Algebra – Problemi di Ammissione

1. Dato un polinomio P a coefficienti interi, definiamo il polinomio $f(P)$ nel modo seguente:

    - Se P è un polinomio monico con grado $n \geq 1$ e con n radici intere $r_0 \leq r_1 \leq \cdots \leq r_{n-1}$ (contate con la relativa molteplicità) allora

    $$(f(P))(x) = x^n + r_{n-1}x^{n-1} + r_{n-2}x^{n-2} + \cdots + r_1 x + r_0$$

    - Altrimenti, $f(P)$ è il polinomio nullo.

    Trovare tutti i polinomi non costanti e monici a coefficienti interi tale che la sequenza $P, f(P), f(f(P)), \ldots$ non contiene il polinomio nullo.

2. Trovare tutte le funzioni $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ tali che

    $$f(x^2 + f(xy)) + f(y^2 + f(xy)) = (x + y)^2$$

    per ogni $x, y \in \mathbb{R}^+$

3. Siano $n > k$ due numeri interi positivi e siano $a_1, \ldots, a_n$ numeri reali nell'intervallo aperto $(k-1, k)$. Siano $x_1, \ldots, x_n$ numeri reali positivi tale che per ogni sottoinsieme $I \subset \{1, \ldots, n\}$ con cardinalità k, si ha

    $$\sum_{i \in I} x_i \leq \sum_{i \in I} a_i.$$

    Trovare il massimo di $x_1 x_2 \cdots x_n$.