

Allenamenti EGMO 2019 – 5

1.1 Problemi

A1. Un polinomio ha tutte le sue radici reali e i suoi coefficienti sono ± 1 . Determinare il massimo grado che può avere.

C2. Dati una coppia (x, y) di interi positivi di parità diversa, una *operazione* consiste nel sostituire la coppia (x, y) con $(\frac{x}{2}, y + \frac{x}{2})$ se x è pari, o con $(x + \frac{y}{2}, \frac{y}{2})$ altrimenti.

Dimostrare che per ogni numero dispari $n > 1$, esiste $b < n$ pari tale che, partendo dalla coppia (n, b) è possibile ottenere la coppia (b, n) con un numero finito di operazioni.

G3. Sia $\triangle ABC$ un triangolo acutangolo con $AB > AC$, O il suo circocentro e D il punto medio del lato BC . Siano inoltre E, F i punti di intersezione della circonferenza di diametro AD con i lati AB e AC . Dimostrare che la parallela a AO passante per D incontra EF nel suo punto medio.

N4. Sia a_n una successione definita da $a_0 = 3$ e $a_{n+1} - a_n = n(a_n - 1)$. Trovare tutti gli interi m tali che

$$\text{mcd}(m, a_n) = 1 \quad \forall n$$