Stage Senior 2014

Eserciziario

...è difficile spiegare,
è difficile capire
se non hai capito già...

F. Guccini - *Vedi Cara*

Parte I

Esercizi di base

Di seguito sono raccolti esercizi di livello base sul syllabus olimpico che viene svolto (si spera!) durante lo Stage Senior Basic. Lo scopo di tali esercizi è duplice:

- servono per far pratica con le tecniche e i concetti appresi nelle varie lezioni, in modo da potersi esercitare su cose che poi dovranno essere automatismi per il problem-solver esperto;
- servono per verificare, per chi ha già assistito al livello basic, di aver compreso e imparato ad utilizzare i contenuti fondamentali delle lezioni.

Alcuni esercizi sono ripetitivi e meccanici, una volta che si impara "il trucco"; ovviamente non è allora necessario terminarli. Idealmente, uno studente che vuole accedere al livello Medium dovrebbe riuscire a fare la maggior parte di questi esercizi a colpo d'occhio o comunque quasi immediatamente.

1 Geometria

1.1 Trigonometria

Esercizio 1. Sapendo che $\sin 0 = 0$ e tramite le formule di bisezione, calcolare $\sin\theta$ e $\cos\theta$ per i seguenti valori di θ

$$\theta = \pi/4, \pi/8, 3\pi/8, \pi/16 .$$

Esercizio 2. Sapendo che $\sin\pi/6 = 1/2$, tramite le formule note e gli esercizi precedenti, calcolare $\sin\theta$ e $\cos\theta$ per i seguenti valori di θ

$$\theta = \pi/3, \pi/12, 5\pi/12, 7\pi/6, 7\pi/12 .$$

Esercizio 3. Esprimere in termini di $\sin\theta$ e $\cos\theta$ le seguenti funzioni trigonometriche

$$\sin(2\theta + \pi/4),\ \sin(3\theta),\ \cos 3\theta,\ \tan 4\theta .$$

Esercizio 4. Calcolare, in termini dei lati e degli angoli del triangolo ABC, le seguenti lunghezze

$$AH,\ HH_a,\ BH_a,\ H_bH_c,\ OM_a,\ OH,\ AI,\ IA',\ IO$$

dove H è l'ortocentro, O è il circocentro, I l'incentro, H_a la proiezione di H su BC (e similmente sono definiti H_b e H_c), M_a il punto medio di BC, A' il punto medio dell'arco BC che non contiene A nella circonferenza circoscritta ad ABC.

Esercizio 5. (Prostaferesi e Werner) Dati α e β due angoli, dimostrare le seguenti formule:

$$\begin{aligned}
\sin\alpha + \sin\beta &= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\\
\cos\alpha + \cos\beta &= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\\
\sin\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]\\
\sin\alpha\sin\beta &= \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]\\
\cos\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]
\end{aligned}$$

Esercizio 6. (Stewart) Sia ABC un triangolo e D un punto su BC, allora vale che

$$a \cdot (CD \cdot BD + AD^2) = b^2 \cdot CD + c^2 \cdot BD$$

dove a, b, c sono le lunghezze dei tre lati del triangolo nella notazione standard.

Esercizio 7. (Erone) Sia ABC un triangolo di area A e semiperimetro p, allora vale

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} .$$

Esercizio 8. Dati α, β, γ angoli di un triangolo, dimostrare che

$$\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma = \tan\alpha\tan\beta\tan\gamma .$$

1.2 Coordinate cartesiane

Esercizio 9. Siano dati quattro punti $X = (1, 1)$, $Y = (0, 2)$, $Z = (2, 1)$, $O = (0, 0)$ nel piano cartesiano. Determinare le equazioni dei seguenti enti geometrici.

G :=Baricentro di XYZ	
r :=retta per X, Y	
Perpendicolare da O a r	
Γ :=Circonferenza di Feuerbach di OXY	
$\{P \ : \ PX = 2PY\}$	
Bisettrice di $Z\widehat{O}Y$	

Esercizio 10. Con la notazione dell'esercizio precedente, calcolare i seguenti dati.

Lunghezza di GO	
Area di OXY	
Potenza di Z rispetto a Γ	
$\tan Z\widehat{O}X$	
Raggio della circonferenza per X, Z e tangente a r	

Esercizio 11. Dati tre punti $A = (x_1, x_2)$, $B = (y_1, y_2)$, $C = (z_1, z_2)$ che si suppone formino un triangolo rispondere velocemente alle seguenti:

- Calcolare la lunghezza di AB.
- Calcolare il coefficiente angolare della retta passante per A e B.
- Scrivere in forma esplicita (ovvero esplicitando la dipendenza rispetto alla y) e in forma implicita l'equazione della retta passante per A e B.
- Scrivere l'equazione del fascio di rette passanti per A
- Scrivere l'equazione dell'asse di BC in una delle due forme.
- Scrivere l'equazione della retta parallela ad AB passante per C usando l'equazione del fascio passante per C.
- Scrivere l'equazione della retta perpendicolare a BC passante per A, sempre usando il fascio di rette passanti per A.
- Calcolare la distanza di A da BC.
- Scrivere, rispetto ai coefficienti angolari delle rette AB e AC la tangente dell'angolo in A. (Ragionare sul triangolo AXY dove X e Y sono le intersezioni delle rette AB e AC con l'asse x, e ricordare l'interpretazione geometrica del coefficiente angolare...)
- (*) Scrivere l'equazione della bisettrice dell'angolo in A.
- (*) Scrivere l'equazione della mediana BN dove N è il punto medio di AC.

Esercizio 12. A proposito di circonferenze, considerando i punti A, B e C dell'esercizio precedente

- Scrivere l'equazione della circonferenza di centro A e raggio r. Mostrare che è della forma $x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$ per opportuni α, β e γ.
- Mostrare, ora, che che un'equazione della forma $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ rappresenta una circonferenza, un punto o l'insieme vuoto. Nel caso rappresenti un punto si dica qual è, nel caso rappresenti una circonferenza si dica centro e raggio rispetto a a, b e c.

1.3 Numeri complessi

Esercizio 13. Mostrare che $e^{i2arg(x)} = \frac{x}{\bar{x}}$. Sia g l'applicazione $g(z) = \frac{z}{\bar{z}}$.
Esercizio 14. Usando l'esercizio precedente mostrare che $\angle ABC = \angle XYZ$ come angoli orientati se e solo se $g\left(\frac{a-b}{c-b}\right) = g\left(\frac{x-y}{x-z}\right)$.
Esercizio 15. Mostrare che se ab è una corda nella circonferenza unitaria, allora vale $\frac{a-b}{\bar{a}-\bar{b}} = -ab$.
Esercizio 16. Se c appartiene a una corda ab della circonferenza unitaria, allora $\bar{c} = \frac{a+b-c}{ab}$ (Usare la formula dell'allineamento di tre punti e ricordare che si è sulla circonferenza...)
Esercizio 17. In un sistema di riferimento centrato in o siano dati a, b, c, d tali che $ab = cd$. Ragionando sul significato geometrico del prodotto di numeri complessi mostrare che gli angoli aob e cod hanno la stessa bisettrice.

Cosa vale se $ab = c^2$?
Esercizio 18. Consideriamo, nel piano complesso, un triangolo ABC di vertici $a = i$, $b = 4+i$, $c = 3 + i(1 + \sqrt{3})$. Si trovino i numeri complessi corrispondenti ai punti indicati

Punti medi dei lati	i. ii. iii.
Baricentro	
Incentro	
Piedi delle altezze	i. ii. iii.
Ortocentro	

Simmetrici di x=(3+3i)/2 rispetto ai lati	i. ii. iii.
Excentri	i. ii. iii.
Terzi vertici dei triangoli equilateri con lato AB	i. ii.
Punti medi tra ortocentro e vertici	i. ii. iii.
Punto medio dell'arco AB che non contiene C	
Punti medi tra gli excentri	i. ii. iii.
Punto medio dell'arco AB che contiene C	
Circocentro	

Esercizio 19. Sia ABC un triangolo nel piano complesso, di vertici a, b, c, tutti di modulo 1. Si scrivano le espressioni in numeri complessi dei seguenti punti

Circocentro	
Baricentro	
Ortocentro	
Punti medi dei lati	i. ii. iii.
Simmetrici dell'ortocentro rispetto ai punti medi dei lati	i. ii. iii.
Punti medi degli archi minori	i. ii. iii.
Vertici del triangolo formato dalle tangenti alla circoscritta in A, B, C	i. ii. iii.

Esercizio 20. Siano X, Y, Z i centri di tre quadrati posti esternamente sui lati di ABC. Posto $A = 0, B = 1$ e $C = z$ in un piano complesso, calcolare i numeri complessi corrispondenti a X, Y, Z. Dimostrare che AX è congruente e perpendicolare a YZ.

1.4 Vettori

Esercizio 21. Sia ABC un triangolo e siano $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ i vettori che individuano A, B, C rispetto al circocentro O di ABC. Scrivere l'espressione dei punti elencati rispetto a questi tre vettori.

M_a :=Punto medio di AB	
H :=Ortocentro	
Baricentro	
Incentro	
Simmetrico di H rispetto a M_a	
Punto medio di AH	
Centro della circonferenza di Feuerbach	
Inverso di M_a nella circonferenza circoscritta	

Esercizio 22. Sia ABC un triangolo; calcolare le lunghezze dei seguenti segmenti in termini dei lati di ABC e dei raggi delle circonferenze inscritta e circoscritta.

GO	
IO	
AH	
GI	
Bisettrice da A	

Esercizio 23. Sia P un punto della circonferenza circoscritta ad ABC. Che condizioni deve soddisfare il triangolo affinché $PA^2 + PB^2 + PC^2$ sia indipendente dalla scelta di P?

1.5 Geometria sintetica

Esercizio 24. ABC è un triangolo rettangolo in B non isoscele e D è l'ulteriore intersezione del cerchio di diametro BC con l'ipotenusa; DF è la tangente al cerchio in D e F si trova su AB. Dimostrare o negare i seguenti fatti:

- $\angle BFD = 2 \cdot \angle BAC$
- $DF = FA$
- DF biseca l'angolo $\angle BDA$
- DF biseca il segmento BA
- $FD = FB$

Esercizio 25. Sia ABC un triangolo rettangolo e siano $A'B'C'$ i punti simmetrici dei vertici A, B, C rispetto ai lati opposti del triangolo. Sapendo che il triangolo ha area S è possibile determinare l'area di $A'B'C'$? Se sì, quanto vale?

Esercizio 26. Si consideri una generica stella a 5 punte. Quanto vale la somma degli angoli nelle punte?

Esercizio 27. Se P è un punto interno ad ABC triangolo acutangolo tale che i triangoli APB, APC, BPC hanno la stessa area, allora P è uno dei quattro punti notevoli? Quale?

Esercizio 28. (più difficile) Siano $ABCD$ punti allineati in quest'ordine e tali che $BC = 2 \cdot AB$ e $CD = AC$. Dimostrare che:

- la corda comune alle circonferenze che hanno per diametri AC e BD biseca AC
- la corda comune a due qualsiasi circonferenze l'una passante per A e C e l'altra passante per per B e D biseca AC.

Esercizio 29. Sia ABC un triangolo; dimostrare che il baricentro di ABC è anche baricentro del triangolo formato dai punti medi dei lati.

Esercizio 30. Sia ABC un triangolo; dimostrare che l'ortocentro di ABC è incentro del triangolo formato dai piedi delle altezze.

Esercizio 31. Sia ABC un triangolo; dimostrare che l'incentro di ABC è ortocentro del triangolo formato dagli excentri.

Esercizio 32. Siano ABC un triangolo, I il suo incentro, J_A l'excentro opposto ad A, M il punto medio dell'arco BC che non contiene A. Dimostrare che IBI_AC è ciclico e che M è il centro della circonferenza ad esso circoscritta.

Esercizio 33. Siano J_a, J_b, J_c gli excentri di ABC e sia I il suo incentro; detti M il punto medio di J_aJ_b e N il punto medio di IJ_c, dimostrare che il punto medio di MN è il circocentro di ABC.

Esercizio 34. Calcolare le potenze dei seguenti punti rispetto alle circonferenze indicate, in funzione dei lati del triangolo ABC.

Punto	Circonferenza	Potenza
M_a :=punto medio di AB	circoscritta	
L_a :=piede della bisettrice esterna da C	con diametro AB	
H_a :=proiezione di C su AB	con diametro AB	
C	con diametro AB	
simmetrico di M_a rispetto ad A	circoscritta	
A	di Feuerbach	
M_a	inscritta	

2 Teoria dei numeri

2.1 Divisibilità

Esercizio 35. Per ognuna delle seguenti affermazioni dire se è vera o falsa; p denota un numero primo, a, b generici numeri interi.

Affermazione	V/F
Se $p \mid ab$ allora $p \mid a$ o $p \mid b$	
Se $p^2 \mid ab$, allora $p^2 \mid a$ o $p^2 \mid b$	
Se $p \mid a-b$, allora $p \mid a+b$	
Se $p^2 \mid a^3$, allora $p^6 \mid a^6$	
Se $P^2 \mid b^3$, allora $p^2 \mid b$	
Se $p \mid (a,b)$, allora $p \mid (a^2, ab)$	

Esercizio 36. Risolvere negli interi le equazioni

$$x^2 - y^2 = 2000, \qquad \frac{1}{a-1} + \frac{2}{b+3} = 1\,, \qquad mn + 2m - n - 8 = 0\,.$$

Esercizio 37. Determinare per quali valori interi di n le seguenti espressioni sono intere.

$$\frac{n+3}{n+1}\,, \quad \frac{3n+10}{n+2}\,, \quad \frac{n+7}{2n+1}\,, \quad \frac{3a+1}{2a+3}\,, \quad \frac{15-3n}{2n^2+1}\,.$$

Esercizio 38. Si può scrivere 7004 come differenza di cubi perfetti?

Esercizio 39. Trovare tutti i numeri primi p tali che $5p + 49$ sia un quadrato perfetto.

2.2 Congruenze: struttura additiva

Esercizio 40. Compilare la seguente tabella, fornendo risposte comprese tra 0 e $m-1$.

Espressione	mod m	Risposta
$7+8$	mod 9	
$100 \cdot 333$	mod 12	
$5 \cdot 81 + 4 \cdot 27 + 9 + 2 \cdot 3$	mod 7	
$2^2 + 2^6 + 2^10$	mod 10	
$3^{1000} + 1000^3$	mod 13	
2211221122^{123456}	mod 11	
$2^{3^4} - 4^{3^2}$	mod 7	

Esercizio 41. Compilare la seguente tabella

x	m	$x^2 \bmod m$	$2^x \bmod m$	$3x + 2x^3 \bmod m$	$(-3)^x \bmod m$
2	5				
3	5				
2	8				
8	9				
7	13				
6	12				

Esercizio 42. Trovare le coppie (x, y) di soluzioni intere delle seguenti equazioni in cui $|x|$ sia il più piccolo possibile ($\emptyset, \emptyset$ se l'equazione non ha soluzioni intere).

$ax + by = m$	x	y
$3x + 2y = 1$		
$5x + 8y = 22$		
$21x + 12y = 15$		
$18y - 10x = 7$		
$64x + 243y = 18$		
$-19x + 7y = 5800$		

Esercizio 43. Trovare gli interi che risolvono le seguenti congruenze

Equazione	mod$m$	Soluzioni
$2x + 1 \equiv 0$	mod7	
$5x + 14 \equiv 0$	mod8	
$x^2 - 2 \equiv 0$	mod17	
$3^x \equiv 2$	mod5	
$x^2 - 3x \equiv -2$	mod11	
$x^3 - 1 \equiv 0$	mod21	

Esercizio 44. Determinare per quali valori di a le seguenti congruenze hanno almeno una soluzione in x.

$x^2 \equiv a \mod 11$	
$x^2 - a \equiv 0 \mod 20$	
$x^3 \equiv a \mod 13$	
$x^3 \equiv 2a \mod 14$	
$x^2 + x - a \equiv 0 \mod 7$	
$ax^2 \equiv 1 \mod 12$	
$x^a \equiv 1 \mod 8$	
$x^a \equiv 1 \mod 10$	
$a^x \equiv 1 \mod 8$	
$a^x \equiv 1 \mod 10$	

Esercizio 45. Dimostrare che per ogni n intero il numero $n(n^2-1)(5n+2)$ è divisibile per 24.
Esercizio 46. Risolvere negli interi l'equazione $n^2 + 5n + 16 = 169y$
Esercizio 47. Risolvere negli interi l'equazione $x^2 = y^5 + 4$.
Esercizio 48. Esiste un quadrato perfetto (cioè il quadrato di un numero naturale) la cui espressione in base 10 termini con le cifre 02? E un cubo perfetto? E in generale, esiste una potenza perfetta (cioè un numero della forma n^k dove n è un intero positivo e k è un intero maggiore di 1) la cui espressione in base 10 termini con le cifre 02?
Esercizio 49. Risolvere per x, y interi l'equazione $x^3 - y^3 = 7005$
Esercizio 50. Risolvere per x, y interi l'equazione $x^2 + 3y = 2$.
Esercizio 51. Risolvere per x, y naturali l'equazione $3^y - x^2 = 41$.
Esercizio 52. Risolvere per x, y naturali l'equazione $3^y - 2^x = 41$.
Esercizio 53. Risolvere per x, y naturali l'equazione $4^x - 2^y = 4094$.
Esercizio 54. Risolvere per x, y, z naturali l'equazione $4^x + 4^y + 4^z = 3645721801$.
Esercizio 55. Risolvere per x, y, z naturali l'equazione $4^x + 4^y + 4^z = 3645721803$.

2.3 Congruenze: struttura moltiplicativa

Esercizio 56. Dimostrare che $a + b + c$ è divisibile per 6 se e solo se $a^3 + b^3 + c^3$ lo è.
Esercizio 57. Sia $A = 5^n + 3^n + 1$. E' vero che se A è primo, allora n è divisibile per 12?
Esercizio 58. Esistono 2013 interi consecutivi, ognuno divisibile per una quinta potenza perfetta (maggiore di 1)?
Esercizio 59. Quante possibilità ci sono per le ultime due cifre di una potenza di 2 scritta in base 10? E per le ultime 3? Cosa succede invece per le ultime due cifre delle potenze di 7?
Esercizio 60. Sia n un intero tale che $n|2^n + 1$ e p il più piccolo primo che divide n.

- Dimostrare che l'ordine di 2 modulo p divide $2n$
- Dimostrare che l'ordine di 2 modulo p è 2

Esercizio 61. Trovare un n tale che $n|2^n + 1$ e che abbia almeno un fattore primo diverso da 3
Esercizio 62. Compilare la seguente tabella, esprimendo il risultato modulo m con un numero tra 0 e $m - 1$.

Espressione	Modulo	Risultato
77^{40}	10	
88^{40}	10	
$4^{17} + 37^{81} + 169^{329}$	15	
$1^{1000} + 2^{1000} + \ldots + 1000^{1000}$	7	
$13^0 + 13^1 + \ldots + 13^{666}$	17	
$13^0 + 13^1 + \ldots + 13^{666}$	19	
$4^{55^{666^{7777}}}$	23	

Esercizio 63. Determinare, per ognuna delle seguenti equazioni modulo m, per *quanti* valori di a compresi tra 0 e 100 esiste almeno una soluzione all'equazione.

Equazione	Modulo	Risposta
$a^x \equiv 1$	mod 10	
$x^2 \equiv a$	mod 19	
$x^3 \equiv 2a$	mod 21	
$3^x \equiv a$	mod 30	
$x^3 \equiv 2a$	mod 14	

3 Algebra

3.1 Polinomi

Esercizio 64. Scomporre i seguenti polinomi in fattori irriducibili su $\mathbb{R}$ (si supponga $a \in \mathbb{R}$).

$$x^4 + a^2,\ x^3 - 2x^2 + 3x - 2,\ x^4 - 5x^2 + 6,\ x^6 - a^2\ .$$

Esercizio 65. Scomporre su $\mathbb{R}$ il polinomio

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{1023}$$

Esercizio 66. Qual è la somma dei coefficienti del polinomio $(x^{21} + 4x^2 - 3)^{2013} - (x^{21} + 4x^2 + 3)^{671} + x^{38} + 11x^6$?

Esercizio 67. Nella tabella seguente, α, β, γ sono le radici (reali o complesse) dei polinomi indicati a sinistra; calcolare le espressioni richieste

$x^3 + 4x - 5$	$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 =$
$x^3 - x^2 + x + 1$	$\alpha^{-2} + \beta^{-2} + \gamma^{-2} =$
$2x^3 + 5x^2 + 7x + 8$	$\alpha\beta^2 + \beta\alpha^2 + \beta\gamma^2 + \gamma\beta^2 + \gamma\alpha^2 + \alpha\gamma^2 =$
$x^3 - 2x^2 - 3x - 4$	$\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 =$
$3x^3 + 2x + 1$	$\alpha/\beta + \beta/\gamma + \gamma/\alpha + \alpha/\gamma + \gamma/\beta + \beta/\alpha =$
$5x^3 + 2x^2 - 8$	$\alpha^{-1} + \beta^{-1} + \gamma^{-1} + \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 =$

Esercizio 68. Scomporre i seguenti polinomi in fattori irriducibili su $\mathbb{R}$.

$$x^5 - 1,\ x^6 + 3x^3 - 2,\ x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 1\ .$$

Esercizio 69. Sia $p(x)$ un polinomio a coefficienti interi tale che $p(2) = a$, $p(a) = a + 2$. Determinare i valori possibili per a.

Esercizio 70. Sia α una radice reale del polinomio $x^3 - x + 1$. Quanto vale $\alpha^9 + 3\alpha^6 + 2\alpha^3$?

Esercizio 71. Se $x + y = 30$ e $x^3 + y^3 = 8100$, quanto vale $x^2 + y^2$?

Esercizio 72. Dimostrare l'identità

$$\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} + \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} = 1$$

Esercizio 73. Sia $p(x)$ il polinomio tale che $p(n)$ è la somma delle quinte potenze dei numeri da 1 a n. Quanto vale $p(-1)$? In generale, quanto vale $p(-n)$? Cosa succede se invece consideriamo le potenze quarte?

Esercizio 74. (Identità di Sophie Germain) Dimostrare che

$$x^4 + 4y^4 = (x^2 + 2y^2 + 2xy)(x^2 + 2y^2 - 2xy)\ .$$

Esercizio 75. Dati a, b, c, d interi, dimostrare che $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$ è sempre somma di due quadrati interi.

3.2 Numeri complessi

Esercizio 76. Compilare la seguente tabella

$(1+i)(2+i)$	$=$
$(1-i)/(3i-4)$	$=$
$(2-i/3)^2 - 1/(2+i/3)^2$	$=$
$(1+i)^{2013}/2^{2012}$	$=$
$(1/2+i\sqrt{3}/2)^{16} - i^{18}$	$=$
$(-1+i\sqrt{5})^3 + (1-i\sqrt{5})^3$	$=$

Esercizio 77. Compilare la seguente tabella.

Forma cartesiana	Forma polare
$1+i$	
	$(\cos(\pi/3)+i\sin(\pi/3))$
$-4\sqrt{3}-4i$	
	$2(\cos(7\pi/6)+i\sin(7\pi/6))$

Esercizio 78. Calcolare le radici terze e seste dei numeri

$$8i,\ 1+i,\ -3,\ \sqrt{3}-i,\ -9i\ .$$

Esercizio 79. Per ogni n, sia $\xi_n = \cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$. Compilare la seguente tabella

$1+\xi_3$	$=$
$1/\xi_8$	$=$
$\xi_7+\xi_7^3+\xi_7^5$	$=$
$\lvert\xi_7^2+\xi_7^4+\xi_7^6\rvert$	$=$
$\xi_6^2-\xi_6+1$	$=$
$\xi_9+\xi_9^2+\xi_9^4+\xi_9^5+\xi_9^7+\xi_9^8$	$=$
$\xi_{15}^8-\xi_{15}^7+\xi_{15}^5-\xi_{15}^4+\xi_{15}^3-\xi_{15}$	$=$
$\xi_5\xi_5^2+\xi_5\xi_5^3+\xi_5\xi_5^4+\xi_5^2\xi_5^3+\xi_5^2\xi_5^4+\xi_5^3\xi_5^4$	$=$

3.3 Somme cicliche e simmetriche

Esercizio 80. Scrivi le seguenti espressioni come somme cicliche e simmetriche. Se l'espressione non è simmetrica, disegna una faccina triste nella seconda colonna.

Espressione	Ciclica	Simmetrica
$ab + bc + ca$ (Esempio)	$\sum_c ab$	$\frac{1}{2}\sum_s ab$
$a^3 + b^3 + c^3$		
$ab + bc + cd + da$		
$a^2b + b^2c + c^2a$		
$a^2b + ab^2$		

Esercizio 81. Scrivi per esteso le seguenti somme cicliche/simmetriche in tre variabili a, b, c.

Espressione	per esteso
$\sum_c ab$ (Esempio)	$ab + bc + ca$
$\sum_c \frac{a^2}{a+b}$	
$\sum_c \frac{a^2}{a+c}$	
$\sum_s \frac{a^2}{a+c}$	
$\sum_c (a^3 - abc)$	
$\sum_s (a^3 - \frac{1}{2}abc)$	

Esercizio 82. Calcola le seguenti espressioni in tre variabili a, b, c. Scrivi il risultato come somma simmetrica se possibile, se no ciclica.

Espressione	risultato
$\sum_c a + \sum_c a$ (Esempio)	$\sum_s a$
$\sum_c a^2b + \sum_c a^2c$	
$(\sum_c a)(\sum_c (a^2 - ab))$	
$(\sum_c a^2b)(\sum_c a)$	
$(\sum_c a^2)(\sum_c ab)$	
$(\sum_c a^2b)(\sum_c a^2c)$	
$(\sum_s ab)(\sum_c bc)$	

3.4 Disuguaglianze

Esercizio 83. Quanto vale come minimo $a^4 + b^2 + c$, sapendo che a, b, c sono reali positivi con $abc = 1$?

Esercizio 84. Dimostrare (in almeno due modi diversi?) che se a, b, c sono reali positivi, allora $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3$.

Esercizio 85. Trovare il minimo delle espressioni riportate in tabella, sotto i vincoli indicati. Tutte le variabili sono da intendersi reali positive.

Espressione	Vincolo	Minimo
$x + 1/x$		
$x^4 + 4y^4$	$xy = 3$	
$x + 2y + 3z$	$x^3y^2z = 1$	
$x^4 + y^2 + z^4$	$xyz = 2$	
$x + 8y + 4z$	$4x^{-1} + 2y^{-1} + z = 3$	
$(x^2 + y^2 + z^2)/(x + y + z)$	$xyz = 1$	
$(x^2y + y^2z + z^2x)(xy^2 + yz^2 + zx^2)$	$xyz = 2$	
$x^2/(y + z) + y^2/(x + z) + z^2/(x + y)$	$xyz = 1/2$	
$(x_1 + \ldots + x_n)(x_1^{-1} + \ldots + x_n^{-1})$		
$xy/z + yz/x + zx/y$	$x + y + z = 7$	

3.5 Funzionali

Esercizio 86. Sia f una funzione da $\mathbb{R}$ in sé tale che $f(x + f(y)) = f(x) + y$ per ogni x, y. Quali valori può assumere $f(100)$?

Esercizio 87. Sia f una funzione da $\mathbb{R}$ in sé. Supponendo che f rispetti le seguenti equazioni, dire se si può dedurre che f è iniettiva / surgettiva:

Equazione	Iniettiva?	Surgettiva?
$f(f(x)) = x$		
$f(x + y) + f(x - y) = 2f(x) + 2f(y)$		
$f(xy) = xf(y)$		
$f(x^2) = x^2$		
$f(f(y) + yf(x)) = f(y) + xf(y)$		
$f(xf(y) + f(x)) = 2f(x) + xy$		
$(x + y)(f(x) - f(y)) = (x - y)(f(x) + f(y))$		

Esercizio 88. Trovare, per ognuna di queste equazioni funzionali, le soluzioni polinomiali.

$f(xy+f(x+y)) = xy+f(x)+f(y)$	
$(f(x + y) - f(x) - f(y))x^3y^3 = 4(x^2 + y^2)f(xy) + 6xyf(x)f(y)$	
$f(xf(x) + 2y) = f(x^2) + f(y) + x + y - 1$	
$f(x + y) + f(x)f(y) = f(xy + 1)$	

3.6 Ricorrenze

Esercizio 89. Determinare una formula chiusa per le somme di seguito riportate.

$\sum_{n=1}^{200} n$	
$\sum_{n=1}^{100} n^2$	
$\sum_{n=3}^{50} \binom{n}{2}$	
$\sum_{n=1}^{20} 4^n$	
$\sum_{n=1}^{30} n2^n$	
$\sum_{n=1}^{1000} (n^2+n)^{-1}$	
$\sum_{n=1}^{40} n^{-1}3^n$	

Esercizio 90. Sia a_n una successione tale che $a_1 = 1$ e $a_{n+1} = 7a_n + 1$. Quanto vale il minimo n tale che a_n sia divisibile per 30?

Esercizio 91. Sia $b_{n+1} = (n+1)b_n - nb_{n-1}$. Dimostrare che - per ogni k fissato - per n abbastanza grande, b_n è costante modulo k.

Esercizio 92. Trovare una formula esplicita per il termine generico delle seguenti successioni.

Ricorrenza	Dato iniziale	Formula esplicita
$a_n = 2a_{n-1}$	$a_0 = 1$	
$a_n = 2a_{n-1}$	$a_1 = 3$	
$a_n = 2a_{n-1} - 1$	$a_0 = 1$	
$a_n = 2a_{n-1} - 1$	$a_0 = 2$	
$a_n = -a_{n-1} + \frac{n}{2}$	$a_0 = 1$	
$a_n = \frac{1}{2}a_{n-1} + \frac{1}{n}$	$a_0 = 0$	

4 Combinatoria

Esercizio 93. Si calcoli il numero dei possibili anagrammi per ognuna delle seguenti parole: caso, casa, satiro, teleologico, pappappero, intirizzito, disossatelo.

Esercizio 94. Si calcoli il numero degli anagrammi della parola PERDENTI per ognuna delle condizioni aggiuntive date in tabella.

senza vocali adiacenti	
con esattamente una coppia di vocali adiacenti	
con P e N non adiacenti	
con R e E adiacenti	
senza consonanti isolate	

Esercizio 95. Otto amici vanno al cinema. Sono rimasti 5 posti in una fila e 3 in quella davanti.

1. In quanti modi diversi possono sedersi?
2. In quanti modi diversi possono sedersi sapendo che Alberto e Barbara non vogliono stare vicini?
3. In quanti modi diversi possono sedersi sapendo che Francesco e Ludovico vogliono stare vicini?
4. In quanti modi diversi possono sedersi sapendo che Roberto vuol stare nella fila più vicina allo schermo?
5. In quanti modi diversi possono sedersi sapendo che Massimo vuol stare nella fila più lontana dallo schermo?

Esercizio 96. Pescando 5 carte da un mazzo di 40 carte, quale probabilità c'è di trovarsi in mano

1. una coppia?
2. un tris?
3. una doppia coppia?
4. un full?
5. un poker?

Esercizio 97. Dire con quanti zeri termina l'espressione decimale di 2013!

Esercizio 98. Un millepiedi ha mille piedi, mille calzini indistinguibili e mille scarpe indistinguibili. In quanti ordini diversi può infilarsi calzini e scarpe, considerando che chiaramente un piede va infilato prima in un calzino e poi in una scarpa?

Esercizio 99. Che posizione occupa la parola *coccodrillo* nella lista di tutti i suoi anagrammi disposti in ordine alfabetico?

Esercizio 100. Quanti sono i numeri che, scritti in base 10, hanno 10 cifre e queste sono ordinate in senso (debolmente) crescente?

Esercizio 101. Quanti sono i percorsi *monotoni* che partendo da $(0,0)$ arrivano a (n,m)? E partendo da $(0,0,0)$ arrivano a (m,n,p)?

Esercizio 102. Quanti sono i percorsi *monotoni* che partendo da $(0,0)$ arrivano a $(10,10)$ senza passare per $(5,5)$? **Esercizio 103.** Quanti sono i percorsi *monotoni* che partendo da $(0,0)$ arrivano a (n,m) con $n \geq m$ senza mai toccare punti (p,q) con $p < q$?
Esercizio 104. 3 uomini e 5 donne si siedono ad un tavolo tondo in modo che non ci siano due uomini vicini. In quanti modi possono farlo?
Esercizio 105. In quanti modi un intero n può essere scritto come $a_1 + \cdots + a_k$ dove tutti gli a_i sono interi non negativi?
Esercizio 106. In quanti modi un intero n può essere scritto come somma di 3 interi non negativi (a meno dell'ordine)?
Esercizio 107. In quanti modi si possono colorare i lati di un ottagono regolare con 8 colori uno per lato? E usando solo bianco e nero? (due colorazioni vanno considerate indistinguibili se esiste una rotazione che manda una nell'altra)
Esercizio 108. Una pedina è inizialmente posta nella casella più a sinistra di uno schema 1. Una mossa consiste nello spostare la pedina in una casella che disti al più 1 da quella di partenza (eventualmente lasciandola ferma). Detto s_n il numero dei possibili percorsi seguiti dalla pedina che impiegano n mosse, mostrare che $s_{2n} = 2s_n^2 + 2s_{n-1}s_{n+1}$.
Esercizio 109. Una stringa è composta di n lettere. Quanti sono i possibili anagrammi di questa parola per cui ogni lettera dista al più 1 dalla posizione che occupava in origine?
Esercizio 110. Una stringa è composta di n lettere. Quanti sono i possibili anagrammi di questa parola per cui ogni lettera dista al più 2 dalla posizione che occupava in origine? Scrivere una ricorsione in n per il numero a_n di possibili anagrammi.
Esercizio 111. Sia X un insieme di n elementi e $Y = \mathcal{P}(x)$ l'insieme delle sue parti. Calcolare le cardinalità dei seguenti insiemi:

- $\{(A,B) \in Y^2 : A \cap B = \emptyset\}$
- $\{(A,B,C) \in Y^3 : A \cap B \cap C = \emptyset \wedge A \setminus (B \cup C) = \emptyset\}$
- $\{(A,B) \in Y^2 : |A \cap B| < 3 \wedge |(A \cup B)^c| = 1\}$

Esercizio 112. Sia X un insieme di n elementi e $Y = \mathcal{P}(x)$ l'insieme delle sue parti. Calcolare le seguenti somme:

- $\sum\limits_{(A,B)\in Y^2} |A \cup B|$
- $\sum\limits_{(A,B,C)\in Y^3} |A \cap B \cap C|$
- $\sum\limits_{(A,B,C)\in Y^3} |A \cap B \cup C^c|$
- $\sum\limits_{(A,B,C)\in Y^3} |A \cap B \cap C|^2$

Esercizio 113. Si scrivono alla lavagna gli interi da 1 a n e si effettua la seguente mossa: si scelgono 2 interi a e b, si cancellano, e al loro posto si scrive $|a-b|$. Dire per quali n, alla fine si ottiene sempre un numero dispari.
Esercizio 114. Sui vertici di un 2014-agono regolare vi sono scritti alcuni numeri interi, all'inizio tutti nulli tranne sui vertici A_1 e A_3 dove c'è un 1. Una mossa consiste nell'aumentare di 1 due vertici adiacenti o due vertici opposti. Determinare se esiste una successione finita di mosse che porta ad avere tutti i vertici con lo stesso numero.
Esercizio 115. Sono dati i 3 numeri $\{10, 8, 15\}$ e ad ogni mossa si rimpiazzano i numeri a e b con $\frac{3a-4b}{5}$ e $\frac{4a+3b}{5}$. È possibile ottenere dopo un numero finito di mosse la terna $\{12, 13, 14\}$? E ottenere dei numeri $\{x, y, z\}$ con $|x-12|, |y-13|, |z-14| < 1$?

Esercizio 116. In una scatola ci sono alcune palline di colore bianco, giallo e rosso; ad ogni mossa si possono scambiare 2 palline di un colore con una del terzo. Partendo con 7 bianche, 9 gialle e 15 rosse quali configurazioni si possono raggiungere?

Esercizio 117. In ogni vertice di un n-agono regolare c'è una pedina e con una mossa se ne possono scegliere 2 qualsiasi e spostarne una in un senso e l'altra in quello contrario. È possibile portarle in *un* unico vertice? È possibile portarle in uno qualsiasi dei vertici?

Esercizio 118. Sono date 2014 carte ciascuna con una faccia bianca e una nera. All'inizio sono disposte in fila tutte girate dal lato bianco. Con una mossa si può scegliere una blocco da 50 con la più a sinistra girata sul bianco e capovolgerle tutte. Dimostrare che dopo un po' di mosse non si può più eseguirne alcuna.

Esercizio 119. n interi positivi sono scritti in fila. Ad ogni passaggio, se c'è una coppia (x, y) di interi adiacenti con $x > y$ (in quest'ordine da sinistra a destra) può essere cambiata con la coppia $(y + 1, x)$ oppure $(x - 1, x)$. Mostrare che sono possibili sono un numero finito di passaggi.

Esercizio 120. Alberto e Barbara gionano al seguente gioco: all'inizio di sono varie pile di monete sul tavolo e ciascuno, a turno, può effettuare una mossa a scelta tra *a)* togliere una moneta da una pila, *b)* dividere una pila in 2 pile ciascuna con almeno una moneta. Quando uno non può più fare una mossa, il gioco finisce. Dimostrare che il gioco termina.

Esercizio 121. Nel piano sono dati n punti rossi e n punti verdi. Dimostrare che esistono n segmenti che congiungono ciascuno 2 di questi punti di colore diverso e che non si intersecano tra di loro.

Esercizio 122. Su tutti i punti a coordinate intere nel piano viene scritto un numero naturale in modo che ciascuno sia la media dei 4 vicini. Dimostrare che tutti i numeri sono uguali.

Esercizio 123. Un numero dispari di cowboy si trovano a litigare per un bottino e, da come sono disposti (su un piano non ci sono muri od ostacoli tra loro e le loro distanze a 2 a 2 sono tutte diverse) si sparano vicendevolmente, ciascuno puntando al più vicino. Dimostrare che almeno uno sopravvive. Dimostrare che i segmenti seguiti dai proiettili non formano alcuna spezzata chiusa.

Parte II

Problemi per le sessioni

In questa seconda parte, raccogliamo gli esercizi che hanno tradizionalmente accompagnato le sessioni dello stage dal 2002 in poi; tali problemi saranno spesso inseriti nelle lezioni come esempi oppure dati alla fine come esercizi. In coda ad ogni sessione sono segnalati problemi IMO che si possono affrontare con i contenuti di quella sessione.

Inoltre, tra i problemi segnalati di seguito (e tra i numeri A1 e B1 delle ultime 5 IMO) saranno selezionati i 4 problemi "noti" del Test Finale; lo scopo di questa scelta non è di farvi studiare a memoria delle soluzioni (e di dannarvi per trovarle, magari durante le notti dello Stage), ma di obbligarvi al confronto con problemi di un certo livello che raccolgono tecniche "tipiche" del problem-solving olimpico.

Problemi per il TF: A1-11, A2-10, A3-10, C1-10, C2-08, G1-12, G2-10, G3-10, N1-08, N2-10.

1 Induzione e Pigeonhole

1. Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha che $(\sqrt{3})^{n^2} \geq n!$.

2. Dimostrare che ogni intero positivo si può scrivere come somma di due o più numeri di Fibonacci distinti.

3. Ad uno stage partecipano 24 ragazzi. Successivamente ogni partecipante decide di scrivere a 12 altri partecipanti.

   Dimostrare che c'è una coppia di ragazzi che si scrivono reciprocamente.

4. Determinare il più piccolo intero n con questa proprietà: comunque si scelgano n interi positivi, tutti aventi solo divisori primi ≤ 30, ne esistono sicuramente almeno due il cui prodotto è un quadrato perfetto.

5. Determinare il più piccolo numero reale positivo a per cui è possibile ricoprire un triangolo equilatero di lato 12 usando 5 triangoli equilateri di lato a.

6. Dimostrare che, dati 28 punti in una sfera di raggio 2, ve ne sono almeno 2 la cui distanza è al più 2.

7. Dato un sottoinsieme non vuoto $A \subseteq \{1, \ldots, 2002\}$ si indichi con P_A il reciproco del prodotto degli elementi di A.

   Determinare la somma di tutti i P_A.

8. Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha che

$$\frac{1}{4} + \frac{2}{4^2} + \frac{3}{4^3} + \ldots + \frac{n}{4^n} < \frac{1}{2}.$$

IMO Problems: 1972/1, 1964/4, 1968/6, 1976/5, 1985/4.

2 Algebra 1

1. Calcolare $(\sqrt{3}+i)^{2002}$.

2. Determinare quante sono le radici 2002-esime di $\sqrt{3}+i$ contenute nel terzo quadrante.

3. Calcolare
$$\cos 15^\circ + \cos 35^\circ + \cos 55^\circ + \ldots + \cos 335^\circ + \cos 355^\circ.$$

4. Fattorizzare sui reali il polinomio
$$x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1.$$

5. Calcolare
$$\sum_{k=1}^{2002} k i^k.$$
Illustrare geometricamente il risultato ottenuto.

6. Sia ω una radice settima non reale di -1. Determinare il coefficiente di x^7 nel polinomio
$$\prod_{k=1}^{2002} (x - \omega^k).$$

7. Esiste $P(x)$ polinomio tale che $P(n) = 2^n$ per ogni n naturale?

8. Sia $P(x)$ un polinomio tale che $P(0) = 2$, $P(1) = 4$, $P(2) = 6$, $P(3) = 56$. Determinare il resto della divisione di $P(x)$ per
$$x(x-1)(x-2)(x-3).$$

9. Determinare i coefficienti di un polinomio monico di quarto grado in cui la somma delle radici vale 1, la somma dei quadrati delle radici vale 2, la somma dei cubi delle radici vale 3, la somma delle quarte potenze delle radici vale 4.

10. Determinare il massimo numero di radici intere che può avere un polinomio $P(x)$ a coefficienti interi tale che $P(0)$ e $P(13)$ sono interi dispari.

11. Un polinomio $P(z)$ a coefficienti complessi ha grado 2002 e ha le radici (complesse) a due a due distinte.

    Dimostrare che esistono numeri complessi $a_1, \ldots, a_{2002}$ tali che, se si definiscono i polinomi $P_n(z)$ mediante la ricorrenza
$$P_1(z) = z - a_1, \qquad P_{n+1}(z) = [P_n(z)]^2 - a_n,$$
    allora $P(z)$ divide $P_{2002}(z)$.

IMO Problems: 1974/6, 1988/4, 1963/5, 1969/2, 1976/2.

3 Algebra 2

1. Gli n numeri reali positivi $x_1, \ldots, x_n$ hanno media armonica, geometrica, aritmetica, rispettivamente, uguali a 6, 7, 8. Per ogni $i = 1, \ldots, n$ definiamo

$$X_i = \prod_{j \neq i} x_j.$$

Determinare le medie aritmetica, geometrica e armonica degli X_i.

2. Un ciclista ha percorso una strada lunga 10 km. Sapendo che al k-esimo km il ciclista ha tenuto una velocità costante di 2^k (in qualche unità di misura), determinare la velocità media sull'intero percorso. Interpretare il risultato in termini di medie.

3. Le nove cifre $1, 2, \ldots, 9$ sono scritte di seguito a formare un numero N di nove cifre. Determinare il valore massimo e minimo che può assumere la somma dei 7 numeri di tre cifre ottenuti considerando terne di tre cifre consecutive nella rappresentazione decimale di N.

4. Trovare il valore massimo di x^5yz sapendo che x, y, z sono numeri reali positivi tali che $x + y + z = 1$.

5. Siano $x_1, \ldots, x_n$ numeri reali e siano $y_1, \ldots, y_n$ numeri reali. Sapendo che

$$\frac{x_1\sqrt{y_1} + \ldots + x_n\sqrt{y_n}}{n} = 9, \qquad \frac{y_1 + \ldots + y_n}{n} = 8,$$

determinare il minimo valore possibile per la media quadratica di $x_1, \ldots, x_n$.

6. Determinare la migliore costante C tale che

$$(x - y)(2y - x) \leq Cxy$$

qualunque siano in numeri reali x, y tali che $0 \leq y \leq x \leq 2y$.

7. Determinare per quali valori del parametro a esistono numeri reali positivi x e y tali che

$$a(3x + 2y) = y + \sqrt{2a^2(4x^2 + y^2)} + \sqrt{2a^2x^2 + 2(a-1)^2y^2}.$$

8. Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni convesse nell'intervallo $[0, 1]$, con $g(x)$ positiva.

Determinare quali delle seguenti funzioni sono sicuramente convesse nell'intervallo $[0, 1]$:

$$f(x) + g(x), \qquad f^2(x), \qquad f(x) \cdot g(x), \qquad \frac{f(x)}{g(x)}, \qquad f(g(x)).$$

Determinare come cambia la risposta al punto precedente se si assume che $f(x)$ sia anche positiva e/o crescente.

9. Siano $x_1, \ldots, x_n$ numeri reali positivi tali che $x_1 + \ldots + x_n = 1$. Dimostrare che

$$\frac{x_1}{\sqrt{1 - x_1}} + \ldots + \frac{x_n}{\sqrt{1 - x_n}} \geq \sqrt{\frac{n}{n-1}}$$

in almeno tre modi diversi, usando

- le disuguaglianze di Chebycheff e delle medie;
- l'identità $x(1-x)^{-1/2} = (1-x)^{-1/2} - (1-x)^{1/2}$ e le medie;
- le disuguaglianze di convessità.

10. Siano a, b, c numeri reali positivi. Dimostrare che

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

in almeno tre modi diversi, usando

- la sostituzione $a+b=x$, $b+c=y$, $c+a=z$;
- Cauchy Schwarz;
- le disuguaglianze di convessità.

Determinare quindi le migliori costanti C_1, C_2 tali che

$$C_1 \leq \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} \leq C_2.$$

IMO Problems: 1975/1, 1978/5, 1972/4, 1968/3, 1974/5, 1979/5, 1971/1, 1969/6.

4 Algebra 3

1. Dimostrare che non esistono funzioni $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tali che
$$f(f(n)) = n + 1$$
per ogni $n \in \mathbb{Z}$.

2. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione tale che
$$f(f(x)) = f(x) + 8$$
per ogni x reale, e $f(x) \geq 0$ per ogni $x \geq 0$.

   Determinare il minimo valore possibile per $f(2002)$.

3. Sia a un parametro reale, e sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione tale che
$$f(x^2 + axy + y^2) = x^2 + axy + y^2$$
per ogni x e y reali.

   Determinare, in funzione di a, i possibili valori di $f(1)$ e $f(-1)$.

4. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione monotona tale che
$$f(x + f(y)) = f(x) + y$$
per ogni x e y reali.

   Determinare i possibili valori di $f(100)$.

5. Una pulce salta tra i vertici di un tetraedro regolare. Ogni volta che si trova in un vertice sceglie uno dei tre spigoli che partono da quel vertice (tutti hanno la stessa probabilità di essere scelti) e salta verso l'altro estremo di quello spigolo.

   Determinare la probabilità che la pulce si ritrovi al punto di partenza dopo 2002 salti.

6. Una successione è definita per ricorrenza da
$$x_0 = 1, \qquad\qquad x_{n+1} = 6x_n - 2\sum_{i=0}^{n} x_i.$$
Determinare x_{2002}.

7. Determinare quanti sono gli interi n tali che $2000 \leq n \leq 2010$ e tali che 7 è un divisore della parte intera di
$$\frac{\sqrt{2}}{4}(1 + \sqrt{2})^n.$$

8. Determinare tutte le funzioni $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ tali che
$$f(x + y) + f(x - y) = 2f(x) + 2f(y)$$
per ogni x e y razionali.

9. Dato un numero intero a, definiamo la successione per ricorrenza

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n, \qquad x_0 = a, \ x_1 = 1.$$

   Dimostrare che 4091 è un divisore di $x_{4091} - 1$ (si ricorda che 4091 è un numero primo).

10. Trovare tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che

$$f(xf(x) + f(y)) = [f(x)]^2 + y$$

   per ogni x, y reali.

IMO Problems: 1979/6, 1992/2, 1986/5, 1990/4, 1994/5, 1996/3.

5 Combinatoria 1

1. Si scelgono a caso 7 interi distinti nell'insieme $\{1, 2, \ldots, 20\}$.

   Determinare la probabilità che il secondo più piccolo sia 5.

2. Determinare quanti sono i divisori positivi di

$$69^5 + 5 \cdot 69^4 + 10 \cdot 69^3 + 10 \cdot 69^2 + 5 \cdot 69 + 1.$$

3. Consideriamo una scacchiera 5×5.

   Determinare quanti sono i cammini che partono dal quadratino in alto a sinistra, arrivano nel quadratino in basso a destra, procedono sempre verso il basso o verso destra, e non passano mai per il quadratino centrale.

4. Al termine della "regular season" di un campionato, le prime 7 classificate si sfidano in incontri di spareggio secondo questa regola. La n.7 incontra la n.6: la perdente ottiene il settimo premio, la vincente sfida la n.5. Dopo questo nuovo incontro, la perdente ottiene il sesto premio e la vincente sfida la n.4, e così via.

   Determinare in quanti modi le sette squadre possono ricevere i sette premi.

5. Un laboratorio ha a disposizione una bilancia a due piatti e n pesi da, rispettivamente, 1, 3, 9, ..., 3^{n-1} grammi, i quali ovviamente possono essere posti indifferentemente su ogni piatto della bilancia.

   Determinare il numero di oggetti di peso diverso che si possono pesare con questa apparecchiatura.

   Determinare come cambia la risposta al punto precedente se i pesi sono potenze di due o potenze di quattro.

6. In un torneo, ogni giocatore incontra una ed una sola volta tutti gli altri giocatori. In ogni incontro, il vincitore guadagna 2 punti, il perdente 0 punti, mentre in caso di pareggio ogni giocatore riceve 1 punto. A torneo concluso risulta che esattamente la metà dei punti totalizzata da ciascun giocatore è stata guadagnata in partite giocate contro i 10 ultimi classificati (in particolare, ciascuno dei 10 giocatori con il punteggio più basso ha guadagnato metà dei suoi punti incontrandosi con gli altri 9 ultimi classificati).

   Determinare il numero di giocatori che hanno partecipato al torneo.

7. Sia F l'insieme di tutte le n-uple $(A_1, \ldots, A_n)$, dove ogni A_i è un sottoinsieme di $\{1, 2, \ldots, 1998\}$.

   Calcolare

$$\sum_{(A_1,\ldots,A_n)\in F} |A_1 \cap \ldots \cap A_n|, \qquad \sum_{(A_1,\ldots,A_n)\in F} |A_1 \cup \ldots \cup A_n|.$$

8. Calcolare

$$\sum_{k=1}^{100} \left[10\sqrt{k}\right] + \left[\frac{k^2}{100}\right].$$

9. Ad uno stage partecipano n ragazze $G_1, \ldots, G_n$ e $2n-1$ ragazzi $B_1, \ldots, B_{2n-1}$. Per ogni $i = 1, \ldots, n$, la ragazza G_i conosce i ragazzi $B_1, \ldots, B_{2i-1}$ e nessun'altro.

Dimostrare che il numero di modi di scegliere r coppie ragazzo-ragazza in modo che i componenti di ogni coppia si conoscano è

$$\binom{n}{r} \frac{n!}{(n-r)!}.$$

10. Ad un party prendono parte $12k$ persone. Ciascuna di esse stringe la mano ad esattamente $3k+6$ persone. Si sa che esiste un numero N tale che, per ogni coppia di persone A, B, il numero di invitati che stringe la mano sia ad A sia a B è esattamente N.

    Determinare per quali valori (interi) di k si può realizzare questa situazione.

IMO Problems: 1974/1, 1981/2, 1972/3, 1998/2, 1966/1.

6 Combinatoria 2

1. In una popolazione il 40% degli individui è obeso, il 30% mangia 1 Kg di cioccolato al giorno e di questi l'80% sono obesi.

   Determinare la probabilità che un obeso mangi almeno 1 Kg di cioccolato al giorno.

2. Determinare per quali n è possibile piastrellare una scacchiera $n \times n$ usando piastrelle a forma di "T" composte da quattro quadratini.

3. Consideriamo una scacchiera 11×11 privata della quarta casella della riga superiore.

   Determinare se è possibile costruire un percorso che visiti una ed una sola volta ogni casella e torni infine al punto di partenza (è possibile solo muoversi tra caselle che abbiano un lato in comune).

4. Il sacchetto A ed il sacchetto B contengono 3 palline nere e 5 bianche, il sacchetto C contiene 5 palline nere e 3 bianche. Si sceglie a caso un sacchetto, e poi da questo sacchetto vengono estratte (sempre a caso) due palline, reimbussolando la pallina tra la prima e la seconda estrazione.

   Sapendo che le due palline estratte sono nere, determinare la probabilità che si sia scelto il sacchetto A.

5. La regione di Matelandia è costituita da un numero finito di città. Per garantire gli spostamenti, sono state costruite delle strade che tuttavia, per motivi di budget, sono strette e a senso unico. In ogni caso, per ogni coppia di città, esiste sempre un tragitto (non necessariamente diretto) che le collega in almeno uno dei due versi.

   Dimostrare che esiste almeno una città dalla quale si può raggiungere qualsiasi altra città, ed esiste almeno una città che può essere raggiunta partendo da ogni altra città.

6. Su un foglio di carta quadrettata si disegna un quadrato di lato 2002. Si anneriscono poi alcuni dei lati dei quadratini interni (pensando così di costruire delle pareti) in modo però che da ogni quadratino si possa raggiungere ogni altro quadratino.

   Determinare il massimo numero di lati che possono essere anneriti.

7. Determinare se esiste una permutazione di $1, 1, 2, 2, \ldots, 2001, 2001, 2002, 2002$ tale che, per ogni k, vi siano esattamente k numeri tra le due ripetizioni di k.

8. Alberto e Barbara tracciano un grafo su di un foglio ed iniziano a giocare al seguente gioco. A turno, iniziando da Alberto, ciascun giocatore effettua una delle seguenti due mosse:

   - cancellare tre segmenti che formano un triangolo;
   - dati tre punti di cui due non collegati, ma collegati al terzo, cancellare i due collegamenti presenti e unire i due punti non collegati.

   Il giocatore che non può fare mosse valide perde la partita.

   Dimostrare che l'esito della partita non dipende da come giocano Alberto e Barbara, e determinare un criterio per stabilire chi vince in funzione della configurazione iniziale.

9. Camillo è andato per un certo periodo a Lipsia, dove vive in un condominio con 7 tedeschi. Ogni condomino ha un posto auto riservato a lui. Camillo, da buon italiano, quando torna a casa parcheggia in un posto a caso; ogni tedesco invece cerca di parcheggiare al proprio

posto, e solo se non ci riesce parcheggia pure lui a caso. Un giorno Camillo rientra quando tutti gli altri sono ancora fuori.

Determinare la probabilità che l'ultimo rientrato abbia potuto parcheggiare al proprio posto.

10. In una tranquilla vallata vivono dodici gnomi, i cui nomi coincidono con i nomi dei mesi: Gennaio, Febbraio, ..., Dicembre. Ogni gnomo abita in una casetta dipinta di azzurro o di rosa.

    Nel mese di gennaio, lo gnomo Gennaio va a trovare tutti i suoi amici. Se nota che la maggioranza stretta dei suoi amici ha la casetta di un colore diverso dalla sua, allora entro la fine del mese egli ridipinge la sua casetta, cambiando il colore per "adeguarsi alla maggioranza degli altri".

    Nel mese di febbraio, tocca allo gnome Febbraio fare visita ai suoi amici ed eventualmente ridipingere la casetta per "adeguarsi alla maggioranza", e così via.

    Questa procedura si ripete di anno in anno. Si dimostri che, da un certo momento in poi, nessuno gnomo avrà più bisogno di ridipingere la sua casetta (si supponga l'amicizia simmetrica, e che ogni gnomo non includa se stesso nella lista dei suoi amici).

11. Usando n rette, in quante regioni si può suddividere un piano, al massimo? E usando n piani per suddividere uno spazio?

12. n partecipanti prendono parte ad una gara a punti. Finita la gara si stila la classifica in base al punteggio ottenuto da ciascuno (cosicché possono esserci dei pari merito). Detto H_n il numero di classifiche possibili, si scriva una ricorsione per H_n.

13. Un grafo orientato (e finito) non contiene cicli. Sia n la massima lunghezza di un cammino lungo il grafo. Dimostrare che n è il più piccolo intero per cui si possono colorari i vertici in n colori in modo che 2 vertici dello stesso colore non siano raggiungibili l'uno a partire dall'altro.

14. Un carico di 100 lingotti (d'oro 24ct) tutti da 1kg sono disposti in 50 sacchi, nessuno dei quali contiene più di 50kg. Dimostrare che i sacchi possono essere divisi in 2 carichi dello stesso peso.

15. Dato n intero positivo, sia $P_n = \{2^n, 2^{n-1}3, \dots, 3^n\}$. Dato un sottoinsieme $Y \subseteq P_n$ denotiamo con S_Y la somma degli elementi di Y. Per ogni reale r con $0 \leq r \leq 3^{n+1} - 2^{n+1}$ dimostrare che esiste $Y \subseteq P_n$ tale che $0 \leq r - S_Y \leq 2^n$.

16. Sono date n scatole contenenti ciascuna una quantità non negativa di monete. Una mossa consiste nel prelevare 2 monete da una scatola, gettarne via una e riporre l'altra in una scatola a scelta. Una configurazione di monete è detta *felice* se con un numero finito di mosse è possibile far in modo che tutte le scatole siano non vuote. Determinare tutte le configurazioni *felici*.

IMO Problems: 1986/3, 1996/1.

7 Geometria 1

1. Calcolare
$$\sum_{n=0^\circ}^{90^\circ} \sin^2 n.$$

2. Dimostrare che, se x non è un multiplo intero di π, allora si ha che
$$1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos(2kx) = \frac{\sin((2n+1)x)}{\sin x}.$$

3. In un triangolo si ha che $\gamma = 3\alpha$, $a = 27$ e $c = 48$ (usando le notazioni standard).

   Determinare b.

4. Corde parallele di lunghezza 2, 3, 4 determinano in un cerchio angoli al centro, rispettivamente, di α, β e $\alpha + \beta$ radianti, con $\alpha + \beta < \pi$.

   Determinare il coseno di α.

5. Determinare l'area di un triangolo che ha due mediane ortogonali lunghe rispettivamente 10 e 15.

6. Sia dato un triangolo ABC rettangolo in A. L'altezza condotta da A ha lunghezza 12, mentre la bisettrice condotta da A ha lunghezza 13.

   Determinare la lunghezza della mediana condotta da A.

7. Calcolare
$$\sum_{n=0}^{2002} \tan n \cdot \tan(n+1).$$

8. Sia O il circocentro del triangolo ABC e siano D, E, F, rispettivamente, i punti intercettati sui lati opposti dalle rette AO, BO, CO.

   Dimostrare che
$$\frac{1}{AD} + \frac{1}{BE} + \frac{1}{CF} = \frac{2}{AO}.$$

9. Sia $ABCD$ un quadrilatero tale che un semicerchio con centro nel punto medio di AB e diametro sul segmento AB sia tangente agli altri tre lati BC, CD, DA.

   Dimostrare che
$$AB^2 = 4 \cdot BC \cdot AD.$$

10. Sia Γ un circonferenza e A un punto che non appartiene a Γ. Le rette che collegano A ai vertici P, Q, R di un triangolo equilatero variabile, inscritto in Γ, incontrano nuovamente Γ in U, V, W rispettivamente. Dimostrare che
$$\frac{AP}{AU} + \frac{AQ}{AV} + \frac{AR}{AW}$$
    è costante, al variare del triangolo equilatero PQR.

11. Sia ABC un triangolo e siano L ed M i punti medi di BC e CA rispettivamente. Sia inoltre CF l'altezza uscente da C. La circonferenza passante per A ed M e tangente ad AL in A, incontra il prolungamento di AB in X.

    Trovare il valore minimo di BX/CF, specificando per quale triangolo ABC si ottiene tale minimo.

12. Sia dato un triangolo ABC e si fissino i punti A', B', C' sui lati opposti ai vertici A, B, C, rispettivamente, in modo che le rette AA', BB', CC' siano concorrenti in un punto P interno al triangolo. Sia d il diametro del cerchio circoscritto al triangolo ABC, e sia S' l'area del triangolo $A'B'C'$.

    Dimostrare che
$$d \cdot S' = AB' \cdot BC' \cdot CA'.$$

IMO Problems: 1962/4, 1964/3, 1965/5, 1966/4, 1967/4, 1969/2, 1975/5, 1984/4.

8 Geometria 2

1. Un triangolo ha i vertici in $(1,1)$, $(10,2)$, $(3,4)$. Determinare le coordinate dell'ortocentro, del circocentro, del baricentro e dell'incentro.

2. Calcolare la distanza tra due diagonali sghembe di due facce adiacenti di un cubo di lato unitario.

3. Determinare la lunghezza dell'asse maggiore dell'ellisse che ha fuochi in $(9,20)$ e $(49,55)$ e che è tangente all'asse delle ascisse.

4. Un giardino si estende su un quadrato di 100 metri di lato, orientato secondo i punti cardinali, ed è percorso da due sentieri che seguono un andamento parabolico: il primo passa per i due estremi del lato Nord ed ha il vertice nel punto medio del lato Sud, il secondo passa per i due estremi del lato Est ed ha il vertice nel punto medio del lato Ovest.

   Determinare quanti metri quadri misura l'area del quadrilatero che ha come vertici i quattro punti d'incontro dei due sentieri.

5. Sia P un punto interno alla base AB di un triangolo isoscele ABC. Dimostrare che

   $$PC^2 = AC^2 - AP \cdot BP.$$

   Determinare come cambia tale formula se P sta sul prolungamento di AB.

6. Calcolare, usando il formalismo vettoriale, la somma dei quadrati delle mediane di un triangolo di lati a, b, c.

7. Sono dati un quadrilatero ed un punto M.

   Dimostrare che i simmetrici del punto M rispetto ai punti medi dei lati del quadrilatero sono vertici di un parallelogrammo.

8. Dimostrare che il punto di intersezione delle mediane di un quadrilatero (i segmenti che congiungono i punti medi di due lati opposti) è il punto medio del segmento che congiunge i punti medi delle diagonali.

9. In un quadrilatero $ABCD$, la retta passante per A e parallela a BC interseca la diagonale BD nel punto M, e la retta passante per B e parallela ad AD interseca la diagonale AC nel punto N.

   Dimostrare che MN è parallelo a DC.

10. Sia $ABCD$ un quadrato, e siano P e Q punti interni al quadrato e tali che AP è parallelo a QC e $AP = PQ = QC$.

    (a) Determinare le possibili posizioni del punto P.

    (b) Determinare la minima ampiezza che può avere l'angolo $D\hat{A}P$.

11. Siano dati tre punti $A = (x_1, x_2)$, $B = (y_1, y_2)$, $C = (z_1, z_2)$ che si suppone formino un triangolo.

- (*) Dato un punto P si mostrerà in G3 che data qualsiasi retta passante per P che intersechi una circonferenza in A e B, allora $PA \cdot PB$ è costante e viene detta potenza di P rispetto alla circonferenza. Mostrare che se la circonferenza ha equazione $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ e $P = (x_1, x_2)$ allora la potenza di P rispetto alla circonferenza ?® $x_1^2 + y_1^2 + ax_1 + by_1 + c$.
- (*) Usando l'esercizio precedente mostrare che l'asse radicale di due circonferenze $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ e $x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$ (il luogo dei punti per cui la potenza rispetto alla prima è uguale alla potenza rispetto alla seconda) è una retta di equazione $(a - d)x + (b - e)y + (c - f) = 0$
- (**) Usando l'esercizio precedente mostrare che date tre circonferenze, i tre assi radicali delle tre coppie concorrono. (Scrivere i 3 assi radicali, intersecarne 2 e vedere che l'intersezione è sul terzo)

12. (*) Mostrare che, riferendoci ad A, B e C del primo esercizio, il luogo dei punti X tali che
$$\overrightarrow{XA} \cdot \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XB} \cdot \overrightarrow{XC} + \overrightarrow{XC} \cdot \overrightarrow{XA} = 0$$
è una circonferenza centrata nel baricentro di ABC. Qual è il suo raggio? (Si indichi $X = (x, y)$ e si ricordi che detta O l'origine degli assi, $\overrightarrow{OV} \cdot \overrightarrow{OW} = v_1w_1 + v_2w_2$ dove $V = (v_1, v_2)$ e $W = (w_1, w_2)$).

13. Dati a, b e c scrivere i numeri complessi dei seguenti punti:
    - Proiezione di a sulla retta passante per b e c. (Tale punto, detto k, soddisfa $ak \perp bc$ e $k \in bc$, quindi scrivendo le due condizioni...)
    - Simmetrico di a rispetto alla retta passante per b e c.
    - Supponiamo ora di essere ora in un sistema di riferimento centrato nel circocentro o di abc in cui il circocerchio ha raggio 1 (dunque vale...). Come si semplificano le precedenti espressioni?
    - Sempre nell'assunzione precedente scrivere l'intersezione i fra la retta passante per b e c e la tangente in a alla circonferenza. (Tale punto soddisfa $i \in bc$ e $ai \perp oi$, dunque...)

14. Considero un triangolo abc inscritto in una circonferenza unitaria. Scegliendo l'ovvio sistema di riferimento si rifletta sulle seguenti:
    - Esistono tre numeri complessi u, v, w tali che $a = u^2$, $b = v^2$ e $c = w^2$.
    - $-uv$, $-vw$, $-wu$ sono i punti medi degli archi ab, bc e ca che non contengono c, a e b. (Ragionare sulla intepretazione geometrica del prodotto...)
    - Dando per noto che l'incentro di abc è l'ortocentro del triangolo formato dai punti medi degli archi prima considerati [G3] dedurre che, essendo i l'incentro, $i = -(uv + vw + wu)$.
    - Si può mostrare che gli excentri sono i simmetrici dell'incentro rispetto ai punti medi degli archi [G3]. Ricavare, allora, le formule degli excentri.

15. (Un problema di geometria!) Mostrare, utilizzando i numeri complessi, che dato P un punto sulla circonferenza circoscritta a un triangolo ABC allora le proiezioni di P sui tre lati del triangolo sono allineate. Tale retta si chiama retta di Simson di P.

16. (*) Dati tre numeri complessi a, b, c mostrare che vale $ab + bc + ca = a^2 + b^2 + c^2$ se e solo se abc è equilatero.

17. (*) (Un problema di geometria!) Dato ABC un triangolo e detto O_1 il simmetrico del circocentro rispetto a BC, allora A, I, O_1 sono allineati se e solo se l'angolo in A misura 60 gradi.

18. Ponendo l'origine nel vertice A di un triangolo ABC mostrare il seguente teorema (Stewart): Dato P un punto di AB, allora
$$CB^2 \cdot AP + CA^2 \cdot PB = AB \cdot (CP^2 + AP \cdot PB)$$

19. Sia $ABCD$ un quadrilatero e M, N, O, P i punti medi di AB, BC, CD, DA. Mostrare, usando i vettori, che
$$AC \perp BD \Leftrightarrow MO = NP$$

IMO Problems: 1959/5, 1971/2, 1973/1, 1977/1, 1982/5, 1992/4.

9 Geometria 3

1. Sia $ABCD$ un quadrilatero ciclico e sia P il punto di intersezione delle diagonali AC e BD. Detti O il circocentro del triangolo APB e H l'ortocentro di CPD, si dimostri che i punti O, P, H sono allineati.

2. Determinare le coordinate dei vertici del triangolo di area massima tra quelli che hanno un vertice in $(1, 1)$ e gli altri due vertici sull'ellisse di equazione $x^2 + 4y^2 = 5$.

3. Siano a, b, c, d le lunghezze dei lati di un quadrilatero (considerati in senso orario), e sia S la sua area.

   Dimostrare che $2S \leq ac + bd$.

4. Costruire (quando è possibile) un triangolo equilatero che ha un vertice in un punto dato e gli altri due vertici su due circonferenze assegnate.

5. Assegnate due circonferenze ed una retta, tracciare (quando è possibile) una retta, parallela a quella data, che taglia sulle due circonferenze due corde di uguale lunghezza.

6. Sia Γ_2 una circonferenza tangente internamente in A ad una circonferenza Γ_1. Sia BC una corda di Γ_1 tangente a Γ_2 in D. Sia E la seconda intersezione tra la retta AD e Γ_1.

   Dimostrare che E è il punto medio di uno degli archi di estremi B e C.

7. Siano $ABMN$ e $BCQP$ i quadrati costruiti sui lati AB e BC di un triangolo, esternamente al triangolo stesso.

   Dimostrare che i centri di tali quadrati ed i punti medi di AC ed MP sono i vertici di un quadrato.

8. Siano AD, BE, CF tre ceviane del triangolo ABC passanti per un punto interno P.

   Dimostrare che
   $$\frac{AF}{FB} + \frac{AE}{EC} = \frac{AP}{PD}.$$

9. Siano ABC un triangolo rettangolo in A, Γ il cerchio circoscritto, Γ_1 il cerchio tangente ad AB, AC e (internamente) a Γ. Sia infine Γ_2 il cerchio tangente a AB, AC e a Γ (esternamente). Siano r_1 e r_2 i raggi di Γ_1 e Γ_2.

   Dimostrare che il prodotto $r_1 \cdot r_2$ è pari a quattro volte l'area del triangolo.

10. Dato un angolo convesso ed un punto esterno ad esso, tracciare una retta passante per il punto e che stacca nell'angolo un triangolo di perimetro assegnato.

IMO Problems: 1961/5, 1962/5, 1963/3, 1967/1, 1973/4, 1986/2, 1988/1.

10 Teoria dei Numeri 1

1. Un crittografo escogita il seguente metodo per codificare gli interi positivi. Per prima cosa tali interi vengono espressi in base 5; poi si stabilisce una corrispondenza biunivoca tra le cifre $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ e le lettere $\{V, W, X, Y, Z\}$. In tal modo risulta che VYZ, VYX, VVW sono tre interi consecutivi, presi in ordine crescente.

   Determinare l'espessione in base 10 di XYZ.

2. Determinare i valori del primo p per cui il polinomio $x^2 + px - 444p$ ha radici intere.

3. Determinare il più piccolo intero positivo a per cui $2002a + 3$ è multiplo di 59.

4. Trovare l'intero a dal valore assoluto più piccolo per cui vale il seguente criterio: "un intero positivo n è divisibile per 13 se e solo se è divisibile per 13 l'intero così costruito: si prende l'espressione di n privata della cifra delle unità e gli si somma la cifra delle unità moltiplicata per a".

5. Determinare il più piccolo intero n tale che $abc|(a + b + c)^n$ per ogni scelta di tre interi positivi a, b, c tali che $a|b^3$, $b|c^3$, $c|a^3$.

6. Trovare il MCD tra tutti gli interi della forma $p^4 - q^4$, dove p e q sono numeri primi con almeno due cifre tali che $p > q$.

7. Determinare il più grande intero positivo n con questa proprietà: "esiste una progressione aritmetica infinita di ragione 2003 i cui termini non si possono scrivere come somma di n potenze 2002-esime".

8. Per ogni intero positivo n, sia d_n il massimo comun divisore tra $100 + n^2$ e $100 + (n + 1)^2$.

   Determinare il massimo valore possibile per d_n.

9. Definiamo la funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ponendo $f(0) = f(1) = 0$ e poi per ricorrenza

   $$f(2n) = 2f(n) + 1, \qquad f(2n + 1) = 2f(n)$$

   per ogni $n \geq 1$. Per ogni intero m definiamo poi per ricorrenza una successione a_k ponendo

   $$a_0 = m, \qquad a_{k+1} = f(a_k).$$

   (a) Dimostrare che, qualunque sia il valore iniziale m, la successione a_k è nulla da un certo punto in poi.

   (b) Determinare il più piccolo valore di m per cui il primo valore di a_k ad essere nullo è il 2002-esimo.

10. Determinare le eventuali soluzioni intere dell'equazione

    $$y^2 = x^5 - 4.$$

IMO Problems: 1959/1, 1964/1, 1986/1, 1988/3, 1971/3, 1975/2.

11 Teoria dei Numeri 2

1. Calcolare il valore di 1432^{1432} modulo 1001.

2. Per ogni intero positivo n sia $\sigma(n)$ la somma di tutti i divisori di n (compresi 1 e n). Determinare se la funzione $\sigma(n)$ è moltiplicativa e/o completamente moltiplicativa.

3. Sia A il numero intero la cui rappresentazione decimale è costituita da 7777 cifre 7 consecutive. Consideriamo il numero A^A e sommiamo le sue cifre. Sommiamo quindi le cifre del numero così ottenuto e via di seguito, fino a rimanere con un numero di una cifra sola.

   Determinare di quale cifra si tratta.

4. Determinare le ultime 5 cifre del numero $5^{5^{5^{5^5}}}$.

5. Determinare (in funzione di due parametri h e k) tutte le soluzioni intere dell'equazione $2x + 4y + 5z = 3$.

6. Determinare il più piccolo intero positivo n tale che $2^n \equiv 18$ modulo 385.

7. Dimostrare che per ogni primo p esistono infiniti n tali che p divide $2^n - n$.

8. Trovare il massimo valore di $\sin x$, dove x, espresso in gradi sessagesimali, è una potenza di 2.

9. Dimostrare che, scelti comunque tre interi d, m ed n, esiste una progressione aritmetica di ragione d e lunghezza m in cui ogni termine è divisibile per una potenza n-esima.

10. Consideriamo l'insieme
$$D = \{n \in \mathbb{N} : \; n \text{ divide } 2^n + 1\}.$$
    (a) Determinare tutti i primi che appartengono a D.
    (b) Determinare tutte le potenze di primi che appartengono a D.
    (c) Determinare tutti gli elementi di D che sono prodotto di due primi.
    (d) Dimostrare che tutti gli elementi di D sono multipli di 3.
    (e) Determinare tutti gli elementi di D della forma p^2q, con p e q primi distinti.

IMO Problems: 1978/1, 1975/4, 1990/3, 2000/5.

Parte III

Problemi IMO 1-4

Raccogliamo, nelle pagine seguenti, gli esercizi A1 e B1 delle ultime IMO (i primi esercizi delle due giornate); tra gli esercizi degli ultimi 5 anni, insieme ai 10 presi dalle pagine precedenti e già segnalati, saranno scelti i 4 problemi “noti” del Test Finale.

Per ogni problema è proposto un suggerimento di soluzione, che va ovviamente sviluppato e giustificato, in cui magari mancano casi particolari (o problemi di configurazione), la cui discussione è lasciata allo studente studioso.

Facciamo ancora una volta presente che lo scopo di inserire problemi di questo livello nel Test Finale non è quello di regalare insonni notti di studio mnemonico, ma di cercare di stimolare la comprensione e lo studio “critico” delle soluzioni, in modo da poterle riprodurre sul momento, senza ricordarle completamente, ma avendo assorbito le idee e padroneggiato le tecniche che occorrono alla soluzione.

1 2008

A1 Sia ABC un triangolo acutangolo con ortocentro H. La circonferenza con centro il punto medio di BC e passante per H interseca la retta BC in A_1 e A_2. Analogamente, la circonferenza con centro il punto medio di CA e passante per H interseca la retta CA in B_1 e B_2, e la circonferenza con centro il punto medio di AB e passante per H interseca la retta AB in C_1 e C_2. Dimostrare che A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 giacciono su una medesima circonferenza.

Hint: Sia Γ_a la circonferenza con centro nel punto medio di BC e definiamo similmente Γ_b e Γ_c. L'asse radicale di Γ_a e Γ_b passa per H (perché?) ed è perpendicolare a AB (perché?); dunque è CH. Dalla potenza di C rispetto alle due circonferenze si ottiene che ...

B1 Determinare tutte le funzioni $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ (cioé tutte le funzioni f definite nell'insieme dei numeri reali positivi e a valori nell'insieme dei numeri reali positivi) tali che

$$\frac{\big(f(w)\big)^2 + \big(f(x)\big)^2}{f(y^2) + f(z^2)} = \frac{w^2 + x^2}{y^2 + z^2}$$

per tutti i numeri reali positivi w, x, y, z che soddisfano $wx = yz$.

Hint: Le soluzioni sono $f(x) = x$ e $f(x) = 1/x$. Sostituendo $(1, 1, 1, 1)$ si ottiene che $f(1) = 1$ (vero?). Sostituendo $(1, t, \sqrt{t}, \sqrt{t})$ si ottiene che $f(t)$ può essere uguale a t o a $1/t$ (come?). Ora, si supponga che per due dati reali diversi da 1 si abbia $f(x) = x$ ma $f(y) = 1/y$, allora ... (come si ottiene l'assurdo?). E non dimenticate di verificare che le soluzioni trovate rispettano l'equazione.

2 2009

A1 Sia n un intero positivo e siano $a_1, \ldots, a_k (k \geq 2)$ interi distinti nell'insieme $\{1, \ldots, n\}$ tali che n divide $a_i(a_{i+1} - 1)$ per $i = 1, \ldots, k-1$. Dimostrare che n non divide $a_k(a_1 - 1)$.

Hint 1: Modulo n si ha

$$a_1 \equiv a_1 a_2 \equiv \ldots \equiv a_1 \cdot \ldots \cdot a_k \equiv a_1 \cdot \ldots \cdot a_{k-2} a_k \equiv \ldots \equiv a_k$$

(perché?) da cui segue la tesi (perché?).
Hint 2: Si ha che, per ogni $j = 1, \ldots, k$, $n | a_1 a_j - a_1$ (per induzione, magari?), da cui segue la tesi (perché?).

B1 Sia ABC un triangolo con $AB = AC$. Le bisettrici di $\widehat{CAB}$ e $\widehat{ABC}$ intersecano i lati BC e CA in D ed E rispettivamente. Sia K l'incentro del triangolo ADC. Supponiamo che $\widehat{BEK} = 45°$. Determinare tutti i possibili valori di $\widehat{CAB}$.

Hint: Sia I l'incentro di ABC e sia X la sua proiezione su AC. Si ha $I\widehat{D}K = I\widehat{X}K$ (perché?) e dunque X, E, I, K sono conciliai (perché?). Ora, se X e E non sono lo stesso punto, $C\widehat{A}B = \ldots$, se invece $X = E$ ...

3 2010

A1 Determinare tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che

$$f(\lfloor x \rfloor y) = f(x) \lfloor f(y) \rfloor$$

per tutti gli $x, y \in \mathbb{R}$

Hint: Ponendo $x = 0$ si ottiene che $f(0) = 0$ oppure $\lfloor f(y) \rfloor = 1$ per ogni y.

Nel primo caso, per $0 < x < 1$, otteniamo $0 = f(x)\lfloor f(y) \rfloor$, da cui $\lfloor f(y) \rfloor = 0$ per ogni y (e da qui si conclude $f(y) = 0$ per ogni y ... come?) oppure $f(x) = 0$ per $0 < x < 1$ (da qui con $x = 2$ e $y = 1/2$ si conclude che $f(1) = 0$ e dunque $f(y) = 0$ per ogni y).

Nel secondo caso, $f(x\lfloor y \rfloor) = f(x)$ e con $y = 0$ otteniamo che f è costante. Quanto può valere?

B1 Sia P un punto interno al triangolo ABC e sia Γ la sua circonferenza circoscritta. Le rette AP, BP e CP intersecano Γ nuovamente nei punti K, L ed M rispettivamente. La retta tangente a Γ in C interseca la retta AB in S. Supponiamo che $SC = SP$. Dimostrare che $MK = ML$.

Hint: Si ha $SC^2 = SA \cdot SB$ e dunque SPB e SPA sono simili. Dunque $S\widehat{P}K = A\widehat{B}L = A\widehat{K}L$, quindi $LK \parallel PS$. Inoltre, se O è il circocentro di ABC, $OM \perp SP$ (perché?) da cui $OM \perp LK$.

4 2011

A1 Per ogni insieme $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ di quattro interi positivi distinti, sia s_A la somma $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$, e sia n_A il numero delle coppie di indici (i, j), con $1 \leq i < j \leq 4$, tali che $a_i + a_j$ divide s_A.

Tra tutti gli insiemi di quattro interi positivi distinti, determinare gli insiemi A per cui n_A è il più grande possibile.

Hint: Ordinando $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$, si ha che $a_2 + a_4$ e $a_3 + a_4$ sono maggiori di $s_A/2$, quindi $n_A \leq 4$. Gli insiemi che realizzano $n_A = 4$ devono essere del tipo $\{a, b, c - b, c - a\}$ con $a < b < c/2$ (perché?); inoltre $a + b = 2n/x$ e $a + c - b = 2n/y$ e quindi $1/x + 1/y > 1/2$ (perché?). Questo dà le soluzioni desiderate.

B1 Sia $n > 0$ un numero intero. Si Dispone di una bilancia a due piatti e di n pesi i cui pesi sono $2^0, 2^1, \ldots, 2^{n-1}$.

Si devono piazzare tutti gli n pesi sulla bilancia, l'uno dopo l'altro, in maniera tale che il piatto destro non contenga mai un peso complessivo maggiore del piatto sinistro. A tal fine, ad ogni passo si seglie uno dei pesi che non è stato ancora piazzato sulla bilancia e lo si aggiunge o sul piatto sinistro o sul piatto destro, fino a quando non sono stati piazzati tutti i pesi.

Determinare il numero di modi in cui questo si può fare.

Hint: Sia a_n il numero richiesto. Si dimostra che a_n è il numero di somme del tipo $\pm 2^{x_0} \pm 2^{x_1} \pm \ldots \pm 2^{x_{n-1}}$ di modo che $x_0, \ldots, x_{n-1}$ sia una permutazione di $0, 1, \ldots, n-1$ e che le somme $\sum_{i=0}^{j} \pm 2^{x_i}$ siano tutte positive. Da ogni tale somma eliminando il termine $\pm 2^0$ e dividendo per 2 otteniamo una somma per lo stesso problema con $n - 1$ pesi; il termine $\pm 2^0$ può essere messo in ogni posizione, tranne la prima, dove può comparire solo $+2^0$. Quindi $a_n = (2n - 1)a_{n-1}$. Da cui ...

5 2012

A1 Dato un triangolo ABC, il punto J è il centro della circonferenza ex-inscritta opposta al vertice A. Questa circonferenza è tangente al lato BC in M, ed alle rette AB ed AC in K ed L rispettivamente. Le rette LM e BJ si intersecano in F, e le rette KM e CJ si intersecano in G. Sia S il punto di intersezione delle rette AF e BC, e sia T il punto di intersezione delle rette AG e BC. Dimostrare che M è il punto medio di ST.

Hint: Si ha $J\widehat{F}L = J\widehat{A}L$ (perché?) quindi $AFJL$ è ciclico, quindi $SJMF$ è ciclico (perché?). Quindi JST è isoscele (perché?) e dunque $SM = MT$.

B1 Determinare tutte le funzioni $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ che soddisfano la seguente uguaglianza

$$f(a)^2 + f(b)^2 + f(c)^2 = 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a)$$

per tutti gli interi a, b, c tali che $a + b + c = 0$

Hint: Scriviamo $P(a, b, c)$ per l'affermazione del testo "$f(a)^2 + f(b)^2 + f(c)^2 = 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a)$". Da $P(0, 0, 0)$ si ha $f(0) = 0$. Da $P(0, a, -a)$ otteniamo che f è pari. Da $P(a, b, -a - b)$ e $P(a, -b, -a + b)$ otteniamo (come?) che

$$(f(a + b) + f(a - b))(f(a + b) - f(a - b)) = 2(f(a) + f(b))(f(a + b) - f(a - b)) .$$

Da cui $f(2) = 0$ o $f(2) = 4f(1)$ (perché?).

Nel primo caso si ha che $f(a) = 0$ se a è pari e $f(a) = k \in \mathbb{Z}$ se a è dispari.

Nel secondo caso, sia $f(1) = c$, allora $f(3)$ può essere c o $9c$; nel primo caso $f(a) = 0$ per a multiplo di 4, $f(a) = c$ per a dispari, $f(a) = 4c$ per $a \equiv 2 \mod 4$, nel secondo caso $f(a) = ca^2$.

6 2013

A1 Dimostrare che, per ogni coppia di interi positivi k ed n, esistono k interi positivi $m_1, m_2, \ldots, m_k$ (non necessariamente distinti) tali che

$$1 + \frac{2^k - 1}{n} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right)\left(1 + \frac{1}{m_2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{m_k}\right)$$

Hint: Impostando l'uguaglianza

$$1 + \frac{2^{k+1} - 1}{n} = \left(1 + \frac{2^k - 1}{m}\right)\left(1 + \frac{1}{m_{k+1}}\right)$$

si può risolvere per m_{k+1}, distinguendo i casi n pari e n dispari. Una soluzione può essere

$$m_{k+1} = 2(m + 2^k - 1)$$

per n pari, con $m = n/2$ e

$$m_{k+1} = n$$

e $m = (n + 1)/2$ se n è dispari. Ora si procede alla dimostrazione per induzione (estesa) su k.

B1 Sia ABC un triangolo acutangolo con ortocentro H, e sia W un punto del segmento BC, strettamente compreso tra B e C. I punti M ed N sono i piedi delle altezze condotte da B e C, rispettivamente. Indichiamo con ω_1 la circonferenza circoscritta a BWN, e con X il punto di ω_1 tale che WX sia un diametro di ω_1. Analogamente, indichiamo con ω_2 la circonferenza circoscritta a CWM, e con Y il punto di ω_2 tale che WY sia un diametro di ω_2. Dimostrare che i punti X, Y e H sono allineati.

Hint: Sia P l'ulteriore intersezione di ω_1 e ω_2. Allora P, A, W sono allineati (perché?) e $XY \perp AW$ (perché?). Ora, P, H, A, N, M stanno su una stessa circonferenza (perché?), dunque $HP \perp AP$ ed abbiamo concluso (perché?).

7 2014

A1 Sia $a_0 < a_1 < a_2 < \dots$ una successione infinita di interi positivi. Dimostrare che esiste un unico intero $n \geq 1$ tale che

$$a_n < \frac{a_0 + a_1 + \dots + a_n}{n} \leq a_{n+1} \ .$$

Hint: Si consideri la successione $b_n = (a_n - a_{n-1}) + (a_n - a_{n-2}) + \dots + (a_n - a_1)$ e si riformuli la tesi tramite essa.

B1 Siano P e Q punti sul lato BC del triangolo acutangolo ABC, tali che $P\widehat{A}B = B\widehat{C}A$ e $C\widehat{A}Q = A\widehat{B}C$. Siano M ed N punti su AP e AQ rispettivamente tali che P sia punto medio di AM e Q sia punto medio di AN. Dimostrare che l'intersezione tra le rette BM e CN sta sulla circonferenza circoscritta ad ABC.

Hint: I triangoli CNQ e MBP sono simili (perché?) e dunque l'intersezione tra BM e CN sta sulla circonferenza circoscritta a BQN, ma allora ...