

# Allenamenti EGMO 2020 – 5

**A5.** Determinare tutti i polinomi a coefficienti reali tali per cui

$$(x^2 - 6x + 8)p(x) = (x^2 + 2x)p(x - 2)$$

per ogni  $x \in \mathbb{R}$ .

**C5.** Su un tavolo sono poste 2019 carte in fila, una accanto all'altra, alcune a faccia in su e altre a faccia in giù. Francesca gioca a un gioco in cui l'unica mossa possibile è scegliere una carta a faccia in su, toglierla (separando eventualmente la striscia in due segmenti che poi rimarranno disgiunti), e ribaltare le eventuali carte adiacenti. Quali e quante sono le configurazioni per cui Francesca riesce a toglierle tutte?

**G5.** Sia  $\triangle ABC$  un triangolo acutangolo tale che  $\angle ABC < \angle ACB$ . La perpendicolare a  $BC$  condotta da  $A$  incontra la circonscritta ad  $\triangle ABC$  in  $D$ , mentre  $M$  è il punto medio di  $AD$ . La tangente alla circonscritta ad  $\triangle ABC$  in  $A$  interseca l'asse di  $AD$  in  $E$ , e la circonscritta a  $\triangle MDE$  interseca la circonscritta ad  $\triangle ABC$  in  $F$  (oltre che in  $D$ ). Siano infine  $G$  il piede della perpendicolare a  $BD$  condotta da  $A$  e  $N$  il punto medio di  $AG$ . Si dimostri che  $B$ ,  $N$  ed  $F$  sono allineati.

**N5.** Indichiamo con  $\mathbb{Z}^+$  l'insieme degli interi positivi e con  $d(n)$  il numero di divisori positivi di un intero  $n$ . Diciamo che una funzione  $f : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$  è *interessante* se valgono le seguenti proprietà

- (a)  $d(f(mn)) = d(f(m))d(f(n))$  per ogni coppia di interi positivi  $m$  e  $n$ ;
- (b)  $d(f(n)) \leq d(n)$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ .

Trovare tutte le funzioni interessanti.