

Allenamenti EGMO 2020 – 5

A5. Determinare tutti i polinomi a coefficienti reali tali per cui

$$(x^2 - 6x + 8)p(x) = (x^2 + 2x)p(x - 2)$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$.

C5. Su un tavolo sono poste 2019 carte in fila, una accanto all'altra, alcune a faccia in su e altre a faccia in giù. Francesca gioca a un gioco in cui l'unica mossa possibile è scegliere una carta a faccia in su, toglierla (separando eventualmente la striscia in due segmenti che poi rimarranno disgiunti), e ribaltare le eventuali carte adiacenti. Quali e quante sono le configurazioni per cui Francesca riesce a toglierle tutte?

G5. Sia $\triangle ABC$ un triangolo acutangolo tale che $\angle ABC < \angle ACB$. La perpendicolare a BC condotta da A incontra la circoscritta ad $\triangle ABC$ in D , mentre M è il punto medio di AD . La tangente alla circoscritta ad $\triangle ABC$ in A interseca l'asse di AD in E , e la circoscritta a $\triangle MDE$ interseca la circoscritta ad $\triangle ABC$ in F (oltre che in D). Siano infine G il piede della perpendicolare a BD condotta da A e N il punto medio di AG . Si dimostri che B , N ed F sono allineati.

N5. Indichiamo con \mathbb{Z}^+ l'insieme degli interi positivi e con $d(n)$ il numero di divisori positivi di un intero n . Diciamo che una funzione $f : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$ è *interessante* se valgono le seguenti proprietà

- (a) $d(f(mn)) = d(f(m))d(f(n))$ per ogni coppia di interi positivi m e n ;
- (b) $d(f(n)) \leq d(n)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Trovare tutte le funzioni interessanti.