

## Allenamenti EGMO 2019 – 5

### 1.1 Problemi

**A1.** Un polinomio ha tutte le sue radici reali e i suoi coefficienti sono  $\pm 1$ . Determinare il massimo grado che può avere.

**C2.** Dati una coppia  $(x, y)$  di interi positivi di parità diversa, una *operazione* consiste nel sostituire la coppia  $(x, y)$  con  $(\frac{x}{2}, y + \frac{x}{2})$  se  $x$  è pari, o con  $(x + \frac{y}{2}, \frac{y}{2})$  altrimenti.

Dimostrare che per ogni numero dispari  $n > 1$ , esiste  $b < n$  pari tale che, partendo dalla coppia  $(n, b)$  è possibile ottenere la coppia  $(b, n)$  con un numero finito di operazioni.

**G3.** Sia  $\triangle ABC$  un triangolo acutangolo con  $AB > AC$ ,  $O$  il suo circocentro e  $D$  il punto medio del lato  $BC$ . Siano inoltre  $E, F$  i punti di intersezione della circonferenza di diametro  $AD$  con i lati  $AB$  e  $AC$ . Dimostrare che la parallela a  $AO$  passante per  $D$  incontra  $EF$  nel suo punto medio.

**N4.** Sia  $a_n$  una successione definita da  $a_0 = 3$  e  $a_{n+1} - a_n = n(a_n - 1)$ . Trovare tutti gli interi  $m$  tali che

$$\text{mcd}(m, a_n) = 1 \quad \forall n$$