Simulazione Gara Individuale Cesenatico

Tempo a disposizione: 270 minuti - 4 ore e 30 minuti.

Per rendere la gara divertente per tutti, è vietato discutere dei problemi fino alle **23:59 del 1 Maggio**.

Se fai la gara prima di qualcuno, sei pregato di non diffondere il testo.

È proibito ogni supporto di tipo elettronico (Es. WolframAlpha, Geogebra).

Ti ricordiamo di scrivere **Nome, Cognome, Numero del problema** su ogni foglio. A gara finita, hai dieci minuti di tempo per fotografare/scannerizzare le tue soluzioni e inviarle.

Non è obbligatorio consegnare le tue soluzioni scrivendo su questi fogli. È semplicemente un supporto per chi vuole stamparlo, ma le soluzioni si possono scrivere su un qualsiasi foglio (leggibile) corredato sempre di **Nome, Cognome, Numero del problema**.

Ogni problema vale 7 punti. Sono assegnati punteggi parziali per osservazioni ritenute utili alla soluzione da parte della giuria, su ognuno dei sei problemi. In ogni problema, in basso a destra, compare il nome dell'autore (o i nomi degli autori).

Buon lavoro! Se avverrà la premiazione in diretta Youtube (con le medaglie virtuali) verrai contattato!

Problema 1. Max ha ricevuto una scatola contenente 2020 cioccolatini e sfida Lello al seguente gioco.
Quando arriva il turno di un giocatore, se la scatola contiene in quel momento n cioccolatini, il giocatore a cui tocca ne mangia un numero positivo k, in modo tale che $MCD(n, k) = 1$ e $k \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$.
Vince colui che mangia l'ultimo cioccolatino della scatola. Se inizia Max e, successivamente, giocano a turni, determinare chi dei due ha la strategia vincente.

Il simbolo $\lceil x \rceil$ indica la parte intera superiore di x, ossia il più piccolo intero $\geq x$.
Ad esempio $\lceil 2020 \rceil = 2020$, $\lceil \pi \rceil = 4$.

Matteo Salicandro

Problema 2. Sia ABC un triangolo acutangolo e O il suo circocentro.
La retta per O, perpendicolare ad AO, interseca AB e AC rispettivamente in D e E.
Supponiamo che la circonferenza passante per A, D, E intersechi il lato BC nei punti X e Y.
Dimostrare che il punto medio di XY è il piede dell'altezza uscente da A.

Matteo Salicandro

Problema 3. Sia k un intero positivo.
Diremo che k è una potenza perfetta se esistono due interi a, b con $a \geq 1$ e $b \geq 2$ tali che $a^b = k$.
Sia $P_0(x_0; y_0)$ un punto a coordinate intere nel piano cartesiano, appartenente alla parabola γ di equazione $y = -x^2 + 3x + 1978$.
Per ogni $n \in \mathbb{N}$ definiamo $P_{n+1}(x_{n+1}; y_{n+1})$ come la seconda intersezione tra γ e la retta passante per P_n avente coefficiente angolare x_n.
(a) Determinare se esiste un P_0 diverso da $(1; 1980)$ tale che nella successione $\{x_i\}$ ci siano infiniti quadrati perfetti.
(b) Determinare se esiste un P_0 diverso da $(1; 1980)$ tale che nella successione $\{x_i\}$ ci siano infinite potenze perfette.

Massimiliano Foschi, Leonardo Franchi, Matteo Poletto

Problema 4. Su una lavagna sono scritti gli interi positivi da 1 a 100, senza ripetizioni.
Mattysal esegue le seguenti operazioni, sceglie due numeri x e y, li cancella, e poi vi scrive al loro posto il massimo comun divisore di $x^2 + y^2 + 2$ e $x^2y^2 + 3$.
Dopo delle operazioni, rimane scritto un solo intero positivo k sulla lavagna.
Dimostrare che k non è un quadrato perfetto.

Leonardo Franchi, Matteo Poletto

Problema 5. Sia ABC un triangolo scaleno e acutangolo di ortocentro H. Sia Γ la sua circonferenza circoscritta, e P un punto su Γ tale che $\widehat{APH} = 90°$.
Siano M, F, G rispettivamente i punti medi di BC, AB e AC. Sia A' un punto su Γ tale che AA' sia un suo diametro, e S la proiezione di M su $A'A$.
Detta K l'intersezione di $A'M$ con FG, dimostrare che le circonferenze circoscritte ai triangoli PFB, PGC, KSA' passano per uno stesso punto.

Massimiliano Foschi, Leonardo Franchi, Davide Pierrat, Matteo Poletto

Problema 6. Saro fa un gioco con una lavagna vuota.
A ogni mossa può scegliere tra:
i) Scrivere un intero positivo;
ii) Se ci sono due numeri k e $k+1$, cancellarli e scrivere $k+2$.
In ogni momento, sulla lavagna ci sono stati non più di m numeri. Sapendo che ad un certo punto c'è soltanto il numero n, quante mosse può aver fatto al massimo Saro fino a questo momento?

Massimiliano Foschi, Leonardo Franchi