p(\frac{n_1}{n_2}) = 1$, cioè

$$\frac{n_1}{n_2} \equiv 1 \pmod{p} \implies n_1 \equiv n_2 \pmod{p}.$$

Dunque, per ogni $0 < m < p$ ci può essere al più un n fra 1 e $p-1$ tale che $n^3 - m^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$. Di conseguenza il numero di coppie di interi (m, n) che rispettano le richieste sono al più quante le scelte di m compreso fra 1 e $p-1$, cioè $p-1$.

Nota. Osservare che l'insieme $\{1^3, 2^3, \ldots, (p-1)^3\}$ coincide in realtà con le classi di resto modulo p diverse da 0, cioè è uguale all'insieme $\{1, 2, \ldots, p-1\}$ (questo vuol dire che sono gli stessi elementi a meno di permutazione).

(Testo)

Soluzione di N3: Dimostriamo il risultato per induzione su n:

<u>Passo base</u>: Se $n = 1$ la tesi è ovvia, infatti l'unico caso è $m = 1$, in cui m è esso stesso un divisore di n.

<u>Passo induttivo</u>: Supponiamo di aver già dimostrato la tesi per n e dimostriamola per $n+1$. Sia dunque $m \leq (n+1)!$; siano inoltre r il resto della divisione di m per $n+1$ e q intero tale che $m = (n+1)q + r$. Allora sicuramente $0 \leq r < n+1$ e $0 \leq q \leq n!$, infatti

$$q = \frac{m-r}{n+1} \leq \frac{m}{n+1} \leq \frac{(n+1)!}{n+1} = n!.$$

Per ipotesi induttiva possiamo dunque scrivere q come somma di al più n divisori distinti di $n!$, che chiamiamo $d_1, d_2, \ldots, d_k$ (con $k \leq n$). Allora

$$m = (n+1)d_1 + (n+1)d_2 + \ldots (n+1)d_k + r$$

dove $(n+1)d_1, (n+1)d_2, \ldots (n+1)d_k, r$ sono facilmente tutti divisori di $(n+1)!$ e sono anche tutti distinti perché i primi k sono distinti tra loro e maggiori o uguali a $(n+1)$ mentre $r < n+1$. Perciò siamo riusciti a scrivere m come somma di al più $n+1$ divisori di $(n+1)!$, il che conclude la dimostrazione del passo induttivo.

(Testo)

Soluzione di N4: Dato $n > N$, per ipotesi vale che vale che

$$b^n \mid a^n + f(n) \mid a^{n+1} + af(n) \quad \text{e} \quad b^n \mid b^{n+1} \mid a^{n+1} + f(n+1)\,,$$

e prendendo la differenza otteniamo

$$b^n \mid f(n+1) - af(n)\,.$$

Poiché per ogni polinomio g vale che, se $b > 1$, allora $b^n > g(n)$ per n abbastanza grande (perché?), allora necessariamente deve valere che $f(n+1) - af(n)$ (che nel nostro caso gioca il ruolo del polinomio g) è il polinomio nullo, cioè

$$f(x+1) = af(x)\,.$$

Però, visto che $a > 1$, il coefficiente del termine di grado massimo dei due polinomi è diverso a meno che f non sia il polinomio nullo, che è dunque l'unico caso possibile.

A questo punto però $b^n \mid a^n$ per ogni $n > N$, ma questo implica necessariamente che $b \mid a$ (perché?). (Testo)

Allenamenti EGMO 2018 – Misto

5.1 Problemi

A1. Trovare tutti i polinomi cubici $f(x)$ a coefficienti interi tale che se $a+b+c=2$ e $a^2+b^2+c^2=2$ con a,b,c numeri reali allora $f(a)=f(b)=f(c)$. [Hint] [Soluzione]

C2. In ogni vertice di un poligono regolare con 2017 vertici c'è un intero, in modo che la somma degli interi di tutti i vertici sia 1. Scriviamo le somme dei primi k interi in senso antiorario per $k=1,\dots,2017$, partendo da un qualche vertice. È sempre possibile scegliere il vertice di partenza in modo che tutte queste somme siano positive? [Hint] [Soluzione]

G3. Sia ABC un triangolo acutangolo, siano inoltre O il suo circocentro e D il punto medio di BC. La circonferenza di diametro AD interseca i lati AB, AC nuovamente in E, F rispettivamente. La retta passante per D parallela ad AO interseca EF in M. Dimostrare che $EM = MF$. [Hint] [Soluzione]

N4. Sia a un numero intero. Dimostrare che esistono infiniti interi b tali che esiste un unico numero primo p della forma $u^2+2au+b$ con u intero. [Hint] [Soluzione]

5.1.1 Hints dei problemi

Problema A1: Gli a, b, c che rispettano $a + b + c = a^2 + b^2 + c^2 = 2$ sono radici di polinomi di terzo grado di una certa forma, quale? (Testo)

Problema C2: Considerare la somma minima di interi in vertici consecutivi e provare a partire dal vertice successivo. (Testo)

Problema G3: Iniziare mostrando che $\angle FDM = \beta$ e $\angle EDM = \gamma$. (Testo)

Problema N4: Provare a scrivere $u^2 + 2au + b$ come differenza di due quadrati, in questo modo otteniamo gratuitamente una fattorizzazione. (Testo)

5.1.2 Soluzioni

Soluzione di A1: Vogliamo dimostrare che i polinomi cubici a coefficienti interi che rispettano la condizione del testo sono tutti e soli quelli della forma $f(x) = ux^3 - 2ux^2 + ux + v$ con u, v interi.

Mostriamo innanzitutto che i polinomi di questa forma rispettano la condizione. Sia $f(x) = ux^3 - 2ux^2 + ux + v$ con u, v interi e siano a, b, c reali tali che $a+b+c = a^2+b^2+c^2 = 2$. Il polinomio di terzo grado $p(x)$ che ha a, b, c come radici è

$$\begin{aligned} p(x) = (x-a)(x-b)(x-c) &= x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x - abc = \\ &= x^3 - (a+b+c)x^2 + \frac{1}{2}[(a+b+c)^2 - (a^2+b^2+c^2)]x - abc = \\ &= x^3 - 2x^2 + x - abc\,. \end{aligned}$$

Sfruttando quindi che $p(a) = 0$, abbiamo che $a^3 = 2a^2 - a + abc$, dunque

$$f(a) = ua^3 - 2ua^2 + ua + v = u(2a^2 - a + abc) - 2ua^2 + ua + v = uabc + v\,,$$

che è un'espressione simmetrica in a, b, c ed infatti si ottiene similmente che $f(a) = f(b) = f(c) = uabc + v$.

Ci rimane dunque solo da mostrare che i polinomi che rispettano le ipotesi sono tutti di quella forma. L'idea è sfruttare che, se un polinomio $x^3 - 2x^2 + x + t$ con t reale ha tre radici reali a, b, c, allora $a + b + c = a^2 + b^2 + c^2 = 2$ (poiché queste espressioni sono legate ai coefficienti del polinomio, come abbiamo visto sopra).

Sia dunque $f(x)$ un polinomio che rispetta le ipotesi. Consideriamo il polinomio $p(x) = x^3 - 2x^2 + x - \frac{1}{8}$ e chiamiamo a, b, c le sue radici, per le quali vale che $a+b+c = 2$ e $a^2 + b^2 + c^2 = 2$. Mostriamo che a, b, c sono tre numeri reali distinti. Il polinomio p si può fattorizzare come

$$\begin{aligned} p(x) &= \left(x^3 - \frac{1}{8}\right) - 2x\left(x - \frac{1}{2}\right) = \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right) - 2x\left(x - \frac{1}{2}\right) = \\ &= \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{4}\right)\,, \end{aligned}$$

perciò, visto che $x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{4}$ ha discriminante strettamente positivo e $\frac{1}{2}$ non è una sua radice, p ha tre radici reali distinte.

Il polinomio $f(x) - f(a)$ ha a, b, c come radici per ipotesi, infatti $a+b+c = a^2+b^2+c^2 = 2$. Inoltre $f(x) - f(a)$ è un polinomio di grado tre e a, b, c sono tre numeri reali distinti, dunque abbiamo che

$$f(x) - f(a) = u(x-a)(x-b)(x-c) = up(x) = u\left(x^3 - 2x^2 + x - \frac{1}{8}\right)$$

$$\implies f(x) = ux^3 - 2ux^2 + ux + v\,,$$

dove $v = f(a) - \frac{1}{8}u$. Perciò $f(x)$ è della forma cercata e, visto che abbiamo già dimostrato che tutti i polinomi di questa forma rispettano le ipotesi, questo conclude la dimostrazione. (Testo)

Soluzione di C2: Numeriamo i vertici del poligono con i numeri da 0 a 2016 partendo da un vertice generico e muovendoci in senso antiorario. Chiamiamo inoltre $v_0, \ldots, v_{2016}$ gli interi scritti sui rispettivi vertici.

Nota. Quando parleremo del k-esimo vertice per un intero positivo k, indicheremo in realtà il vertice k modulo 2017.

Sia x il minimo valore assunto da $v_0 + \ldots + v_m$ al variare di $m = 0, \ldots, 2016$ e sia m_0 il massimo valore di $m = 0, \ldots, 2016$ tale che $v_0 + \ldots + v_{m_0} = x$.

Vogliamo dimostrare che partendo dal vertice $m_0 + 1$ otteniamo quanto cercato, cioè che la somma dei primi k interi che si trovando muovendosi in senso antiorario a partire da $m_0 + 1$ è positiva per ogni $k = 1, \ldots, 2017$.

Supponiamo per assurdo che non sia così ed esista perciò k fra 1 e 2017 tale che $v_{m_0+1} + \ldots + v_{m_0+k}$ sia minore o uguale a 0. Allora vale che

$$v_0 + \ldots + v_{m_0} + v_{m_0+1} + \ldots + v_{m_0+k} = x + v_{m_0+1} + \ldots + v_{m_0+k} \leq x\,.$$

Dobbiamo distinguere ora due casi:

- Se $m_0 + k \leq 2016$, per minimalità di m_0 vale in particolare che $v_0 + \ldots + v_{m_0} + v_{m_0+1} + \ldots + v_{m_0+k} = x$. Questo però è impossible perché m_0 è il massimo m fra 0 e 2016 per cui $v_0 + \ldots + v_m = x$.

- Se $m_0 + k > 2016$, sia $1 \leq h \leq k$ tale che $m_0 + h = 2017$ (cioè $m_0 + h$ corrisponde al vertice 0). Allora abbiamo che

$$\begin{aligned} v_0 + \ldots + v_{m_0+k-2017} &= v_{m_0+h} + \ldots + v_{m_0+k} = \\ &= v_0 + \ldots + v_{m_0+k} - (v_0 + \cdots + v_{m_0+h-1}) \leq x - 1\,, \end{aligned}$$

  ma questo è impossibile perché x era il minimo valore assunto da una somma $v_0 + \ldots + v_m$ al variare di $m = 0, \ldots, 2016$.

In entrambi i casi abbiamo trovato un assurdo e dunque abbiamo concluso la dimostrazione.

(Testo)

Soluzione di G3: Innanzitutto notiamo che E ed F coincidono con le proiezioni di D sui lati AB e AC rispettivamente, perciò $\angle AED = \angle AFD = 90°$.

Osserviamo poi che $\angle MDF$ coincide con l'angolo che la retta FD forma con la retta AO ed è dunque uguale a $90° - \angle FAO = \beta$. Analogamente $\angle MDE = \gamma$.

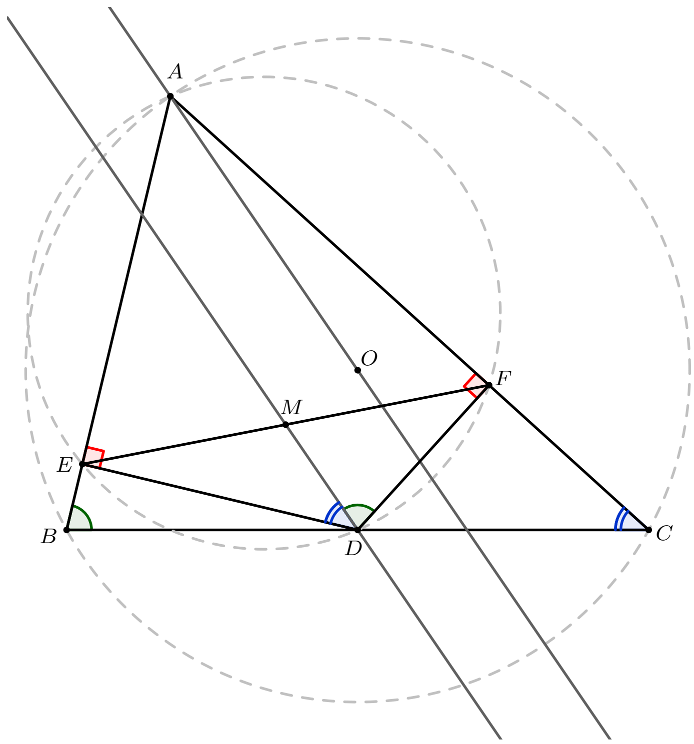
Dunque, per il teorema dei seni sui triangoli MDE e MDF, abbiamo che

$$\frac{ME}{\sin\gamma} = \frac{DE}{\sin(\angle DME)} \quad \text{e} \quad \frac{MF}{\sin\beta} = \frac{DF}{\sin(\angle DMF)}$$

da cui ricaviamo che

$$\frac{ME}{MF} = \frac{DE\sin\gamma}{DF\sin\beta}\,,$$

visto che $\angle DME + \angle DMF = 180°$ e perciò $\sin(\angle DME) = \sin(\angle DMF)$.



D'altra parte vale che $DE = BD \sin\beta$ e $DF = CD \sin\gamma$, poiché i triangoli BDE e BDF sono rettangoli. Dunque concludiamo che

$$\frac{ME}{MF} = \frac{DE \sin\gamma}{DF \sin\beta} = \frac{BD \sin\beta \sin\gamma}{CD \sin\gamma \sin\beta} = 1\,,$$

da cui $EM = MF$, come cercato. (Testo)

Soluzione di N4: Notiamo innanzitutto che

$$u^2 + 2au + b = (u+a)^2 + (b - a^2)\,,$$

quindi la tesi è equivalente a dimostrare che esistono infiniti interi c tali che esiste un unico numero primo p della forma v^2+c con v intero. Infatti, dato un tale intero c, l'intero $b = c + a^2$ rispetta l'ipotesi del testo, vediamo perché. Dato che $v^2 + c = v^2 + (b - a^2)$ assume un unico valore primo al variare di v intero, allora anche $(u+a)^2+(b-a^2)$ assume un unico valore primo al variare di u intero, poiché assume facilmente gli stessi valori di $v^2 + (b - a^2)$ ($u + a$ e v assumono gli stessi valori al variare di u, v interi).

Sia dunque p un primo dispari e scegliamo $c = -\left(\frac{p-1}{2}\right)^2$, allora

$$v^2 + c = v^2 - \left(\frac{p-1}{2}\right)^2 = \left(v - \frac{p-1}{2}\right)\left(v + \frac{p-1}{2}\right).$$

Se $v - \frac{p-1}{2}$ e $v + \frac{p-1}{2}$ sono entrambi diversi da ± 1, il loro prodotto non è sicuramente primo, quindi è sufficiente studiare i seguenti quattro casi:

- $v - \frac{p-1}{2} = 1$, cioè $v = \frac{p-1}{2} + 1$, allora

$$\left(v - \frac{p-1}{2}\right)\left(v + \frac{p-1}{2}\right) = p\,.$$

- $v - \frac{p-1}{2} = -1$, cioè $v = \frac{p-1}{2} - 1$, allora
$$\left(v - \frac{p-1}{2}\right)\left(v + \frac{p-1}{2}\right) = -(p-2)\,.$$
- $v + \frac{p-1}{2} = 1$, cioè $v = -\frac{p-1}{2} + 1$, allora
$$\left(v - \frac{p-1}{2}\right)\left(v + \frac{p-1}{2}\right) = -(p-2)\,.$$
- $v + \frac{p-1}{2} = -1$, cioè $v = -\frac{p-1}{2} - 1$, allora
$$\left(v - \frac{p-1}{2}\right)\left(v + \frac{p-1}{2}\right) = p\,.$$

Abbiamo dunque dimostrato che l'unico valore primo che assume $v^2 - \left(\frac{p-1}{2}\right)^2$ al variare di v intero è p (perché $-(p-2)$ è negativo e dunque non è primo), il che conclude la dimostrazione poiché possiamo scegliere il primo p (e dunque fare questa costruzione) in infiniti modi. (Testo)

Allenamenti EGMO 2018 – 6

6.1 Problemi

A1. Determinare tutte le funzioni $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ surgettive tali che per ogni $x \in (0, +\infty)$ valga
$$xf(x) + f(x)f(f(x)) = 2xf(f(x)) .$$

[Hint] [Soluzione]

C2. Alberto e Barbara giocano su una tabella 2017×2017. All'inizio, Alberto colora di nero alcune caselle. Poi, a turno iniziando da Barbara, piazzano un sassolino in una casella della tabella. Non è consentito mettere un sassolino né su una casella nera né su una riga o colonna dove c'è già un altro sassolino. Perde chi non può più muovere. Qual è il minimo numero di caselle che Alberto deve colorare di nero per essere sicuro di vincere? [Hint] [Soluzione]

G3. Sia ABC un triangolo acutangolo inscritto nella circonferenza c, con $AB < AC < BC$. La circonferenza di centro A e raggio AC interseca c nel punto D e la retta BC nel punto E. Sia F l'intersezione di AE con c, infine sia G il simmetrico di E rispetto a B. Dimostrare che il quadrilatero $DEFG$ è ciclico. [Hint] [Soluzione]

N4. Sia n un intero positivo dispari e siano $a_1, a_2, \ldots, a_n$ interi positivi con prodotto P. Dimostrare che
$$\mathrm{MCD}(a_1^n + P, \ldots, a_n^n + P) \leq 2(\mathrm{MCD}(a_1, \ldots, a_n))^n .$$

[Hint] [Soluzione]

6.1.1 Hints dei problemi

Problema A1: Dimostrare che f è anche iniettiva, quindi anche invertibile f^{-1} soddisfa la stessa equazione! Esprimere poi $f^{(n)}(x)$ in funzione di x e $f(x)$ e usare il fatto che f assume valori positivi. (Testo)

Problema C2: Dimostrare per induzione su k che se su una tabella di lato dispari $2k+1$ sono colorate al più $2k$ caselle vince Barbara. (Testo)

Problema G3: Il centro della circonferenza circoscritta a $DEFG$ è B. (Testo)

Problema N4: Fare prima il caso in cui $(a_1, \ldots, a_n) = 1$, mostrando che se una potenza di primo $p^v \mid$ LHS allora $p = 2$ e $v = 1$. (Testo)

6.1.2 Soluzioni

Soluzione di A1: Per prima cosa mostriamo che f è iniettiva, e dunque bigettiva perché è anche surgettiva per ipotesi. Siano $x, y \in \mathbb{R}^+$ tali che $f(x) = f(y) = a$. Allora sostituendo nel testo si ha che

$$\begin{aligned} xa + af(a) &= 2xf(a) \\ ya + af(a) &= 2yf(a)\,, \end{aligned}$$

da cui sottraendo membro a membro si ottiene $(x-y)(a-2f(a)) = 0$, ma se $a-2f(a) = 0$ (cioè $f(a) = \frac{a}{2}$) allora sostituendo nella prima equazione si ottiene $xa + \frac{a^2}{2} = xa$ se e solo se $\frac{a^2}{2} = 0$ che è impossibile perché f assume valori in $(0, +\infty)$. Concludiamo quindi che deve essere $x = y$, cioè f è iniettiva.

Chiamiamo g l'inversa di f, allora abbiamo che $g : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$. Questa g soddisfa la stessa equazione funzionale di f: sia infatti $y = f(f(x))$ (sappiamo che per ogni x esiste un solo y e viceversa), allora $xf(x)+f(x)f(f(x))-2xf(f(x)) = g(g(y))g(y)+g(y)y - 2g(g(y))y$.

Ora mostriamo che vale la seguente formula:

$$f^{(n)}(x) = \frac{xf(x)}{nx-(n-1)f(x)}\,. \tag{6.1}$$

Si può mostrare per induzione su n: per $n = 0$ e $n = 1$ è vera; dall'equazione del testo otteniamo che $f(f(x)) = \frac{xf(x)}{2x-f(x)}$ (osserviamo che $2x - f(x) \neq 0$ altrimenti sostituendo nel testo otterremmo $2x^2 + 2xf(2x) = 2xf(2x) \implies x = 0$ che è impossibile) dunque

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \frac{f^{(n-1)}(x)f^{(n)}(x)}{2f^{(n-1)}(x) - f^{(n)}(x)} \\ &= \frac{\frac{xf(x)\cdot xf(x)}{((n-1)x-(n-2)f(x))\cdot(nx-(n-1)f(x))}}{2\frac{xf(x)}{(n-1)x-(n-2)f(x)} - \frac{xf(x)}{nx-(n-1)f(x)}} \\ &= \frac{xf(x)}{2(nx-(n-1)f(x)) - ((n-1)x-(n-2)f(x))} \\ &= \frac{xf(x)}{(n+1)x-nf(x)}\,. \end{aligned}$$

Ora, poiché per ogni x reale positivo e per ogni n naturale positivo il numero $f^{(n)}(x)$ è reale positivo, si deve avere che il denominatore è positivo: $nx - (n-1)f(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^+$ e per ogni $n \in \mathbb{N}_0$, ossia $f(x) < \frac{n}{n-1}x$ per ogni $x \in \mathbb{R}^+$ e per ogni $n \in \mathbb{N}_0$. Quindi poiché $\frac{n}{n-1}$ tende a 1 per n che tende a infinito, si deve avere che $f(x) \leq x$ per ogni $x \in \mathbb{R}^+$. Poiché anche la funzione inversa f^{-1} soddisfa la stessa equazione, si ha che $f^{-1}(f(x)) \leq f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}^+$ ossia $x \leq f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}^+$. Dunque l'unica possibilità è che $f(x) = x$ per ogni $x \in \mathbb{R}^+$. Resta soltanto da verificare che questa vada bene: sostituendo nel testo si ottiene che $x \cdot x + x \cdot x = 2x \cdot x$, quindi in effetti $f(x) = x$ è l'unica soluzione del problema. (Testo)

Soluzione di C2: Il minimo numero di caselle che Alberto deve colorare di nero per essere sicuro di vincere è 2017. Partiamo dalla parte facile della soluzione: dimostrare che con 2017 caselle colorate vince Alberto. Basta che Alberto colori di nero tutte le caselle della prima riga; in tal caso, qualunque siano le mosse dei due giocatori, si faranno esattamente 2016 mosse (perché?), dunque poiché inizia Barbara e 2016 è pari vince Alberto.

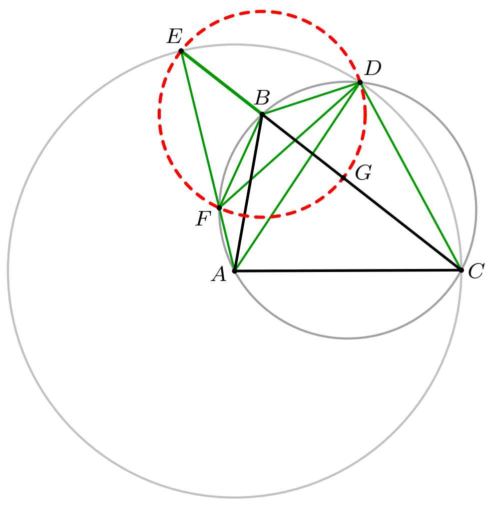
Per dimostrare che 2017 caselle nere sono necessarie, dimostriamo per induzione su k che se si ha una tabella $(2k+1) \times (2k+1)$ con al più $2k$ caselle nere, allora vince Barbara (questo risultato con $k = 1008$ ci dà la tesi).

Passo base: $k = 0$. C'è una sola casella bianca; Barbara gioca e ci mette un sassolino, Alberto perde perché non ha più mosse legali.

Passo induttivo: Dimostriamo che se la tesi vale per $k-1$ allora vale anche per k. Se Barbara si trova davanti una tabella $(2k+1) \times (2k+1)$ con al più $2k$ caselle nere, potrà sempre scegliere di mettere il sassolino in modo da "cancellare" almeno due caselle nere, cioè in modo che nella tabella che risulta dall'eliminazione della riga e della colonna in cui Barbara ha posto il sassolino ci siano al più $2k-2$ caselle nere (perché?). A questo punto Alberto può sicuramente muovere perché rimane una tabella con $2k \cdot 2k = 4k^2$ caselle di cui al più $2k-2$ sono nere, dunque ce ne è almeno una libera perché $4k^2 > 2k-2$. Allora qualsiasi sia la mossa di Alberto, cancellando anche la colonna e la riga in cui Alberto ha messo il suo sassolino, otterremo una tabella $(2k-1) \times (2k-1)$ con al più $(2k-2)$ caselle nere, e vince Barbara per ipotesi induttiva.

(Testo)

Soluzione di G3: Dimostreremo che i punti D, E, F e G stanno sulla circonferenza ω di centro B e raggio BF. Quindi per definizione il punto F appartiene a ω.



Per dimostrare che $E \in \omega$ basta dimostrare che il triangolo EBF è isoscele su base EF. Ma il triangolo ACE è isoscele su base EC perché AE ed AC sono raggi, quindi $\angle AEC =$

$\angle ECA = \gamma$; il quadrilatero $ACBF$ è ciclico (è inscritto in c) quindi $\angle EFB = \angle ACB = \gamma$, dunque il triangolo EBF è isoscele come voluto. Poiché per ipotesi $GB = BE$ anche G appartiene a ω.

Infine, per vedere che $D \in \omega$ basta dimostrare che il triangolo BDF è isoscele su base DF, dimostreremo che $\angle BDF = \angle BFD = \beta - \gamma$. Da una parte abbiamo che $\angle BFD = \angle BCD = \angle ACD - \angle ACB$, ma poiché il triangolo ADC è isoscele su base CD si ha che $\angle BFD = \angle ADC - \gamma = \angle ABC - \gamma = \beta - \gamma$. Dall'altra parte abbiamo che $\angle BDF = \angle BAF = \angle EAC - \angle BAC$ quindi usando di nuovo il fatto che il triangolo EAC è isoscele si ottiene che $\angle BDF = \pi - 2\gamma - \alpha = (\alpha + \beta + \gamma) - 2\gamma - \alpha = \beta - \gamma$ come voluto. (Testo)

Soluzione di N4: Dimostriamo il risultato inizialmente nel caso in cui $(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 1$ (cioè gli a_i sono coprimi tra loro). Sia p un primo che divide il LHS. Per prima cosa osserviamo che non si può avere che $p \mid P$ infatti, dovendo essere $p \mid a_i^n + P$ per ogni i si dovrebbe avere $p \mid a_i^n$ per ogni i, dunque $p \mid a_i$ per ogni i e quindi $p \mid (a_1, \ldots, a_n) = 1$, assurdo. In particolare quindi p non divide nessun a_i.

Sia ora $v = v_p(LHS)$ la valutazione p-adica del termine $\mathrm{MCD}(a_1^n + P, \ldots, a_n^n + P)$, cioè il numero di fattori p che compaiono in esso. Sia inoltre k numero naturale tale che $n = 2k + 1$. Si ha che $a_i^n + P \equiv 0 \mod p^v$ cioè

$$a_i^{2k+1} \equiv -a_1 \cdots a_n \mod p^v \,. \tag{6.2}$$

Poiché p non divide nessun a_i esiste l'inverso moltiplicativo di a_i modulo p^v. Moltiplicando entrambi i membri della 6.2 per tale inverso, otteniamo che $a_i^{2k} \equiv -\prod_{j \neq i} a_j$. Usando questa (tre volte) otteniamo che

$$\begin{aligned}(a_i^{2k})^{2k} &\equiv \prod_{j \neq i} a_j^{2k} \equiv \prod_{j \neq i} \left(-\prod_{\ell \neq j} a_\ell \right) \equiv a_i^{2k} \cdot \prod_{t \neq i} a_t^{2k-1} \\ &\equiv a_i^{2k} \cdot (-a_i^{2k})^{2k-1} \equiv -a_i^{4k^2} \mod p^v \,.\end{aligned}$$

Abbiamo ottenuto quindi che $2a_i^{4k^2} \equiv 0 \mod p^v$, ma sapendo che p non divide a_i resta solo una possibilità: $p = 2, v = 1$. Quindi nel caso di a_i coprimi abbiamo dimostrato la tesi.

Sia ora $d = (a_1, \ldots, a_n)$ e siano $b_i = \frac{a_i}{d}$, così si ha che $(b_1, \ldots, b_n) = 1$ e $P = d^n \cdot \prod b_i$. Allora per quanto dimostrato prima si ha che

$$\begin{aligned}2(a_1, \ldots, a_n)^n &= 2d^n (b_1, \ldots, b_n)^n \\ &\geq d^n \left(b_1^n + \prod b_i, \ldots, b_n^n + \prod b_i \right) = (a_1^n + P, \ldots, a_n^n + P) \,.\end{aligned}$$

(Testo)

Allenamenti EGMO 2018 – 7

7.1 Problemi

A1. Sia $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ un polinomio a coefficienti razionali di grado n. Sapendo che esiste $m_0 \in \mathbb{N}$ tale che per ogni intero $m > m_0$ anche $p(m)$ è intero, dimostrare che $n!a_n$ è intero. [Hint] [Soluzione]

C2. Alberto e Barbara fanno il seguente gioco. Inizialmente Alberto sceglie una parola, cioè una stringa non vuota di lettere maiuscole. A questo punto Barbara sceglie un intero $k \geq 0$ e sfida Alberto a fornire una parola con esattamente k sottosequenze uguali alla parola scelta inizialmente da Alberto. Alberto vince se riesce a costruire una tale parola, altrimenti perde.

Per esempio, se Alberto sceglie la parola "GST" e Barbara sceglie $k = 5$, allora Alberto può fornire in risposta la parola "GSGSST", che ha 5 sottosequenze uguali a "GST".

Quali sono le parole che Alberto può scegliere affinché vinca a prescindere dal valore k scelto da Barbara?

(Le sottosequenze di una stringa di lunghezza n sono le 2^n stringhe formate cancellando alcuni dei suoi caratteri - eventualmente tutti o nessuno - preservando l'ordine dei caratteri rimanenti.) [Hint] [Soluzione]

G3. Sia ABC un triangolo con baricentro G. La circonferenza circoscritta ad ABG interseca la retta BC in B e in X. La circonferenza circoscritta ad ACG interseca la retta BC in C e in Y. Dimostrare che G è anche baricentro di AXY. [Hint] [Soluzione]

N4. Sia n un intero positivo e sia p un numero primo. Siano a, b, c interi (non necessariamente positivi) tali che $a^n + pb = b^n + pc = c^n + pa$. Dimostrare che $a = b = c$. [Hint] [Soluzione]

7.1.1 Hints dei problemi

Problema A1: Qual è il coefficiente di testa di $p_1(x) = p(x+1) - p(x)$? E di $p_2(x) = p_1(x+1) - p_1(x)$? (Testo)

Problema C2: Cosa succede se Alberto sceglie una parola che ha le lettere *a gruppetti* di almeno due lettere uguali consecutive e Barbara sceglie $k = 2$? (Testo)

Problema G3: Sia P il punto medio di BC. Per dimostrare che $XP = PY$ usare le potenze di un punto rispetto alle due circonferenze. (Testo)

Problema N4: Ricavare p da ciascuna delle tre equazioni date, poi moltiplicarle tutte tra loro. (Testo)

7.1.2 Soluzioni

Soluzione di A1: Definiamo la successione di polinomi

$$\begin{cases} p_0(x) = p(x) \\ p_{k+1}(x) = p_k(x+1) - p_k(x) \qquad \text{per } k \geq 0 \end{cases}$$

e dimostriamo per induzione su k (per $0 \leq k \leq n$) che $p_k(m)$ è intero per ogni $m > m_0$ intero, il grado di $p_k(x)$ è $n-k$ e il coefficiente di testa di $p_k(x)$ è $\frac{n!}{(n-k)!}a_n$. Fatto questo, è facile concludere la dimostrazione perché otterremmo che $p_n(x)$ è il polinomio costante uguale a $n!a_n$ ed è intero per infiniti valori di x, dunque è intero sempre, cioè $n!a_n$ è intero.

Passo base: $k = 0$. Per ipotesi si ha che il grado di $p_0(x)$ è n, il coefficiente di testa è $\frac{n!}{n!}a_n = a_n$ e $p(m)$ è intero per ogni $m > m_0$.

Passo induttivo: Passiamo da k a $k+1$ (con $0 \leq k \leq n-1$). Chiamiamo b_k il coefficiente del termine di grado $n-k-1$ del polinomio $p_k(x)$. Per definizione, si ha che

$$\begin{aligned} p_{k+1}(x) =& p_k(x+1) - p_k(x) \\ =& \frac{n!}{(n-k)!}a_n(x+1)^{n-k} + b_k(x+1)^{n-k-1} - \frac{n!}{(n-k)!}a_n x^{n-k} - b_k x^{n-k-1} + \\ &+ \text{termini di grado minore di } n-k-1\,, \end{aligned}$$

dunque iniziando a sviluppare le potenze si ottiene

$$\begin{aligned} p_{k+1}(x) =& \frac{n!}{(n-k)!}a_n x^{n-k} + \frac{n!}{(n-k)!}a_n(n-k)x^{n-k-1} + b_k x^{n-k-1} + \\ &- \frac{n!}{(n-k)!}a_n x^{n-k} - b_k x^{n-k-1} + \\ &+ \text{termini di grado minore di } n-k-1 \\ =& \frac{n!}{(n-k)!}a_n(n-k)x^{n-k-1} + \text{termini di grado minore di } n-k-1\,, \end{aligned}$$

quindi il grado di $p_{k+1}(x)$ è $n-k-1$ e il coefficiente di testa è $\frac{n!}{(n-k)!}(n-k)a_n = \frac{n!}{(n-k-1)!}a_n$. Inoltre, poiché $p_k(m)$ è intero per ogni $m > m_0$ allora anche $p_{k+1}(m) = p_k(m+1) - p_k(m)$ è intero per ogni $m > m_0$.

(Testo)

Soluzione di C2: Vogliamo dimostrare che le parole che può scegliere Alberto sono tutte e sole quelle in cui compare una *lettera da sola*, cioè che non sta in un gruppetto di due o più lettere uguali consecutive.

Per prima cosa, vediamo che se Alberto sceglie una parola con una lettera da sola, allora vince per qualsiasi valore k scelto da Barbara. Per questo, chiamiamo X la lettera che sta da sola e chiamiamo α e β rispettivamente la sequenza precedente e successiva a

X nella parola scelta da Alberto (cioè la parola scelta da Alberto è $\alpha X\beta$). Una tra α e β può essere vuota (anche entrambe). Dato k, Alberto può allora scegliere la parola

$$\alpha\underbrace{XX\ldots X}_{k}\beta$$

in cui ripete esattamente k volte la lettera X, così i possibili modi per ottenere $\alpha X\beta$ come sottosequenza sono esattamente k. Infatti facilmente sono almeno k, poiché k modi distinti per ottenere la sequenza $\alpha X\beta$ sono: prendere la sequenza α iniziale, scegliere una delle k lettere X nel mezzo e prendere infine la sequenza β finale. Inoltre, se per assurdo i modi fossero più di k, Alberto dovrebbe usare una X che sta prima o dopo quelle che ha aggiunto (perché se usa come X una di quelle che ha aggiunto, ha a disposizione soltanto una scelta per le sottosequenze α e β perché la lettera X è da sola): supponendo senza perdita di generalità che la X sia prima di quelle che ha aggiunto, non ci sarebbero a disposizione, prima di essa, lettere a sufficienza per la parte di sottosequenza uguale a α.

Per seconda cosa, dimostriamo che se tutte le lettere sono in gruppetti di almeno due lettere consecutive uguali, se Barbara sceglie $k = 2$ allora Alberto perde. Sia $\alpha = X_1X_2\ldots X_n$ la parola iniziale e supponiamo per assurdo che Alberto trovi una parola $\beta = Y_1Y_2\ldots Y_m$ che ha esattamente due sottosequenze uguali ad α; dimostriamo che allora ha almeno 3 sottosequenze uguali ad α. Chiamiamo $\alpha_1 = Y_{i_1}\ldots Y_{i_n}$ e $\alpha_2 = Y_{j_1}\ldots Y_{j_n}$ le sottosequenze di β uguali ad α. Adesso chiamiamo k il minimo indice per cui $i_k \neq j_k$ (senza perdita di generalità possiamo supporre che $i_k < j_k$); sappiamo che Y_{i_k} e Y_{j_k} rappresentano la stessa lettera, che chiamiamo Z. Sappiamo anche che la lettera precedente o successiva a questa Z nella parola α è anch'essa una Z.

Supponiamo dapprima che la lettera precedente sia una Z. Allora possiamo ottenere una terza sottosequenza uguale ad α prendendo

$$\alpha_3 = Y_{i_1}\ldots Y_{i_{k-2}}Y_{i_k}Y_{j_k}Y_{j_{k+1}}Y_{j_{k+2}}\ldots Y_{j_n}$$

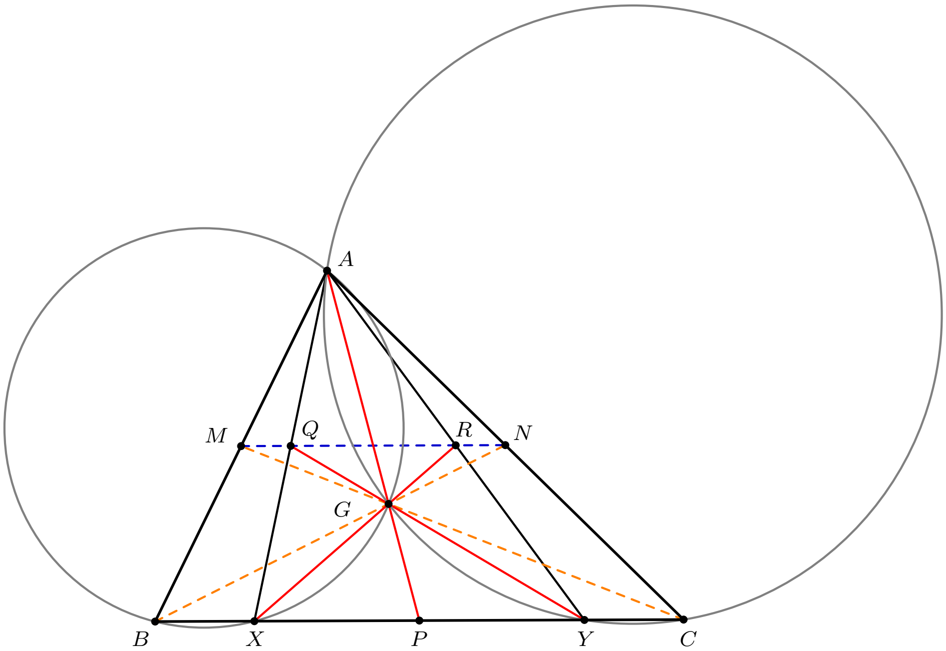
dove si intende che se $k = 2$ allora la prima lettera è Y_{i_k} (perché α_3 è necessariamente diversa da α_1 e da α_2?). Il caso in cui la lettera successiva sia una Z si tratta in modo analogo (come?). (Testo)

Soluzione di G3: Chiamiamo P, M ed N i punti medi rispettivamente di BC, AB ed AC. Confrontando le potenze del punto P rispetto alle due circonferenze date si ottiene che

$$PG \cdot PA = PX \cdot PB$$
$$PG \cdot PA = PY \cdot PC$$

e, poiché $PB = PC$, segue che $PX = PY$ (quindi AP è mediana relativa al lato XY del triangolo AXY), da cui anche $BX = CY$.

Siano ora R il punto medio di AY e Q il punto medio di AX. Per dimostrare la tesi è sufficiente mostrare che X, G ed R sono allineati e anche che Q, G ed Y sono allineati. È sufficiente mostrare solo il primo allineamento, dato che il secondo è assolutamente analogo. Essendo B, G ed N allineati, l'allineamento di X, G e R è equivalente alla similitudine dei triangoli RNG e XBG.



Poiché i triangoli ARN e AYC sono simili (hanno due lati in proporzione e l'angolo compreso in comune) si ha che $RN \parallel YC$ e $RN = \frac{1}{2}YC = \frac{1}{2}BX$. Inoltre per le proprietà del baricentro del triangolo ABC si ha $NG = \frac{1}{2}BG$ e, di nuovo per il parallelismo di RN e BC, si ha che $\angle GBX = \angle RNG$. Concludiamo dunque che i triangoli RNG e XBG sono simili perché hanno due lati in proporzione e l'angolo compreso congruente. (Testo)

Soluzione di N4: Per prima cosa, osserviamo che se due tra a, b, c sono uguali (e senza perdita di generalità possiamo supporre che $a = b$) allora sono tutti e tre uguali: infatti si avrebbe $b^n + pc = b^n + pb$ e quindi $b = c$. Quindi supponiamo per assurdo che a, b, c siano a due a due distinti.

Dalle equazioni del testo otteniamo che

$$p = \frac{a^n - b^n}{c - b} = \frac{b^n - c^n}{a - c} = \frac{c^n - a^n}{b - a}$$

e moltiplicando le uguaglianze ottenute si ottiene

$$-p^3 = \frac{a^n - b^n}{a - b} \cdot \frac{b^n - c^n}{b - c} \cdot \frac{c^n - a^n}{c - a}\,.$$

Intanto osserviamo che se n è dispari allora in ogni frazione il numeratore ha lo stesso segno del denominatore (perché?) e quindi il prodotto è positivo; dunque n deve essere pari e chiamiamo $n = 2k$.

Sia ora $d = (a - b, b - c, c - a)$ in modo che $a - b = du$, $b - c = dv$ e $c - a = dw$ con $(u, v, w) = 1$ e $u + v + w = 0$. Poiché $a^n - b^n = p(c - b)$ si ha in particolare che $a - b \mid p(c - b)$, e cicliche. Dunque

$$u \mid pv\,, \qquad v \mid pw\,, \qquad w \mid pu\,.$$

Osserviamo ora che al più uno tra u, v e w può essere divisibile per p (segue da $(u, v, w) = 1$ e $u+v+w = 0$: perché?). Se nessuno dei tre è divisibile per p, otteniamo che $u \mid v$, $v \mid w$ e $w \mid u$ da cui $|u| = |v| = |w| = 1$; ma allora $u + v + w$ non può essere 0, che è assurdo.

Senza perdita di generalità supponiamo allora che $p \mid u$ cioè possiamo scrivere $u = pu_1$ con u_1 intero. Come prima si ottiene $|u_1| = |v| = |w| = 1$, e poiché si deve avere $pu_1 + v + w = 0$ il primo p deve necessariamente essere pari, cioè $p = 2$. Restano dunque solo due casi da considerare: $u_1 = 1$, $v = w = -1$ e $u_1 = -1$, $v = w = 1$.

Abbiamo che $a - b = \pm 2d = -2(b - c)$, quindi $(a^k + b^k)(a^k - b^k) = a^n - b^n = -2(b - c) = a - b$. Poiché $a - b \mid a^k - b^k$ si deve avere necessariamente $a^k + b^k = \pm 1$ dunque esattamente uno tra a e b è pari; d'altra parte $a - b$ è pari, dunque abbiamo ottenuto una contraddizione.

(Testo)

Allenamenti EGMO 2018 – 8

8.1 Problemi

A1. Siano a, b, c reali positivi tali che $abc = 1$. Mostrare che

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}\,.$$

[Hint] [Soluzione]

C2. Ogni numero intero positivo è colorato di azzurro o di rosa. Si sa che:

1. ogni numero dispari è rosa;
2. ogni intero n ha lo stesso colore di $4n$;
3. ogni intero n ha lo stesso colore di almeno uno tra $n+2$ e $n+4$.

Dimostrare che allora tutti i numeri sono rosa. [Hint] [Soluzione]

G3. Sia ABC un triangolo acutangolo con circocentro O. Siano D, E ed F i piedi delle altezze da A, B e C rispettivamente e sia M il punto medio di BC. Sia X il punto di intersezione fra le rette AD e EF e sia Y il punto di intersezione fra le rette AO e BC. Sia infine Z il punto medio di XY. Dimostrare che A, Z e M sono allineati. [Hint] [Soluzione]

N4. Trovare tutte le coppie (a, b) di interi positivi tali che

$$\begin{cases} a+b+1 \mid 2ab \\ a+b-1 \mid a^2+b^2-1\,. \end{cases}$$

[Hint] [Soluzione]

8.1.1 Hints dei problemi

Problema A1: Chiamare $x = \frac{1}{a}$, $y = \frac{1}{b}$ e $z = \frac{1}{c}$, poi usare la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz. (Testo)

Problema C2: Supponendo per assurdo che ci sia almeno un numero azzurro, considerare il più piccolo. (Testo)

Problema G3: Chiamando A' il simmetrico di A rispetto a O e H l'ortocentro del triangolo ABC, si ha che $BA'CH$ è un parallelogramma. (Testo)

Problema N4: Scrivere $(a + b - 1)^2$ come somma di termini divisibili per $a + b - 1$. (Testo)

8.1.2 Soluzioni

Soluzione di A1: Siano $x = \frac{1}{a}$, $y = \frac{1}{b}$ e $z = \frac{1}{c}$. In questo modo $xyz = 1$ e la disuguaglianza da dimostrare diventa

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geq \frac{3}{2}\,.$$

Usiamo ora la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz sulle terne $(\sqrt{y+z}, \sqrt{z+x}, \sqrt{x+y})$ e $\left(\frac{x}{\sqrt{y+z}}, \frac{y}{\sqrt{z+x}}, \frac{z}{\sqrt{x+y}}\right)$ e otteniamo che

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geq \frac{x+y+z}{2}\,.$$

Per la disuguaglianza tra media aritmetica e media geometrica si ha poi che

$$\frac{x+y+z}{3} \geq (xyz)^{\frac{1}{3}} = 1$$

da cui $\frac{x+y+z}{2} \geq \frac{3}{2}$ come voluto. (Testo)

Soluzione di C2: Supponiamo per assurdo che ci sia almeno un numero azzurro e chiamiamo k il più piccolo numero azzurro. Allora si ha che $k \equiv 2 \pmod 4$ perché sicuramente k è pari (per ipotesi tutti i dispari sono rosa) e non può essere multiplo di 4 altrimenti $k/4$ sarebbe un numero azzurro minore di k. Inoltre sappiamo che il numero $4k$ è azzurro e nessun multiplo di 4 minore di $4k$ è azzurro (altrimenti avremmo un numero azzurro minore di k).

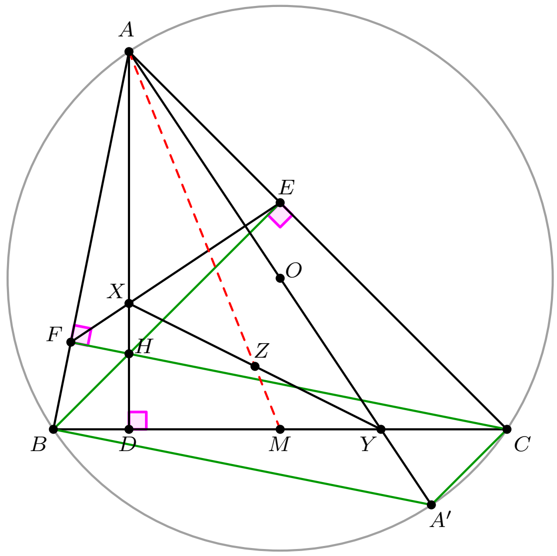
Dimostriamo ora per induzione su $i \in \mathbb{N}$ che ogni numero del tipo $k+4i$ con $k+4i < 4k$ (cioé ogni numero congruo a 2 modulo 4 compreso fra k e $4k$) deve essere azzurro.

Passo base: $i = 0$. Per ipotesi si ha che k è azzurro.

Passo induttivo: Passiamo da i a $i+1$. Per ipotesi induttiva $k+4i$ è azzurro; allora per la terza ipotesi del problema almeno uno tra $k+4i+2$ e $k+4i+4$ è azzurro, ma $k+4i+2$ è multiplo di 4 quindi è rosa, dunque $k+4i+4 = k+4(i+1)$ è azzurro.

Consideriamo ora il numero $4k-4$: esso è rosa in quanto multiplo di 4, ma sia $4k-2$ che $4k$ sono azzurri, contaddicendo la terza ipotesi. Concludiamo quindi che non ci sono numeri azzurri. (Testo)

Soluzione di G3: Sia H l'ortocentro del triangolo ABC e sia A' il simmetrico di A rispetto a O; ovviamente A' appartiene alla circonferenza circoscritta ad ABC e AA' è diametro di tale circonferenza. Osserviamo in particolare che i triangoli ACA' e ABA' sono rettangoli in C e in B rispettivamente.



Step 1: $BA'CH$ è un parallelogramma. Si ha che

$$\angle A'CB = \angle A'AB = \frac{\pi}{2} - \angle AA'B = \frac{\pi}{2} - \angle ACB = \frac{\pi}{2} - \gamma = \angle CBH\,,$$

da cui segue che CA' è parallelo a HB. Analogamente si ha che $\angle CBA' = \frac{\pi}{2} - \beta = \angle HCB$, da cui segue che BA' è parallelo a HC e dunque $BA'CH$ è un parallelogramma.

Step 2: la tesi è equivalente alla similitudine dei triangoli AXY e AHA'. Poiché le diagonali di un parallelogramma si bisecano a vicenda e nel nostro caso $CM = MB$ si ha che H, M e A' sono allineati e $HM = MA'$. Allora per mostrare l'allineamento di A, Z e M è sufficiente dimostrare che i triangoli AXY e AHA' sono simili, infatti in tal caso l'omotetia di centro A e fattore AH/AX manda A in se stesso, X in H, Y in A' e Z nel punto medio di HA' che per quanto detto prima è M.

Step 3: i triangoli AXY e AHA' sono simili. Poiché i due triangoli hanno l'angolo in A in comune, è sufficiente dimostrare che $AX/AH = AY/AA'$. Per fare ciò, mostriamo che il quadrilatero $AEHF$ viene mandato nel quadrilatero $ABA'C$ (con punti corrispondenti che vanno in punti corrispondenti) tramite la composizione della simmetria rispetto alla bisettrice interna uscente da A e dell'omotetia di centro A e fattore AE/AB. Questo è però molto facile da dimostrare (conosciamo tutti gli angoli interessati!).

Questo però dimostra che $AX/AH = AY/AA'$, infatti tramite la trasformazione descritta il punto H viene mandato in A' e il punto $X = AH \cap EF$ viene mandato in $Y = AA' \cap BC$.

Soluzione alternativa: Mostriamo di seguito una dimostrazione alternativa dell'uguaglianza $AX/AH = AY/AA'$ che fa uso di qualche conto di trigonometria. Infatti, come osservato sopra, conosciamo tutti gli angoli che interessano i quadrilateri $AEHF$ e $ABA'C$, dunque non può essere difficile dimostrare la relazione cercata anche senza accorgersi della trasformazione descritta sopra.

- Per calcolare AX applichiamo il teorema dei seni al triangolo AXF, in cui $\angle XFA = \angle EFA = \gamma$ (perché AEF è simile ad ABC) e $\angle AXF = \pi - \angle XAF - \angle XFA = \pi - (\frac{\pi}{2} - \beta) - \gamma = \frac{\pi}{2} + \beta - \gamma$. Si ha quindi che

$$AX = \sin(\angle XFA) \cdot \frac{AF}{\sin(\angle AXF)} = \frac{\sin\gamma \cdot AF}{\sin(\frac{\pi}{2} + \beta - \gamma)}\,.$$

- Per trovare AH consideriamo il triangolo rettangolo AHF e abbiamo che

$$AH = \frac{AF}{\cos(\angle HAF)} = \frac{AF}{\cos(\frac{\pi}{2} - \beta)} = \frac{AF}{\sin\beta}\,.$$

- Per trovare AY applichiamo il teorema dei seni al triangolo CYA, in cui $\angle CYA = \pi - \angle YAC - \angle ACY = \pi - (\frac{\pi}{2} - \beta) - \gamma = \frac{\pi}{2} + \beta - \gamma$ e otteniamo

$$AY = \sin(\angle ACY) \cdot \frac{AC}{\sin(\angle YAC)} = \frac{b\sin\gamma}{\sin(\frac{\pi}{2} + \beta - \gamma)}\,.$$

- Infine, poiché AA' è diametro si ha che

$$AA' = \frac{b}{\sin\beta}\,.$$

Quindi abbiamo che

$$\frac{AX}{AH} \cdot \frac{AA'}{AY} = \frac{\sin\gamma \cdot AF}{\sin(\frac{\pi}{2} + \beta - \gamma)} \cdot \frac{\sin\beta}{AF} \cdot \frac{b}{\sin\beta} \cdot \frac{\sin(\frac{\pi}{2} + \beta - \gamma)}{b\sin\gamma} = 1$$

e possiamo concludere che i triangoli AXY e AHA' sono simili. (Testo)

Soluzione di N4: Osserviamo che

$$(a+b-1)^2 = a^2 + b^2 + 1 - 2a - 2b + 2ab = (a^2 + b^2 - 1) - 2(a+b-1) + 2ab\,.$$

Poiché $a+b-1 \mid (a+b-1)^2$ e $a+b-1 \mid a^2+b^2-1$ si deduce che $a+b-1 \mid 2ab$.

Ora osserviamo che $(a+b-1, a+b+1) = (a+b+1, 2) \leq 2$, dunque poiché i numeri $a+b-1$ e $a+b+1$ hanno al più un fattore 2 in comune ed entrambi sono divisori di $2ab$, concludiamo che

$$(a+b+1)(a+b-1) \mid 4ab\,.$$

Essendo a e b positivi si ha che entrambi $a+b-1$ e $a+b+1$ sono interi positivi, quindi in particolare si dovrà avere che

$$\begin{aligned} & (a+b+1)(a+b-1) \leq 4ab \\ \iff & \quad a^2 + b^2 - 2ab - 1 \leq 0 \\ \iff & (a-b-1)(a-b+1) \leq 0\,. \end{aligned}$$

Poiché $a-b-1 < a-b+1$ si dovrà avere che

$$\begin{cases} a-b-1 \leq 0 \\ a-b+1 \geq 0 \end{cases}$$

cioè

$$a-1 \leq b \leq a+1\,.$$

Restano quindi tre casi da analizzare: $b=a$, $b=a+1$ e $b=a-1$.

- Se $b=a$ le condizioni del testo diventano

  $$\begin{cases} 2a+1 \mid 2a^2 \\ 2a-1 \mid 2a^2-1\,, \end{cases}$$

  ma la prima non è mai verificata in quanto $2a+1 \neq 1$ e $(2a+1, 2a^2) = (2a+1, a) = (1, a) = 1$, quindi in questo caso non ci sono soluzioni.

- Se $b=a+1$ le condizioni del testo diventano

  $$\begin{cases} 2a+2 \mid 2a(a+1) \\ 2a \mid a^2+(a+1)^2-1 = 2a^2+2a \end{cases}$$

  che sono verificate per qualsiasi valore di a.

- Il caso $b=a-1$ è del tutto analogo al precedente e anche qui va bene qualsiasi valore di a.

Concludiamo dunque che le uniche coppie (a,b) che soddisfano le richieste sono quelle del tipo $(n, n+1)$ e $(n+1, n)$ per ogni intero positivo n. (Testo)

Allenamenti EGMO 2018 – 9

9.1 Problemi

A1. Determinare tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che

$$f(f(x))(x - f(y)) + 2xy = f(x)f(x + y)$$

per ogni $x, y \in \mathbb{R}$. [Hint] [Soluzione]

C2. Un insieme di numeri reali positivi $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ è detto *bello* se:

1. può essere partizionato in due insieme con la stessa somma;
2. i numeri $s_1, \ldots, s_n$ non sono tutti uguali fra loro.

Siano ora $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ e $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ due insieme belli. Dimostrare che esiste un $2n$-agono semplice (cioè senza autointersezioni) con i lati paralleli agli assi cartesiani, in cui i lati orizzontali sono lunghi $a_1, \ldots, a_n$ (in qualche ordine) e i lati verticali sono lunghi $b_1, \ldots, b_n$ (in qualche ordine). [Hint] [Soluzione]

G3. Sia ABC un triangolo acutangolo, con $AB < AC < BC$, inscritto in una circonferenza Γ. Sia D il piede della bisettrice uscente da A. L'asse del segmento AD interseca Γ in K ed L, dove K appartiene all'arco AB non contenente C. La circonferenza di centro K passante per A interseca Γ nuovamente in T e la circonferenza di centro L passante per A interseca Γ nuovamente in S.

Dimostrare che D è l'incentro del triangolo AST. [Hint] [Soluzione]

N4. Trovare tutti gli interi $n \geq 2$ tali che per ogni coppia di suoi divisori positivi $a, b < n$ almeno uno tra $2a - b$ e $2b - a$ è un divisore (non necessariamente positivo) di n. [Hint] [Soluzione]

9.1.1 Hints dei problemi

Problema A1: Dimostrare che $f(0) = 0$, poi ricavare chi è $f(x + f(x))$ in due modi diversi: sostituendo $(f(y), y)$ e poi $(x, f(x))$ al posto di (x, y). (Testo)

Problema C2: Partizionare l'insieme degli a_i in due sottoinsiemi di uguale somma (i segmenti *verso destra* e quelli *verso sinistra*) e disporli in ordine crescente e decrescente rispettivamente; fare la stessa cosa con i b_i. (Testo)

Problema G3: Dimostrare che K, D, S sono allineati e T, D, L sono allineati. (Testo)

Problema N4: Fare prima il caso con n pari. Poi per n dispari considerare, come coppia di divisori, 1 e il più grande divisore proprio di n. (Testo)

9.1.2 Soluzioni

Soluzione di A1: Chiamiamo $P(x, y)$ l'equazione del testo, cioè

$$f(f(x))(x - f(y)) + 2xy = f(x)f(x + y)\,.$$

Per prima cosa abbiamo che da $P(f(0), 0)$ segue che $f(f(0))^2 = 0$, dunque $f(f(0)) = 0$. A questo punto da $P(0, 0)$ otteniamo che $f(0)^2 = 0$, quindi si deve avere che $f(0) = 0$.

Mostriamo ora che 0 è l'unico elemento $a \in \mathbb{R}$ tale che $f(a) = 0$. Supponiamo per assurdo che esista $a \neq 0$ per cui $f(a) = 0$; allora, da $P(a, y)$, si ottiene che $2ay = 0$ da cui $a = 0$, che è assurdo come voluto.

Osserviamo ora che da $P(x, 0)$ si ottiene $f(f(x))x = f(x)^2$ e che da $P(f(x), x)$ si ottiene $2xf(x) = f(f(x)) \cdot f(x + f(x))$, dunque

$$f(x + f(x)) = \frac{2xf(x)}{f(f(x))} = \frac{2x^2}{f(x)} \tag{9.1}$$

per ogni $x \neq 0$. Notare che l'equazione che abbiamo scritto ha senso proprio perché $f(x)$ e $f(f(x))$ sono diversi da 0 per $x \neq 0$.

D'altra parte, da $P(x, f(x))$ si ottiene $f(f(x))(x - f(f(x))) + 2xf(x) = f(x)f(f(x) + x)$, da cui

$$f(x + f(x)) = 2x + \frac{f(f(x)) \cdot x}{f(x)} - \frac{f(f(x))^2}{f(x)} = 2x + f(x) - \frac{f(x)^3}{x^2} \tag{9.2}$$

per ogni $x \neq 0$, dove abbiamo usato che $f(f(x))x = f(x)^2$.

Confrontando ora la (9.1) e la (9.2) si ottiene che

$$\begin{aligned} \frac{2x^2}{f(x)} &= 2x + f(x) - \frac{f(x)^3}{x^2} \\ \implies f(x)^4 - x^2 f(x)^2 - 2x^3 f(x) + 2x^4 &= 0 \\ \implies (f(x) - x)^2 (f(x)^2 + 2xf(x) + 2x^2) &= 0 \end{aligned}$$

per ogni $x \neq 0$. Abbiamo che $f(x)^2 + 2xf(x) + 2x^2 = (f(x) + x)^2 + x^2 > 0$, dunque necessariamente si deve avere $f(x) - x = 0$ per ogni $x \neq 0$, e dunque $f(x) = x$ è l'unica possibile soluzione del problema. Verifichiamo infine che la funzione $f(x) = x$ risolva effettivamente l'equazione funzionale proposta

$$f(f(x))(x - f(y)) + 2xy = x(x - y) + 2xy = x^2 + xy = x(x + y) = f(x)f(x + y)\,.$$

(Testo)

Soluzione di C2: Suddividiamo l'insieme degli a_i in due insiemi $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_k$ e $y_1 \leq y_2 \leq \ldots \leq y_{n-k}$ in modo che $k \leq \frac{n}{2}$ e i due insiemi abbiano la stessa somma, che indicheremo con A. Facciamo la stessa cosa con i b_i, suddividendoli in $z_1 \geq z_2 \geq \ldots \geq z_\ell$ e $w_1 \leq w_2 \leq \ldots \leq w_{n-\ell}$ con $\ell \leq \frac{n}{2}$ e in modo che $B := \sum_{i=1}^{\ell} z_i = \sum_{i=1}^{n-\ell} w_i$.

Chiamiamo ora

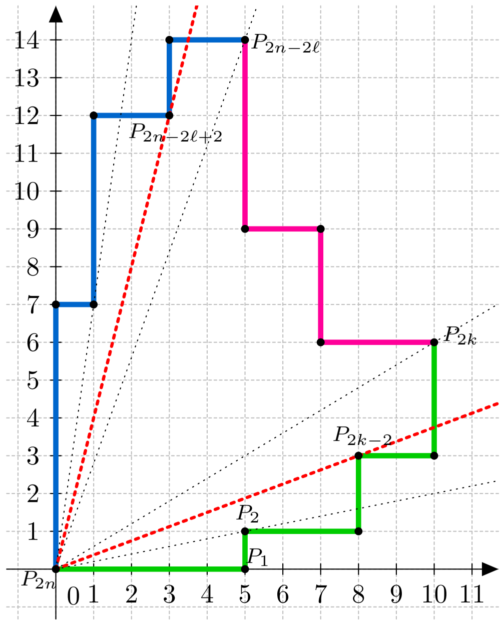
- $X_j = \sum_{i=1}^{j} x_i$ per $j = 1, \ldots, k$;

- $Y_j = \sum_{i=1}^{j} y_i$ per $j = 1, \dots, n-k$;
- $Z_j = \sum_{i=1}^{j} z_i$ per $j = 1, \dots, \ell$;
- $W_j = \sum_{i=1}^{j} w_i$ per $j = 1, \dots, n-\ell$.

Notare dunque che in particolare $X_0 = Y_0 = Z_0 = W_0 = 0$, $X_k = Y_{n-k} = A$ e $Z_\ell = W_{n-\ell} = B$.

A questo punto costruiamo il poligono $P_1 P_2 \dots P_{2n}$ dove

$$\begin{array}{lll} P_{2i-1} = (X_i, W_{i-1}) & P_{2i} = (X_i, W_i) & \text{per } 1 \leq i \leq k\,, \\ P_{2i-1} = (Y_{n-i}, W_{i-1}) & P_{2i} = (Y_{n-i}, W_i) & \text{per } k+1 \leq i \leq n-\ell\,, \\ P_{2i-1} = (Y_{n-i}, Z_{n-i+1}) & P_{2i} = (Y_{n-i}, Z_{n-i}) & \text{per } n-\ell+1 \leq i \leq n\,. \end{array}$$



È facile vedere che il poligono così ottenuto ha i lati paralleli agli assi cartesiani. Inoltre osserviamo che $P_{2n} = (0,0)$ quindi ha un vertice nell'origine. Immaginiamo di colorare di verde i lati che partono dal vertice P_{2n} fino a P_{2k}, di rosa i lati da P_{2k} a $P_{2n-2\ell}$ (se $k = \ell = \frac{n}{2}$ i lati rosa non ci sono, ma vedremo che non è un problema) e di blu i lati da $P_{2n-2\ell}$ a P_{2n}. I lati verdi e rosa del poligono sicuramente non si intersecano tra di loro, perché le ordinate dei punti P_{2i} con $1 \leq i \leq n-\ell$ sono strettamente crescenti. I lati rosa e blu analogamente non di intersecano tra di loro perché le ascisse dei punti P_{2i} per $k \leq i \leq n$ sono strettamente decrescenti. Per dimostrare che i lati blu e verdi non si intersecano tra di loro è sufficiente dimostrare che:

1. $\frac{W_1}{X_1} \leq \frac{W_2}{X_2} \leq \cdots \leq \frac{W_k}{X_k} \leq \frac{W_{n-\ell}}{Y_\ell} = \frac{Z_\ell}{Y_\ell} \leq \frac{Z_{\ell-1}}{Y_{\ell-1}} \leq \cdots \leq \frac{Z_1}{Y_1}$, cioè le rette passanti per l'origine e i punti P_{2i} con $1 \leq i < n$ hanno i coefficienti angolari (debolmente) crescenti;

2. il coefficiente angolare della retta per P_{2n} e P_{2k-1} è strettamente minore del coefficiente angolare della retta per P_{2n} e $P_{2n-2\ell+2}$, ossia $\frac{W_{k-1}}{X_{k-1}} < \frac{Z_{\ell-1}}{Y_{\ell-1}}$.

In questo modo, infatti, avremo che i punti da $P_{2n-2\ell+1}$ a P_{2n-1} stanno sopra la retta $P_{2n}P_{2k-1}$ e i punti da P_1 a P_{2k-1} stanno sotto la retta $P_{2n}P_{2n-2\ell+2}$; le uniche cose che rimangono da verificare quindi sono che il lato $P_{2k-1}P_{2k}$ non intersechi i lati blu (ma questo non succede perché l'ascissa di P_{2k} è maggiore o uguale all'ascissa di $P_{2n-2\ell}$, che a sua volta è maggiore o uguale alle ascisse di P_i con $2n-2\ell+1 \leq i \leq n$) e che il lato $P_{2n-2\ell}P_{2n-2\ell+1}$ non intersechi i lati verdi (la motivazione è analoga all'altro caso).

Per la dimostrazione del primo punto, vediamo innanzitutto che $\frac{W_i}{X_i} \leq \frac{W_{i+1}}{X_{i+1}}$ per $i = 1, \dots, k-1$. Si ha che

$$\frac{W_i}{X_i} \leq \frac{W_{i+1}}{X_{i+1}} \iff \frac{W_i}{X_i} \leq \frac{W_i + w_{i+1}}{X_i + x_{i+1}} \iff \frac{W_i}{X_i} \leq \frac{w_{i+1}}{x_{i+1}}.$$

Abbiamo che $W_i \leq i \cdot w_{i+1}$ e $X_i \geq i \cdot x_{i+1}$ per come sono ordinati gli x_j e i w_j, dunque $\frac{W_i}{X_i} \leq \frac{i \cdot w_{i+1}}{i \cdot x_{i+1}} = \frac{w_{i+1}}{x_{i+1}}$. In modo del tutto analogo si dimostra che $\frac{Z_{i+1}}{Y_{i+1}} \leq \frac{Z_i}{Y_i}$ per $i = 1, \dots, \ell - 1$. Per concludere basta dimostrare che $\frac{W_k}{X_k} \leq \frac{W_{n-\ell}}{Y_\ell}$, ma questo segue facilmente dal fatto che $W_k \leq W_{n-\ell}$ e $X_k = A \geq Y_\ell$.

Abbiamo già visto che vale $\frac{W_{k-1}}{X_{k-1}} \leq \frac{W_k}{X_k} \leq \frac{Z_\ell}{Y_\ell} \leq \frac{Z_{\ell-1}}{Y_{\ell-1}}$, quindi supponiamo ora per assurdo che $\frac{W_{k-1}}{X_{k-1}} = \frac{Z_{\ell-1}}{Y_{\ell-1}}$. In particolare si avrà $\frac{W_k}{X_k} = \frac{Z_\ell}{Y_\ell}$ da cui segue che $k = \ell = \frac{n}{2}$ (perché?). Allora, per come abbiamo scelto gli x_i e gli y_i e usando l'ipotesi che gli a_i non sono tutti uguali tra loro si ha che $x_k < y_k$; analogamente, si trova che $z_k < w_k$. Ma allora $\frac{W_{k-1}}{X_{k-1}} = \frac{B-w_k}{A-x_k} < \frac{B-z_k}{A-y_k} = \frac{Z_{k-1}}{Y_{k-1}}$, che è quanto volevamo dimostrare. Concludiamo quindi che il poligono ottenuto non ha autointersezioni. (Testo)

Soluzione di G3: Dimostriamo per prima cosa che K, D ed S sono allineati, ossia che $\angle LKD = \angle LKS$. Infatti si ha che

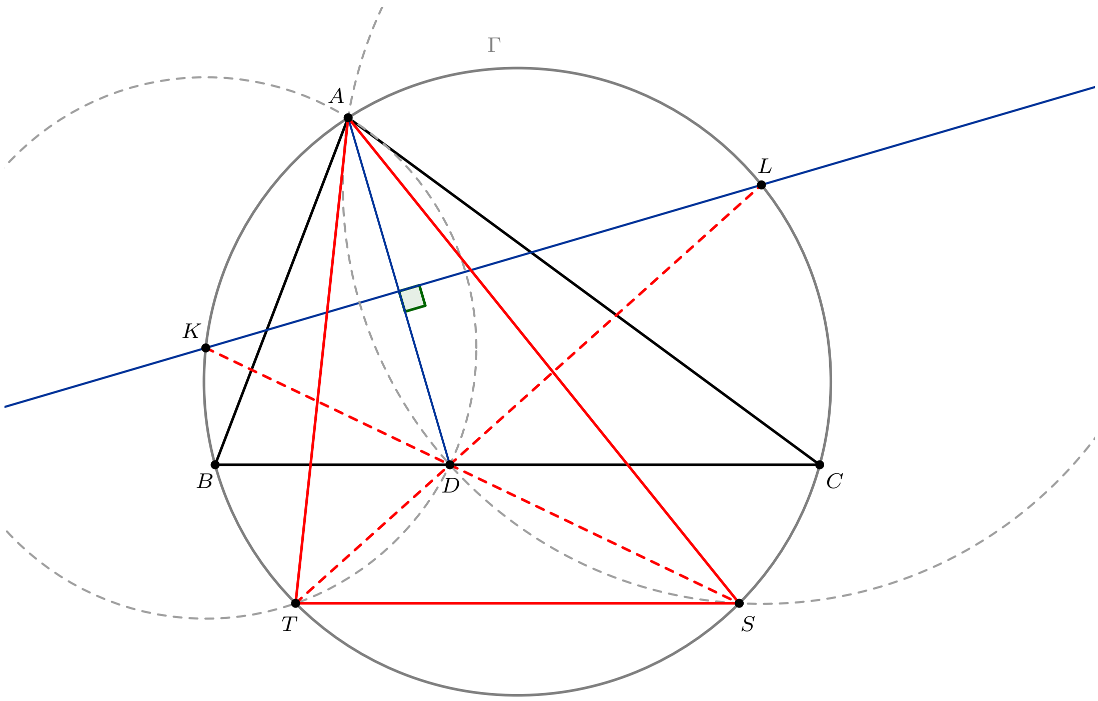
$$\angle LKD = \angle LKA = \angle LSA = \angle LAS = \angle LKS\,,$$

dove la prima uguaglianza vale perché KL è l'asse di AD, la seconda perché i due angoli insistono sullo stesso arco, la terza perché i due angoli insistono su due archi uguali in quanto il triangolo ALS è isoscele e la quarta perché gli angoli insistono sullo stesso arco. Analogamente si dimostra che L, D e T sono allineati.

Vediamo ora che TL è la bisettrice dell'angolo $\angle ATS$, questo però è immediato perché gli archi AL e LS sono uguali (come abbiamo visto prima, dato che il triangolo ALS è isoscele). Analogamente si dimostra che SK è la bisettrice di $\angle AST$, dunque D è l'incentro del triangolo AST. (Testo)

Soluzione di N4: Gli unici interi che soddisfano le richieste sono $6, 9, 15$ e tutti i numeri primi. È immediato vedere che tutti i primi p vanno bene, perché l'unico divisore minore di p è 1 e $2 \cdot 1 - 1 = 1$ divide p.

Consideriamo ora un numero pari $n = 2k > 2$. Affinché questo soddisfi le ipotesi del testo, prendendo come divisori 1 e $\frac{n}{2} = k$ dobbiamo avere che $2k - 1 \mid 2k$ (che però non vale mai se $k > 1$) oppure che $k - 2 \mid 2k$. Si deve avere allora che $(2k, k-2) = k - 2$, ma $(2k, k-2) = (k-2, 4)$, quindi restano solo tre casi da analizzare: $k = 3, k = 5$ e $k = 6$.



Si verifica *a mano* che soltanto $k = 3$ porta ad un numero, $n = 6$, che soddisfa le richieste del problema.

Consideriamo poi un n dispari non primo. Sia $p > 2$ il più piccolo divisore primo di n, in modo che $\frac{n}{p}$ sia il più grande divisore positivo di n minore di n stesso. Come coppia di divisori consideriamo dunque 1 e $\frac{n}{p}$: affinché n vada bene, si deve avere che almeno uno tra $\frac{2n}{p} - 1$ e $\frac{n}{p} - 2$ è divisore di n. Osserviamo subito che $\frac{n}{p} < \frac{2n}{p} - 1 < n$, dunque la quantità $\frac{2n}{p} - 1$ non sarà mai un divisore di n per massimalità di $\frac{n}{p}$. Dovremo allora avere che $\frac{n}{p} - 2 \mid n$. Possiamo scrivere $n = ap$ con $a = \frac{n}{p} > 1$ intero dispari. Con questa notazione dobbiamo avere che $(a-2, ap) = a-2$; ma $(a-2, ap) = (2p, a-2) = (p, a-2)$, da cui restano solo due possibilità: $a - 2 = p$ oppure $a - 2 = 1$.

- Se $a - 2 = p$, allora $n = p(p + 2)$. Consideriamo come coppia di divisori p e $p + 2$: $2p - (p + 2) = p - 2$ può essere divisore di n solo se è uguale a 1 (perché p era il più piccolo divisore primo di n), da cui $p = 3$ che porta a $n = 15$ che in effetti va bene; $2(p + 2) - p = p + 4$ invece non potrà essere divisore di n perché $(p + 4, n) = (p + 4, p^2 + 2p) = (p + 4, 2p) = (p + 4, 8) = 1$ in quanto p è dispari.

- Se $a - 2 = 1$, cioè $n = 3p$, allora considerando 3 e p come coppia di divisori, si ha che uno tra $2p - 3$ e $p - 6$ deve essere divisore di n. Affinché $2p - 3 \mid 3p$ si deve avere che $2p - 3 \leq p$, che si ha soltanto per $p = 3$, e questo porta alla soluzione $n = 9$ (che si verifica che va bene). Altrimenti $p - 6 \mid 3p$, dunque $p - 6$ è uno fra $\{\pm 1, \pm 3, -p\}$, da cui p è uguale a 3, 5 o 7. I casi $p = 3$ e $p = 5$ che portano a $n = 9$ e $n = 15$ sono già stati analizzati, mentre invece si verifica che il caso $p = 7$ non va bene.

(Testo)