OliMaTO 9

Simulazione Gara Nazionale a Squadre 2023

- Per ogni problema indicare sul cartellino delle risposte un intero compreso tra 0000 e 9999.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, dove non indicato diversamente, si indichi la sua parte intera.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se la quantità richiesta è un numero intero maggiore di 9999, se ne indichino le ultime quattro cifre.
- Alcuni problemi ritenuti più impegnativi dagli autori sono contrassegnati da una o due stelle ([$\star$] o [$\star\star$]).
- Di seguito sono riportati alcuni valori approssimati utili nello svolgimento dei calcoli:

$$\sqrt{2} \approx 1,4142 \qquad \sqrt{3} \approx 1,7321 \qquad \sqrt{5} \approx 2,2360 \qquad \sqrt{7} \approx 2,6458 \qquad \pi \approx 3,1415.$$

- **10 minuti dall'inizio:** scadenza per la scelta del problema jolly.
- **30 minuti dall'inizio:** scadenza per rivolgere domande sul testo.
- **120 minuti dall'inizio:** fine della gara.

Gara scritta da: Lorenzo Capponi, Matteo Protopapa, Matteo Rossi
Ambientazione a cura di: Lorenzo Capponi

1. *Intro*: Questa è Berk [$\star$]

"Questa è Berk. Forse non sarà il massimo della bellezza, ma questo mucchio di rocce riserva un bel po' di sorprese. La vita qui è splendida, anche se non molto adatta ai deboli di cuore. La maggior parte della gente di solito ha passatempi come intagliare il legno, o ricamare su tela... noi berkiani invece preferiamo questo gioco con i dadi: in particolare usiamo tre dadi a 10 facce, ciascuno dei quali ha le cifre da 0 a 9 sulle facce. Dopo aver lanciato i dadi, il punteggio ottenuto è pari al numero più grande che si può comporre utilizzando le tre cifre uscite: per esempio se escono 2, 7, 4 allora il punteggio è 742. Qual è il punteggio medio che si ottiene in questo gioco?"

Soluzione: la risposta è 744. Indichiamo in generale con $E(x)$ il valor medio di x e con $P(A)$ la probabilità che si verifichi l'evento A.
Siano a, b, c i tre numeri usciti in modo che $a \geq b \geq c$: la quantità cercata è $100E(a) + 10E(b) + E(c)$. Per simmetria valgono $E(a) = 9 - E(c)$ e $E(b) = 9/2$.
Siano ora x_1, x_2, x_3 tre numeri interi scelti casualmente tra 0 e 9, ciascuno indipendentemente dagli altri. Fissato un valore intero $0 \leq k \leq 9$, la probabilità che $a = k$ è

$$P(x_1 \leq k) \cdot P(x_2 \leq k) \cdot P(x_3 \leq k) - P(x_1 \leq k-1) \cdot P(x_1 \leq k-1) \cdot P(x_1 \leq k-1) = \frac{(k+1)^3 - k^3}{10^3} = \frac{3k^2 + 3k + 1}{1000}.$$

Il valore di $E(a)$ è uguale a

$$\sum_{k=0}^{9} k \cdot P(a = k) = \sum_{k=0}^{9} \frac{3k^3 + 3k^2 + k}{1000} = \frac{279}{40}.$$

Dunque $E(c) = 9 - \frac{279}{40}$ e infine

$$100E(a) + 10E(b) + E(c) = 744,525.$$

2. Corse di draghi

Oltre al gioco con i dadi, a Berk hanno preso piede anche le corse di draghi: si gareggia a cavallo del proprio drago e vince chi riesce a catturare più pecore. Alla fine di una gara combattuta, Stoick annuncia: "Considerate il polinomio $p(x) = 2023x^3 + ax^2 + bx + c$. I punteggi guadagnati dai concorrenti, in numero di pecore catturate, sono esattamente gli interi positivi n per cui esistono tre numeri reali a, b, c tali che n divide $p(m)$ per ogni m intero. Inoltre non ci sono stati due punteggi uguali". Qual è la somma complessiva di tutti i punteggi ottenuti dai concorrenti?

Soluzione: la risposta è 9472. Dimostriamo che i possibili n sono tutti e soli i divisori di $6 \cdot 2023$.
Per ogni m intero abbiamo che n deve dividere

$$p(m+1) - p(m) = 3 \cdot 2023m^2 + dm + e = q(m),$$

dove $d = 3 \cdot 2023 + 2a$, $e = 2023 + a + b$. Allo stesso modo n deve dividere

$$q(m+1) - q(m) = 6 \cdot 2023m + (3 \cdot 2023 + d) = r(m).$$

Infine n deve dividere

$$r(m+1) - r(m) = 6 \cdot 2023 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 17^2.$$

Verifichiamo che $n = 2$ è valido: poniamo che $a + b$ sia un intero dispari e c un intero pari, e osserviamo che $2 \mid p(m)$ per m pari o dispari.
Verifichiamo che $n = 3$ è valido: poniamo $c \equiv 0 \pmod 3$, $b \equiv 2 \pmod 3$, $a \equiv 0 \pmod 3$ e osserviamo che $3 \mid p(m)$ per ogni possibile congruenza di m modulo 3.
Inoltre $n = 7$ e $n = 17^2$ sono validi in quanto basta porre a, b, c multipli di n.
Infine, come conseguenza del Teorema Cinese del Resto abbiamo che se n_1, n_2 sono valori validi di n coprimi, allora anche $n_1 \cdot n_2$ è valido. Pertanto la risposta è uguale alla somma dei divisori positivi di $6 \cdot 2023$, ossia

$$(1 + 2)(1 + 3)(1 + 7)(1 + 17 + 17^2) = 29472.$$

3. La tuta alare

Hiccup ha progettato una tuta alare che gli permetta di planare in aria. Per funzionare al meglio, la membrana alare deve avere una forma ben precisa: si tratta di un triangolo ABC in cui la bisettrice interna uscente da A è parallela alla retta che tange in B la circonferenza ciroscritta ad ABC, mentre la bisettrice interna uscente da C è parallela alla retta che tange in A la circonferenza circoscritta. Quanti gradi misura l'angolo $\widehat{BAC}$?
Soluzione: la risposta è 102. Siano $\widehat{BAC} = \alpha$, $\widehat{ABC} = \beta$, $\widehat{BCA} = \gamma$. Le due rette tangenti non possono essere parallele, in quanto due bisettrici interne di un triangolo non sono mai parallele. Dunque AB non è il diametro della circonferenza circoscritta e le rette tangenti in A e B si intersecano in un punto P.
Il triangolo ABP è isoscele su base AB, quindi $\widehat{BAP} = \widehat{ABP}$ sono acuti. Segue che C giace sull'arco maggiore AB, altrimenti la bisettrice uscente da A non potrebbe essere parallela a BP. Dunque γ è acuto.
Sia O il centro della circonferenza. L'angolo $\widehat{AOB}$ misura 2γ, inoltre il quadrilatero $APBO$ ha $\widehat{OAP} = \widehat{OBP} = 90°$, perciò è ciclico. Allora $\widehat{APB} = 180° - 2\gamma$ e $\widehat{ABP} = \widehat{BAP} = \gamma$.
Dalle condizioni di parallelismo si ricava $\widehat{ABP} = \alpha/2$, dunque $\alpha = 2\gamma$. Analogamente $\widehat{BAP} = 180° - \gamma/2 - \alpha$, che è uguale a $\beta + \gamma/2$ (sfruttando che $\alpha + \beta + \gamma = 180°$). Ponendo questa espressione uguale a γ si ricava $\gamma = 2\beta$. Otteniamo $7\beta = 180°$, da cui $\alpha = \frac{720°}{7}$. Essendo $720/7 \approx 102,857$, la risposta è 102.

4. Sulla mappa [⋆]

Hiccup e Sdentato atterrano su un'isoletta sconosciuta, che Hiccup prova a collocare su una mappa: "Ci troviamo nella zona delimitata dal triangolo ABC, precisamente nel punto di concorrenza tra la bisettrice uscente da A, la mediana uscente da B e l'altezza uscente da C. Guarda, Sdentato, la bisettrice uscente da A e la mediana uscente da B sono perpendicolari! Sapendo che $AB = 1$, qual è l'area di ABC?"
Rispondere con le prime quattro cifre dopo la virgola.

Soluzione: la risposta è 9428. Siano P, M, Q rispettivamente il piede della bisettrice, il piede della mediana, il piede dell'altezza e sia X il punto di intersezione delle tre ceviane. Da $AX \perp BM$ segue che $AM = AB = 1$, perciò $AC = 2$. Per il Teorema della bisettrice vale $PC = 2BP$ e per il Teorema di Ceva abbiamo

$$1 = \frac{MC}{CP} \cdot \frac{BP}{BQ} \cdot \frac{QA}{AM},$$

da cui $BQ = 1/3$.
Ora tracciamo le rette passanti per B, X perpendicolari ad AC: la prima incontra AC in R, la seconda in S. I triangoli XQB e XSM sono congruenti, quindi $SM = BQ = 1/3$. Per il Teorema di Talete, da $BX = XM$ segue $RS = SM$, dunque $RS = 1/3$ e segue anche $AR = 1/3$.
Si ha $\cos \widehat{BAC} = \cos \widehat{BAR} = AR/AB = 1/3$. Allora $\sin \widehat{BAC} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ e l'area di ABC misura

$$\frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \widehat{BAC} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \approx 0,9428.$$

5. Un problema in eredità [$\star\star$]

"Cos'è successo stavolta?" chiede Astrid "Mi sveglio, il sole splende in cielo, dei draghi cantano sopra il tetto, scendo con molta calma a fare colazione e mentre penso che va tutto bene, sento: *Figliolo, dobbiamo parlare! Sei l'orgoglio di Berk e sono molto fiero di te. Ormai sei cresciuto, e poiché nessun Capo potrebbe desiderare un successore migliore, ho deciso di sottoporti questo problema: calcola quante sono le sequenze ordinate di 21 cifre, ciascuna scelta da 0 a 9, tali che la cifra delle unità della somma delle 21 cifre non compaia nella sequenza stessa*" "E tu cosa gli hai risposto?" "Prima che si girasse ero già scappato via"

Soluzione: la risposta è 9200. Risolviamo il problema per una sequenza di n cifre, indicando $\{1, 2, \ldots, n\}$ con $[n]$, l'insieme di tutte le possibili sequenze con S, la cifra delle unità della somma delle cifre di una sequenza $s \in S$ con u_s, l'i-esima cifra di una sequenza s con s_i, infine l'insieme delle sequenze s tali che $s_i = u_s$ con S_i. La quantità cercata è $\left|D \setminus \bigcup_{i=1}^n S_i\right|$, che per il principio di inclusione-esclusione è uguale a

$$\sum_{J\subseteq[n]} (-1)^{|J|}\left|\bigcap_{j\in J} S_j\right|.$$

Una sequenza appartiene a S_i se e solo se la somma di tutte le cifre eccetto l'i-esima è un multiplo di 10. Segue che $|S_i| = 10 \cdot 10^{n-2} = 10^{n-1}$, in quanto l'$i$-esima cifra si può scegliere in 10 modi e le altre le cifre si possono scegliere in 10^{n-2} modi (dopo averne scelte $n-2$, l'ultima è univocamente determinata).
Fissiamo ora un sottoinsieme $J \subset [n]$; se una sequenza s appartiene a $\bigcap_{j\in J} S_j$ allora $s_j = u_s$ per ogni $j \in J$. Ci sono 10 modi di scegliere u_s e poi $10^{(n-|J|)-1}$ modi di scegliere le altre cifre (come prima, dovendo la somma delle cifre eccetto s_j essere un multiplo di 10, dopo aver scelto $n - |J| - 1$ cifre l'ultima è univocamente determinata); dunque le cifre si possono scegliere in tutto in $10^{n-|J|}$ modi.
Se $J = |n|$, non tutti valori di u_s sono possibili: infatti, dobbiamo imporre che l'ultima cifra di nu_s sia u_s, ossia $10 \mid u_s(n-1)$. Ci sono esattamente $\mathrm{MCD}(n-1, 10)$ possibilità per u_s in questo caso.
Dunque, otteniamo

$$\sum_{J\subseteq[n]} (-1)^{|J|}\left|\bigcap_{j\in J} S_j\right| = \sum_{J\subseteq[n]} (-1)^{|J|}10^{n-|J|} = (10-1)^n + (-1)^n(\mathrm{MCD}(n-1, 10) - 1).$$

La seconda uguaglianza segue dal teorema binomiale: confrontando $\sum_{J\subseteq[n]}(-1)^{|J|}10^{n-|J|}$ con l'espansione di $(10-1)^n$ si può osservare che i loro termini coincidono, eccetto il caso $J = [n]$ che abbiamo trattato a parte: occorre dunque sostituire $(-1)^n$ con $\mathrm{MCD}(n-1, 10)$.
Per $n = 21$, la risposta è $9^{21} - (\mathrm{MCD}(20, 10) - 1) = 9^{21} - 9$, le cui ultime quattro cifre sono 9200.

6. Lastre di ghiaccio

Durante un volo di esplorazione, Hiccup e Astrid trovano le rovine di una fortezza distrutta. Vengono colpiti in particolare dalla presenza di enormi lastre di ghiaccio: ognuna ha la forma di triangolo ABC in cui D è il punto sul lato BC tale che $DA = 13$ m, $DB = 14$ m, $DC = 4$ m. I due vichinghi osservano che le circonferenze circoscritte ai triangoli ADB e ADC sono congruenti, dunque calcolano al volo l'area di ABC, espressa in m^2.

Soluzione: la risposta è 108. Il fatto che le due circonferenze siano congruenti implica che gli angoli alla circonferenza $\widehat{ACD}$ e $\widehat{ABD}$ sono uguali, cioè il triangolo ABC è isoscele con $AB = AC$. Con il Teorema di Pitagora si ricava che l'altezza misura 12 e l'area è uguale a 108.

7. Cacciatori di draghi

Hiccup e Astrid, in volo con Sdentato e Tempestosa, cadono vittime di un'imboscata tesa da un gruppo di cacciatori di draghi. "Dove ho lasciato le buone maniere? Io sono Eret, figlio di Eret, il più abile a intrappolare draghi ancora in vita! Dovrete ammettere che non è da tutti riuscire a catturare una Furia Buia... servono delle reti fabbricate appositamente: devono avere la forma di un decagono regolare e in corrispondenza dei vertici bisogna posizionare degli uncini particolari. Esistono uncini di tre tipi diversi, da usare a seconda della specie; affinché una rete sia adatta alla cattura di una Furia Buia, l'importante è che il decagono possieda esattamente 5 lati alle cui estremità si trovano uncini di tipi diversi. In quanti modi si possono sistemare gli uncini?"
Due configurazioni ottenibili l'una dall'altra per rotazione o riflessione sono da considerarsi distinte.

Soluzione: la risposta è 7560. Un'interpretazione alternativa del problema consiste in una colorazione dei vertici del decagono, avendo a disposizione tre colori diversi. Le colorazioni sul decagono che verificano le condizioni richieste sono $\binom{10}{5}$ volte le colorazioni dei vertici di un pentagono tali che nessun lato abbia estremi dello stesso colore: infatti,

una volta colorato un pentagono si può immaginare di far coincidere i suoi 5 vertici con altrettanti vertici del decagono, per poi colorare ciascuno dei 5 vertici rimanenti del decagono con lo stesso colore del vertice successivo in senso orario che è già colorato.
Restano da contare le possibili colorazioni dei vertici di un pentagono. Un possibile modo è osservare che, detto C_n il numero di possibili colorazioni di un n-agono tali che nessuno degli n lati abbia estremi dello stesso colore, vale la relazione di ricorrenza $C_n = C_{n-1} + 2C_{n-2}$, da cui $C_n = 2^n + (-1)^n \cdot 2$. Si ricava dunque $C_5 = 30$ e la risposta è $30 \cdot \binom{10}{5} = 7560$.

8. Lezioni per il futuro Capo

"Allora Hiccup, lezione numero uno: il primo dovere di un Capo è verso il suo popolo, bisogna andare incontro alle esigenze delle persone. Ecco, c'è un vichingo che richiede assistenza!" "È tutto il giorno che sono qui... vorrei risolvere il seguente problema ma non ne sono capace: devo considerare tutte le frazioni a/b, con a e b interi positivi coprimi, la cui scrittura in base 6 è $0,\overline{a_1a_2\dots a_k}$, dove $a_1, \dots, a_k$ sono cifre distinte che si ripetono con periodo k. Potete aiutarmi a trovare la somma di tutte queste frazioni?" "Certamente, lo risolviamo subito! Lezione numero due, Hiccup: niente è poco importante quando si tratta di essere utili alla propria gente"

Soluzione: la risposta è 978. Sia S l'insieme di tutte le frazioni considerate e poniamo $y = 0,\overline{5}$. Notiamo che se $x \in S \setminus y$ allora anche $1 - x \in S \setminus y$; dunque la somma cercata è uguale alla metà di $|S \setminus y|$, più $y = 0,\overline{5} = 1$. Per ogni $1 \leq k \leq 6$ ci sono $\binom{6}{k}$ modi di scegliere k cifre distinte e $k!$ modi di permutarle; togliendo $0,\overline{0}$ e $0,\overline{5}$, risulta che gli elementi di $S \setminus y$ sono

$$\sum_{k=1}^{6} \binom{6}{k} k! - 2 = 1954$$

e la risposta è $1954/2 + 1 = 978$.

9. Fortificazione di Berk [$\star$]

"Dobbiamo fortificare Berk! Tutti i draghi a terra!" ordina Stoick "Chiudete i cancelli, abbassate le controporte! Che nessun drago o vichingo lasci quest'isola finché non sarò io a ordinarvelo! Abbiamo 2023 recinti a disposizione, numerati da 1 a 2023: bisogna portare i draghi dentro alcuni dei recinti, in modo che la somma dei numeri dei recinti occupati dia resto 2023 se divisa per 2048. In quanti modi si possono scegliere i recinti da occupare?"
Rispondere con le ultime tre cifre del risultato.

Soluzione: la risposta è 96. Indichiamo con $s(A)$ la somma degli elementi di un insieme A. Per ogni $0 \leq k \leq 2047$ esiste uno e un solo sottoinsieme X_k di $X = \{2^0, 2^1, \dots, 2^{10}\}$ tale che $s(X_k) = k$ (poniamo $s(\emptyset) = 0$); di conseguenza, per ogni sottoinsieme Y di $\{1, 2, \dots, 2023\} \setminus X$ esiste uno e un solo sottoinsieme di X tale che $s(Y) + s(X) \equiv 2023 \pmod{2048}$. Pertanto, la risposta è uguale al numero di sottoinsiemi di $\{1, 2, \dots, 2023\} \setminus X$, che sono 2^{2012}. La congruenza di 2^{2012} modulo 1000, che si può calcolare sfruttando che $2^{100} \equiv 1 \pmod{125}$ grazie al Teorema di Eulero, è 96.

10. Addestramento di draghi

Hiccup, testardo, si rifiuta di credere che una guerra contro Drago Bludvist sia inevitabile, quindi torna da Eret per consegnarsi come prigioniero e farsi portare da Drago. "Una volta conquistata la lealtà di un drago, non c'è niente che non possa fare per te" spiega Hiccup, rivolgendosi a Eret "Con il giusto approccio, persino i draghi più scontrosi possono essere addestrati a calcolare divisioni intere, cioè con quoziente intero e resto" "Non farai cambiare idea a nessuno qui!" replica Eret "Potrei farlo con te, anche adesso" insiste Hiccup "Sdentato, calcola quanti sono i diversi quozienti interi positivi che si possono ottenere effettuando una divisione intera di 2023"

Soluzione: la risposta è 88. Occorre determinare quanti valori può assumere l'espressione $\left\lfloor \frac{2023}{n} \right\rfloor$ al variare di n. Consideriamo la differenza $\frac{2023}{n} - \frac{2023}{n+1} = \frac{2023}{n(n+1)}$: i valori positivi di n per cui vale la disuguaglianza $\frac{2023}{n(n+1)} < 1$ sono quelli strettamente maggiori di $\frac{-1+\sqrt{8093}}{2}$, ossia $n \geq 45$. Essendo $\left\lfloor \frac{2023}{45} \right\rfloor = 44$, certamente l'espressione $\left\lfloor \frac{2023}{n} \right\rfloor$ può assumere tutti i valori interi da 1 a 44, estremi inclusi. Inoltre, per ogni $1 \leq n \leq 44$, $\left\lfloor \frac{2023}{n} \right\rfloor$ assume valori interi maggiori di 44 tutti distinti. Dunque la risposta è $44 + 44 = 88$.

11. Il flagello dell'Algebra [$\star\star$]

"Anni fa, ci fu una grande riunione di Capi tribù per discutere il flagello della matematica che incombeva su di noi" racconta Stoick "Nel gruppo c'era anche uno straniero venuto da una terra sconosciuta, avvolto in un mantello pieno di formule. Non aveva calcolatrici e parlava a bassa voce: diceva che lui, Drago Bludvist, era un matematico, votato a liberare l'umanità dai problemi di Algebra. Affermava che solo lui sapeva come avere il controllo di una certa successione $a_1, a_2, \ldots$ di numeri reali positivi, e che avrebbe potuto svelarci ogni segreto dell'Algebra se ci fossimo inchinati a lui. Noi ridemmo, finché lui scrisse su una lavagna che per ogni intero positivo n valeva $\sum_{k=1}^{n} a_k a_{\lfloor\sqrt{k}\rfloor} = n^2$, e gridò: *Allora vediamo come ve la cavate senza di me a calcolare il minimo m tale che* $a_m > 100$. Io fui l'unico dei presenti che si salvò, riuscendo a risolvere il problema"

Soluzione: la risposta è 1018. Notiamo che

$$\sum_{k=1}^{n} a_k a_{\lfloor\sqrt{k}\rfloor} - \sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{\lfloor\sqrt{k}\rfloor} = n^2 - (n-1)^2$$
$$a_n a_{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} = 2n - 1.$$

Dunque a_n si può esprimere come $\frac{2n-1}{a_{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}$. Notiamo che sostituendo $a_{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}$ con $\frac{2\lfloor\sqrt{n}\rfloor-1}{a_{\left\lfloor\sqrt{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}\right\rfloor}}$ otteniamo

$$a_n = \frac{2n-1}{2\lfloor\sqrt{n}\rfloor - 1} \cdot a_{\left\lfloor\sqrt{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}\right\rfloor} > \sqrt{n} \cdot a_{\left\lfloor\sqrt{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}\right\rfloor}.$$

Per $n = 6^4 - 1 = 1295$ si ha $a_{1295} > 35 a_5$, e si può ricavare facilmente $a_5 = 3$, dunque $a_{1295} > 105$. Allora la risposta del problema è minore di 1295; in particolare, notiamo che $a_{\left\lfloor\sqrt{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}\right\rfloor}$ deve essere uno tra a_1, a_2, a_3, a_4, a_5. Si ricavano facilmente $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 5$, $a_4 = 7/3$, $a_5 = 3$.
Il caso $a_{\left\lfloor\sqrt{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}\right\rfloor} = a_4$ si esclude sostituendo $a_4 = 7/3$ e $n = 5^4 - 1$, da cui segue $a_n < 100$.
I casi $a_{\left\lfloor\sqrt{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}\right\rfloor} = a_k$ con $k < 4$ si possono escludere considerando la stima

$$a_n = a_{\left\lfloor\sqrt{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}\right\rfloor} \cdot \frac{2n-1}{2\lfloor\sqrt{n}\rfloor - 1} < a_{\left\lfloor\sqrt{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}\right\rfloor} \cdot \frac{2\left(\lfloor\sqrt{n}\rfloor + 1\right)^2 - 1}{2\lfloor\sqrt{n}\rfloor - 1} = a_{\left\lfloor\sqrt{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}\right\rfloor} \cdot \left(\lfloor\sqrt{n}\rfloor + 5/2 + \frac{7/2}{2\lfloor\sqrt{n}\rfloor - 1}\right).$$

Si trova che l'unica possibilità è $a_{\left\lfloor\sqrt{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}\right\rfloor} = a_5 = 3$, quindi $a_n = \frac{6n-3}{2\lfloor\sqrt{n}\rfloor-1}$. Sfruttiamo nuovamente la disuguaglianza riportata sopra:

$$a_n = \frac{6n-3}{2\lfloor\sqrt{n}\rfloor - 1} < 3\left(\lfloor\sqrt{n}\rfloor + 5/2 + \frac{7/2}{2\lfloor\sqrt{n}\rfloor - 1}\right)$$
$$\left(\lfloor\sqrt{n} + 5/2 + \frac{7/2}{2\lfloor\sqrt{n}\rfloor - 1}\right) > 33$$
$$\lfloor\sqrt{n}\rfloor + 3 > 33$$
$$\lfloor\sqrt{n}\rfloor > 30.$$

Ponendo $\lfloor\sqrt{n}\rfloor = 31$ si ha $a_n = \frac{6n-3}{61}$, che è maggiore di 100 per $n \geq 1018$.

12. Il Santuario

Valka porta Hiccup nel Santuario: "Questo è il Santuario, un luogo sicuro per tutti i draghi. Per vent'anni sono stata qui, salvando queste stupende creature. Guarda, su quella roccia sono appollaiati 11 draghi in fila, da sinistra verso destra, tutti di altezze diverse; c'è esattamente una coppia di draghi adiacenti tali che quello a sinistra è più alto di quello a destra". In quanti modi diversi potrebbero essere appollaiati gli 11 draghi?

Soluzione: la risposta è 2036. Una sequenza di draghi come quella descritta si può creare scegliendo una partizione degli 11 draghi in due sottoinsiemi, formando due sequenze crescenti (in ordine di altezza) nei due sottoinsiemi e infine concatenando le due sequenze per formare un'unica sequenza di 11 draghi. Ci sono 2^{10} modi di effettuare la partizione, un unico modo di disporre i draghi in ordine crescente nelle due sottosequenze, infine 2 modi di concatenare le due sottosequenze di seguito. Infine, bisogna sottrarre i 12 casi in cui la sequenza finale risulta completamente crescente. La risposta è $2^{10} \cdot 2 - 12 = 2036$.

13. Il Drago Alpha [$\star$]

"Il Santuario è la casa della Grande Bestia Selvaggia: la specie Alpha, uno dei pochi ancora rimasti in vita. Ogni nido ha la sua regina, ma questo è Sua Maestà il Re di tutti i draghi. Lui ci protegge, noi tutti viviamo sotto la sua tutela e il suo comando. Con il suo potere, sa calcolare le radici α_1, α_2, α_3, α_4 di qualunque polinomio di quarto grado"
"Quindi, dato il polinomio $x^4 + 8x^3 + 51x^2 + 140x + 140$, il drago Alpha saprebbe calcolare il valore dell'espressione

$$\left(1 + \frac{1}{(\alpha_1+2)^2}\right)\left(1 + \frac{1}{(\alpha_2+2)^2}\right)\left(1 + \frac{1}{(\alpha_3+2)^2}\right)\left(1 + \frac{1}{(\alpha_4+2)^2}\right),$$

vero?” chiede Hiccup, ammirato.
Rispondere con la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.

Soluzione: la risposta è 89. Consideriamo il polinomio

$$q(x) = p(x-2) = x^4 + 27x^2 + 16.$$

Le radici di $q(x)$ sono $\alpha_1 + 2$, $\alpha_2 + 2$, $\alpha_3 + 2$, $\alpha_4 + 2$.
Ora consideriamo il *polinomio reciproco* di $q(x)$, che è

$$r(x) = x^n q(1/x) = 16x^4 + 27x^2 + 1.$$

In generale, dato un polinomio $a(x)$, il suo polinomio reciproco $b(x)$ è quello le cui radici sono i reciproci delle radici di $a(x)$, e che si scrive invertendo l'ordine dei coefficienti di $a(x)$. Dunque, le radici di $r(x)$ sono $\frac{1}{\alpha_1+2}$, $\frac{1}{\alpha_2+2}$, $\frac{1}{\alpha_3+2}$, $\frac{1}{\alpha_4+2}$.
Ora consideriamo il polinomio $r^*(x) = x^4 + \frac{27}{16}x^2 + \frac{1}{16}$, che possiede le stesse radici di $r(x)$.
Osserviamo che, dato un polinomio monico di secondo grado $x^2 + bx + c = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2)$ con radici λ_1 e λ_2, il polinomio $x^4 + bx^2 + c$ si può scomporre come

$$(x^2 - \lambda_1)(x^2 - \lambda_2) = (x - \sqrt{\lambda_1})(x + \sqrt{\lambda_1})(x - \sqrt{\lambda_2})(x + \sqrt{\lambda_2}).$$

Siano β_1, β_2 le radici del polinomio

$$t(x) = r^*(\sqrt{x}) = x^2 + \frac{27}{16}x + \frac{1}{16}.$$

Allora $r^*(x)$ si può scomporre come $(x - \sqrt{\beta_1})(x + \sqrt{\beta_1})(x - \sqrt{\beta_2})(x + \sqrt{\beta_2})$. La quantità cercata è $(1+\beta_1)(1+\beta_2)(1+\beta_2)(1+\beta_2)$, che è uguale a $(t(-1))^2 = 25/64$. La risposta è $25 + 64 = 89$.

14. Scorpacciata di pesce

“Devi essere affamato, Hiccup. Vieni, è l'ora della pappa”. Valka conduce Hiccup fuori dal Santuario, in volo sopra il mare. Il gigantesco Drago Alpha emerge in superficie, lanciando in aria decine di pesci: 20 salmoni, 12 trote e alcune anguille. Hiccup non riesce a contare le anguille, ma Valka afferma che, catturando un pesce a caso, la probabilità che sia un'anguilla è esprimibile come $1/p$ con p intero. “Ora sapresti dire quante anguille ci sono, Hiccup?” “Non posso comunque saperlo con certezza, mamma!” “Hai ragione: calcola la somma di tutte le possibili quantità diverse di anguille”

Soluzione: la risposta è 63. Detto a il numero di anguille, la probabilità di pescare un'anguilla è $\frac{1}{p} = \frac{a}{20+12+a}$, da cui $p = \frac{32+a}{a} = \frac{32}{a} + 1$. Affinché p sia intero, a deve dividere 32: la somma dei divisori positivi di 32 è $1+2+4+8+16+32 = 63$.

15. Ogni drago ha i suoi segreti

“Ho vissuto tra i draghi per vent'anni” racconta Valka “Posso insegnarti tutto quello che ho imparato. Vedi, ogni drago ha i suoi segreti: ciascuno possiede un *polinomio intrinseco* a coefficienti razionali. Per esempio il polinomio intrinseco $p(x)$ di Sdentato è quello di grado minimo possibile tale che $p\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right) = \sqrt{2}$. Posso anche scoprire la sua età, esaminando i suoi denti: che coincidenza, l'età di Sdentato espressa in anni è uguale a $p(10)$”. Quanti anni ha Sdentato?

Soluzione: la risposta è 455. Chiaramente $p(x)$ non può essere di primo grado, perché altrimenti nell'espressione $p\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)$ comparirebbe $\sqrt{3}$. Analogamente, non può nemmeno essere di secondo grado, in quanto $\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)^2 = 5 + 2\sqrt{6}$. Cerchiamo allora dei numeri razionali a, b, tali che $a\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)^3 + b\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right) = \sqrt{2}$, cioò imponiamo che i coefficienti di $\sqrt{3}$ e $\sqrt{2}$ abbiano somma rispettivamente uguale a 0 e uguale a 1; ricaviamo $a = 1/2$, $b = -9/2$, dunque $p(x) = x^3/2 - 9x/2$ è il polinomio cercato. La risposta è $p(10) = 455$.

16. Leviatano di classe n

Astrid, Gambedipesce, Moccicoso, Testaditufo e Testabruta temono che Hiccup sia stato catturato da Drago Bludvist, quindi costringono Eret a condurli nel suo covo. Da lontano intravedono la sagoma di una creatura sotto il pelo dell'acqua. “Che cos'è?” domanda Astrid, e subito l'esperto Gambedispesce risponde: “Bolle dal diametro grande, polmoni imponenti, abitante di acque fredde e profonde: penso sia un Leviatano di classe n, dove n è il più piccolo multiplo intero positivo di 39 con somma delle cifre minima!”

Soluzione: la risposta è 101. Essendo 39 multiplo di 3, la somma delle cifre deve essere a sua volta un multiplo di 3. Studiamo ora le congruenze modulo 13 delle potenze di 10: $10^0 \equiv 1$, $10^1 \equiv 10$, $10^2 \equiv 9$, $10^3 \equiv 12$, $10^4 \equiv 3$, $10^5 \equiv 4$, $10^6 \equiv 1$. Non è difficile verificare che il più piccolo numero ottenibile con somma delle cifre uguale a 3 è $10^4 + 10^2 + 1 = 10101$.

17. Il mantello di Drago

Gli scagnozzi di Eret portano Astrid, Gambedipesce, Moccicoso, Testaditufo e Testabruta al cospetto di Drago Bludvist, su un molo la cui forma è un trapezio isoscele con basi AB e CD con $AB = 60$, $AD = 50$, $\widehat{DAB} = 60°$. Drago Bludvist si trova in un punto E sul lato BC e Zannacurva, il drago cavalcato da Moccicoso, gli spunta contro una palla di fuoco dal punto A. La palla di fuoco rimbalza sul mantello di pelle di drago indossato da Bludvist, per poi spegnersi sul lato AD nel punto F tale che $AF = 30$. La traiettoria della palla di fuoco è descritta dalla spezzata AEF, ovviamente in modo che $\widehat{AEB} = \widehat{FEC}$. Quanto misura l'area del triangolo AFE?

Soluzione: la risposta è 259. Sia G l'intersezione tra i prolungamenti di AD e BC; il triangolo ABG è equilatero, inoltre ABE e GFE sono simili. Essendo $GF = AG - AF = 30$, il rapporto di similitudine è uguale a 2, quindi $BE = 40$, $EG = 20$. L'area di ABE misura $\frac{1}{2} AB \cdot BE \sin 60° = 600\sqrt{3}$, mentre l'area di FGE misura $150\sqrt{3}$. Infine calcoliamo l'area di AFE come differenza tra l'area di ABG e le aree di ABE e GFE:

$$30 \cdot 30\sqrt{3} - 600\sqrt{3} - 150\sqrt{3} = 150\sqrt{3} \approx 259,815.$$

18. Cavalieri dei draghi

"Drago Bludvist!" saluta Eret "È sempre bello vederti amico mio! Come promesso, sono arrivato giusto in tempo con una nuova infornata di draghi. E come regalino personale ti ho anche portato i loro cavalieri; a quanto pare ce ne sono ancora un bel po' in circolazione..." "Quanti sono gli altri cavalieri?" tuona Bludvist "Centinaia!" interviene Astrid "Un'intera isola piena! Questo numero è esprimibile come somma di 9, 10 oppure 11 interi positivi consecutivi!". Quanti sono al minimo i cavalieri dei draghi?

Soluzione: la risposta è 495. Sia n il numero cercato. La congruenza modulo 9 di n è $1 + 2 + \cdots + 8 = 36 \equiv 0$, cioè n è multiplo di 9. La congruenza modulo 10 di n è $1 + 2 + \cdots + 9 = 45 \equiv 5$, cioè n è un multiplo di 5 dispari. La congruenza modulo 11 di n è $1 + 2 + \cdots + 10 = 55 \equiv 0$, cioè n è multiplo di 11.
Segue che n non può essere minore del minimo comune multiplo di 9, 5, 11, che è 495. Si può verificare che questo numero soddisfa le condizioni richieste.

19. Sepolti nel ghiaccio [$\star$]

Hiccup e Sdentato affrontano Drago Bludvist: "Ormai è finita, arrenditi!", ma improvvisamente il drago Alpha comandato da Bludvist intrappola Hiccup e Sdentato in un enorme blocco di ghiaccio. La sua forma è un poliedro formato accostando i tetraedri regolari distinti $ABCD$, $ABDE$, $ACDF$. Proprio quando Valka teme che sia tutto perduto, una luce intensa si sprigiona dall'interno del ghiaccio, che si frattura: compare una crepa passante per i punti B, C, F, E, da cui fuoriescono illesi Hiccup e Sdentato, pronti a dare il colpo di grazia a Bludvist e alla sua bestia. Se gli spigoli dei tetraedri misurano 10 m, qual è l'area in m^2 del quadrilatero convesso $BCFE$?

Soluzione: la risposta è 125. Osserviamo che $BCFE$ è un trapezio isoscele passante per il punto medio H di AD. Con il Teorema di Pitagora si ricavano $CH = 5\sqrt{3}$, $MH = 5\sqrt{2}$. Sia $\theta = \widehat{CHM}$; osserviamo che i triangoli BCH e CFH sono congruenti, quindi $\widehat{CHF} = 2\theta$. Calcoliamo $\sin \widehat{FHN} = \sin(180° - 3\theta)$:

$$\begin{aligned}
\sin\theta &= \frac{CM}{CH} = \frac{5}{5\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \\
\cos\theta &= \sqrt{1 - \sin^2\theta} = \frac{\sqrt{6}}{3} \\
\sin 2\theta &= 2\sin\theta\cos\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3} \\
\cos 2\theta &= \cos^2\theta - \sin^2\theta = \frac{1}{3} \\
\sin 3\theta &= \sin(2\theta + \theta) = \sin 2\theta\cos\theta + \sin\theta\cos 2\theta = \frac{5\sqrt{3}}{9}.
\end{aligned}$$

Ora $FN/FH = \frac{5\sqrt{3}}{9}$ e sostituendo $FH = 5\sqrt{3}$ si ricava $FN = \frac{25}{3}$. Con il Teorema di Pitagora troviamo $MN = \frac{20\sqrt{2}}{3}$ e infine l'area di $BCFE$ è $\frac{800\sqrt{2}}{9} \approx 125,7$. La risposta è 125.

20. Lunga vita al Capo [$\star\star$]

Terminata la battaglia, è il momento della solenne cerimonia di proclamazione del nuovo Capo. Hiccup si inginocchia, mentre l'anziana del villaggio gli disegna sulla fronte un triangolo ABC rettangolo con $AB = 7$ e ipotenusa BC, per poi evidenziare l'unico punto P che verifica la relazione $AP : BP : CP = 3 : 4 : 5$. "Il Capo è tornato a casa! Lunga vita al Capo!". Quanto misura al massimo l'area di ABC?

Soluzione: la risposta è 129. Enunciamo due Lemmi, che riportiamo senza dimostrazione.
Lemma 1: dato un segmento PQ e fissato un rapporto k, il luogo dei punti R tali che $RP/RQ = k$ è una circonferenza detta *circonferenza di Apollonio*, il cui centro si trova sul prolungamento del segmento.
Lemma 2: dato un triangolo PQR, tre circonferenze di Apollonio relative ai segmenti PQ, QR, RP (definite con qualsiasi rapporto k, non necessariamente lo stesso per i tre lati) hanno i centri allineati.
Consideriamo la circonferenza di Apollonio Γ_{AB} definita come luogo dei punti T tali che $TA/TB = 3/4$; la circonferenza di Apollonio Γ_{AC} definita come luogo dei punti T tali che $TA/TC = 3/5$; la circonferenza di Apollonio Γ_{BC} definita come luogo dei punti T tali che $TB/TC = 4/5$. Il fatto che esista un unico punto P che verifica $AP : BP : CP = 3 : 4 : 5$ significa che quel punto giace contemporaneamente sulle tre circonferenze di Apollonio. Inoltre, per il Lemma 2, avendo le tre circonferenze i centri allineati, segue che sono tutte tangenti in un unico punto.
Siano X il centro di Γ_{AB}, D l'intersezione di Γ_{AB} con il segmento AB, D' il simmetrico di D rispetto a X e r_{AB} il raggio di Γ_{AB}. Per la definizione della circonferenza di Apollonio, valgono $AD : DB = 3 : 4$, da cui $AD = 3$, $DB = 4$. Inoltre, considerando il punto D', vale $D'A : D'B = (2r_{AB} - AD) : (2r_{AB} + DB) = 3 : 4$. Si ricava $r_{AB} = 12$, da cui $AX = 9$.
Analogamente, siano Y il centro di Γ_{AC}, E l'intersezione di Γ_{AC} con il segmento AC, E' il simmetrico di E rispetto a Y e r_{AC} il raggio di Γ_{AC}. Ponendo $AC = h$, valgono $AE : EC = 3 : 5$, da cui $AE = 3h/8$, $EC = 5h/8$. Considerando il punto E', vale $E'A : E'C = (2r_{AC} - AE) : (2r_{AC} + EC) = 3 : 5$. Si ricava $r_{AC} = 15h/16$, da cui $AY = 9h/16$.
Notando che Γ_{AB} e Γ_{AC} sono tangenti internamente, la distanza XY tra i loro centri è uguale alla differenza tra i loro raggi $r_{AC} - r_{AB} = 15h/16 - 12$. Allo stesso tempo, con il Teorema di Pitagora possiamo esprimere XY come $\sqrt{AY^2 + AX^2} = \sqrt{81h^2/256 + 81}$, ottenendo la seguente equazione:

$$15h/16 - 12 = \sqrt{81h^2/256 + 81}.$$

La soluzione di questa equazione è $h = 20 + 12\sqrt{2}$. Dunque l'area di ABC è $\frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot (20 + 12\sqrt{2}) = 70 + 42\sqrt{2} \approx 129,396$. La risposta è 129.

21. *Outro*, Questa è Berk [$\star\star$]

"Questa è Berk. Un po' malandata, ferita e ricoperta di ghiaccio, ma è casa. La nostra casa. Coloro che ci attaccano sono inesorabili e pazzi, ma quelli che li fermano lo sono ancora di più! Forse saremo pochi, ma siamo più forti di qualunque sfida il mondo ci presenterà, come trovare la somma degli interi positivi n che verificano

$$\frac{\mathrm{MCD}(1,n)}{n} + \frac{\mathrm{MCD}(2,n)}{n} + \cdots + \frac{\mathrm{MCD}(n,n)}{n} = 6.$$

Noi siamo la voce della pace, e passo dopo passo cambieremo il mondo. Vedete, noi abbiamo qualcosa che gli altri non hanno. Loro hanno eserciti e flotte navali, però noi abbiamo... i nostri draghi!"

Soluzione: la risposta è 1192. Sfruttiamo il seguente Lemma, di cui non riportiamo la dimostrazione (che è facilmente reperibile online): la funzione

$$f(n) = \mathrm{MCD}(1,n) + \mathrm{MCD}(2,n) + \cdots + \mathrm{MCD}(n,n)$$

è una *funzione moltiplicativa*, ossia tale che dati a, b interi positivi coprimi vale $f(ab) = f(a)f(b)$. In particolare si può ricavare $f(n) = n \cdot \prod_{i=1}^{k} \left(\frac{(e_i+1)p_i - e_i}{p_i}\right)$, dove $n = p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdot \cdots \cdot p_k^{e_k}$ è la scomposizione in fattori primi di n.
L'espressione riportata nel testo è $f(n)/n = \prod_{i=1}^{k} \left(\frac{(e_i+1)p_i - e_i}{p_i}\right)$. Notiamo che per ogni p_i dispari il numeratore $(e_i + 1)p_i - e_i$ è dispari, pertanto necessariamente $p_1 = 2$ deve essere un fattore di n affinché tale prodotto sia uguale a 6. Ponendo $p_1 = 2$ nell'espressione $\frac{(e_1+1)p_1 - e_1}{p_1}$ ricaviamo $1 + e_1/2$, che deve essere pari: in particolare, le uniche possibilità sono $e_1 = 2$, $e_1 = 6$, $e_1 = 10$ (per $e_1 < 10$ il prodotto finale sarebbe maggiore di 6).
Per $e_1 = 10$ vale $\frac{(e_1+1)p_1 - e_1}{p_1} = 6$, quindi non ci sono altri fattori primi: abbiamo la soluzione $n = 2^{10} = 1024$.
Per $e_1 = 6$ vale $\frac{(e_1+1)p_1 - e_1}{p_1} = 4$, quindi il prodotto degli altri fattori deve essere uguale a $3/2$; in questo caso non ci sono soluzioni, poiché il più piccolo valore che può avere uno dei fattori $\frac{(e_1+1)p_1 - e_1}{p_1}$ per $p_i \geq 3$ è $5/3$ (con $p_2 = 3$ e $e_2 = 1$), che è maggiore di $3/2$.

Per $e_1 = 2$ vale $\frac{(e_1+1)p_1-e_1}{p_1} = 2$, quindi il prodotto degli altri fattori deve essere uguale a 3. Osserviamo che non possono esserci più di due fattori primi distinti oltre al 2, poiché con altri tre fattori primi il minimo prodotto possibile sarebbe uguale a $5/3 \cdot 9/5 \cdot 13/7 > 3$. Notiamo che $5/3 \cdot 9/5 = 3$, quindi una soluzione possibile è $n = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$. Infine, con un solo fattore primo oltre al 2, si trova la soluzione $n = 2^2 \cdot 3^3 = 108$.
La risposta è $1024 + 60 + 108 = 1192$.