

Parte II

Problemi per le sessioni

In questa seconda parte, raccogliamo gli esercizi che hanno tradizionalmente accompagnato le sessioni dello stage dal 2002 in poi; tali problemi saranno spesso inseriti nelle lezioni come esempi oppure dati alla fine come esercizi. In coda ad ogni sessione sono segnalati problemi IMO che si possono affrontare con i contenuti di quella sessione.

Inoltre, tra i problemi segnalati di seguito (e tra i numeri A1 e B1 delle ultime 5 IMO) saranno selezionati i 4 problemi “noti” del Test Finale; lo scopo di questa scelta non è di farvi studiare a memoria delle soluzioni (e di dannarvi per trovarle, magari durante le notti dello Stage), ma di obbligarvi al confronto con problemi di un certo livello che raccolgono tecniche “tipiche” del problem-solving olimpico.

Problemi per il TF: A1-11, A2-10, A3-10, C1-10, C2-08, G1-11, G2-10, G3-12, N1-08, N2-10.

1 Induzione e Pigeonhole

1. Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha che $(\sqrt{3})^{n^2} \geq n!$.
2. Dimostrare che ogni intero positivo si può scrivere come somma di due o più numeri di Fibonacci distinti.
3. Ad uno stage partecipano 24 ragazzi. Successivamente ogni partecipante decide di scrivere a 12 altri partecipanti.

Dimostrare che c'è una coppia di ragazzi che si scrivono reciprocamente.

4. Determinare il più piccolo intero n con questa proprietà: comunque si scelgano n interi positivi, tutti aventi solo divisori primi ≤ 30 , ne esistono sicuramente almeno due il cui prodotto è un quadrato perfetto.
5. Determinare il più piccolo numero reale positivo a per cui è possibile ricoprire un triangolo equilatero di lato 12 usando 5 triangoli equilateri di lato a .
6. Dimostrare che, dati 28 punti in una sfera di raggio 2, ve ne sono almeno 2 la cui distanza è al più 2.
7. Dato un sottoinsieme non vuoto $A \subseteq \{1, \dots, 2002\}$ si indichi con P_A il reciproco del prodotto degli elementi di A .

Determinare la somma di tutti i P_A .

8. Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha che

$$\frac{1}{4} + \frac{2}{4^2} + \frac{3}{4^3} + \dots + \frac{n}{4^n} < \frac{1}{2}.$$

IMO Problems: 1972/1, 1964/4, 1968/6, 1976/5, 1985/4.

2 Algebra 1

1. Calcolare $(\sqrt{3} + i)^{2002}$.
2. Determinare quante sono le radici 2002-esime di $\sqrt{3} + i$ contenute nel terzo quadrante.
3. Calcolare

$$\cos 15^\circ + \cos 35^\circ + \cos 55^\circ + \dots + \cos 335^\circ + \cos 355^\circ.$$

4. Fattorizzare sui reali il polinomio

$$x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1.$$

5. Calcolare

$$\sum_{k=1}^{2002} k i^k.$$

Illustrare geometricamente il risultato ottenuto.

6. Sia ω una radice settima non reale di -1 . Determinare il coefficiente di x^7 nel polinomio

$$\prod_{k=1}^{2002} (x - \omega^k).$$

7. Sia k un numero naturale. Determinare un polinomio $P(x)$ tale che $P(n) = 2^n$ per ogni $0 \leq n \leq k$ intero. Esiste $P(x)$ polinomio tale che $P(n) = 2^n$ per ogni n naturale?
8. Sia $P(x)$ un polinomio tale che $P(0) = 2$, $P(1) = 4$, $P(2) = 6$, $P(3) = 56$. Determinare il resto della divisione di $P(x)$ per

$$x(x-1)(x-2)(x-3).$$

9. Determinare i coefficienti di un polinomio monico di quarto grado in cui la somma delle radici vale 1, la somma dei quadrati delle radici vale 2, la somma dei cubi delle radici vale 3, la somma delle quarte potenze delle radici vale 4.
10. Determinare il massimo numero di radici intere che può avere un polinomio $P(x)$ a coefficienti interi tale che $P(0)$ e $P(13)$ sono interi dispari.
11. Un polinomio $P(z)$ a coefficienti complessi ha grado 2002 e ha le radici (complesse) a due a due distinte.

Dimostrare che esistono numeri complessi a_1, \dots, a_{2002} tali che, se si definiscono i polinomi $P_n(z)$ mediante la ricorrenza

$$P_1(z) = z - a_1, \quad P_{n+1}(z) = [P_n(z)]^2 - a_{n+1},$$

allora $P(z)$ divide $P_{2002}(z)$.

IMO Problems: 1974/6, 1988/4, 1963/5, 1969/2, 1976/2.

3 Algebra 2

1. Gli n numeri reali positivi x_1, \dots, x_n hanno media armonica, geometrica, aritmetica, rispettivamente, uguali a 6, 7, 8. Per ogni $i = 1, \dots, n$ definiamo

$$X_i = \prod_{j \neq i} x_j.$$

Determinare le medie aritmetica, geometrica e armonica degli X_i .

2. Un ciclista ha percorso una strada lunga 10 km. Sapendo che al k -esimo km il ciclista ha tenuto una velocità costante di 2^k (in qualche unità di misura), determinare la velocità media sull'intero percorso. Interpretare il risultato in termini di medie.
3. Le nove cifre $1, 2, \dots, 9$ sono scritte di seguito a formare un numero N di nove cifre. Determinare il valore massimo e minimo che può assumere la somma dei 7 numeri di tre cifre ottenuti considerando terne di tre cifre consecutive nella rappresentazione decimale di N .
4. Trovare il valore massimo di $x^5 y z$ sapendo che x, y, z sono numeri reali positivi tali che $x + y + z = 1$.
5. Siano x_1, \dots, x_n numeri reali e siano y_1, \dots, y_n numeri reali. Sapendo che

$$\frac{x_1 \sqrt{y_1} + \dots + x_n \sqrt{y_n}}{n} = 9, \quad \frac{y_1 + \dots + y_n}{n} = 8,$$

determinare il minimo valore possibile per la media quadratica di x_1, \dots, x_n .

6. Determinare la migliore costante C tale che

$$(x - y)(2y - x) \leq Cxy$$

qualunque siano in numeri reali x, y tali che $0 \leq y \leq x \leq 2y$.

7. Determinare per quali valori del parametro a esistono numeri reali positivi x e y tali che

$$a(3x + 2y) = y + \sqrt{2a^2(4x^2 + y^2)} + \sqrt{2a^2x^2 + 2(a - 1)^2y^2}.$$

8. Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni convesse nell'intervallo $[0, 1]$, con $g(x)$ positiva.

Determinare quali delle seguenti funzioni sono sicuramente convesse nell'intervallo $[0, 1]$:

$$f(x) + g(x), \quad f^2(x), \quad f(x) \cdot g(x), \quad \frac{f(x)}{g(x)}, \quad f(g(x)).$$

Determinare come cambia la risposta al punto precedente se si assume che $f(x)$ sia anche positiva e/o crescente.

9. Siano x_1, \dots, x_n numeri reali positivi tali che $x_1 + \dots + x_n = 1$. Dimostrare che

$$\frac{x_1}{\sqrt{1 - x_1}} + \dots + \frac{x_n}{\sqrt{1 - x_n}} \geq \sqrt{\frac{n}{n - 1}}$$

in almeno tre modi diversi, usando

- le disuguaglianze di Chebycheff e delle medie;
- l'identità $x(1-x)^{-1/2} = (1-x)^{-1/2} - (1-x)^{1/2}$ e le medie;
- le disuguaglianze di convessità.

10. Siano a, b, c numeri reali positivi. Dimostrare che

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

in almeno tre modi diversi, usando

- la sostituzione $a+b=x, b+c=y, c+a=z$;
- Cauchy Schwarz;
- le disuguaglianze di convessità.

Determinare quindi le migliori costanti C_1, C_2 tali che

$$C_1 \leq \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} \leq C_2.$$

IMO Problems: 1975/1, 1978/5, 1972/4, 1968/3, 1974/5, 1979/5, 1971/1, 1969/6.

4 Algebra 3

1. Dimostrare che non esistono funzioni $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ tali che

$$f(f(n)) = n + 1$$

per ogni $n \in \mathbb{Z}$.

2. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione tale che

$$f(f(x)) = f(x) + 8$$

per ogni x reale, e $f(x) \geq 0$ per ogni $x \geq 0$.

Determinare il minimo valore possibile per $f(2002)$.

3. Sia a un parametro reale, e sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione tale che

$$f(x^2 + axy + y^2) = x^2 + axy + y^2$$

per ogni x e y reali.

Determinare, in funzione di a , i possibili valori di $f(1)$ e $f(-1)$.

4. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione monotona tale che

$$f(x + f(y)) = f(x) + y$$

per ogni x e y reali.

Determinare i possibili valori di $f(100)$.

5. Una pulce salta tra i vertici di un tetraedro regolare. Ogni volta che si trova in un vertice sceglie uno dei tre spigoli che partono da quel vertice (tutti hanno la stessa probabilità di essere scelti) e salta verso l'altro estremo di quello spigolo.

Determinare la probabilità che la pulce si ritrovi al punto di partenza dopo 2002 salti.

6. Una successione è definita per ricorrenza da

$$x_0 = 1, \quad x_{n+1} = 6x_n - 2 \sum_{i=0}^n x_i.$$

Determinare x_{2002} .

7. Determinare quanti sono gli interi n tali che $2000 \leq n \leq 2010$ e tali che 7 è un divisore della parte intera di

$$\frac{\sqrt{2}}{4}(1 + \sqrt{2})^n.$$

8. Determinare tutte le funzioni $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ tali che

$$f(x + y) + f(x - y) = 2f(x) + 2f(y)$$

per ogni x e y razionali.

9. Dato un numero intero a , definiamo la successione per ricorrenza

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n, \quad x_0 = a, \quad x_1 = 1.$$

Dimostrare che 4091 è un divisore di $x_{4091} - 1$ (si ricorda che 4091 è un numero primo).

10. Trovare tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tali che

$$f(xf(x) + f(y)) = [f(x)]^2 + y$$

per ogni x, y reali.

IMO Problems: 1979/6, 1992/2, 1986/5, 1990/4, 1994/5, 1996/3.

5 Combinatoria 1

1. Si scelgono a caso 7 interi distinti nell'insieme $\{1, 2, \dots, 20\}$.

Determinare la probabilità che il secondo più piccolo sia 5.

2. Determinare quanti sono i divisori positivi di

$$69^5 + 5 \cdot 69^4 + 10 \cdot 69^3 + 10 \cdot 69^2 + 5 \cdot 69 + 1.$$

3. Consideriamo una scacchiera 5×5 .

Determinare quanti sono i cammini che partono dal quadratino in alto a sinistra, arrivano nel quadratino in basso a destra, procedono sempre verso il basso o verso destra, e non passano mai per il quadratino centrale.

4. Al termine della “regular season” di un campionato, le prime 7 classificate si sfidano in incontri di spareggio secondo questa regola. La n.7 incontra la n.6: la perdente ottiene il settimo premio, la vincente sfida la n.5. Dopo questo nuovo incontro, la perdente ottiene il sesto premio e la vincente sfida la n.4, e così via.

Determinare in quanti modi le sette squadre possono ricevere i sette premi.

5. Un laboratorio ha a disposizione una bilancia a due piatti e n pesi da, rispettivamente, 1, 3, 9, \dots , 3^{n-1} grammi, i quali ovviamente possono essere posti indifferentemente su ogni piatto della bilancia.

Determinare il numero di oggetti di peso diverso che si possono pesare con questa apparecchiatura.

Determinare come cambia la risposta al punto precedente se i pesi sono potenze di due o potenze di quattro.

6. In un torneo, ogni giocatore incontra una ed una sola volta tutti gli altri giocatori. In ogni incontro, il vincitore guadagna 2 punti, il perdente 0 punti, mentre in caso di pareggio ogni giocatore riceve 1 punto. A torneo concluso risulta che esattamente la metà dei punti totalizzata da ciascun giocatore è stata guadagnata in partite giocate contro i 10 ultimi classificati (in particolare, ciascuno dei 10 giocatori con il punteggio più basso ha guadagnato metà dei suoi punti incontrandosi con gli altri 9 ultimi classificati).

Determinare il numero di giocatori che hanno partecipato al torneo.

7. Sia F l'insieme di tutte le n -uple (A_1, \dots, A_n) , dove ogni A_i è un sottoinsieme di $\{1, 2, \dots, 1998\}$.

Calcolare

$$\sum_{(A_1, \dots, A_n) \in F} |A_1 \cap \dots \cap A_n|, \quad \sum_{(A_1, \dots, A_n) \in F} |A_1 \cup \dots \cup A_n|.$$

8. Calcolare

$$\sum_{k=1}^{100} \left[10\sqrt{k} \right] + \left[\frac{k^2}{100} \right].$$

9. Ad uno stage partecipano n ragazze G_1, \dots, G_n e $2n - 1$ ragazzi B_1, \dots, B_{2n-1} . Per ogni $i = 1, \dots, n$, la ragazza G_i conosce i ragazzi B_1, \dots, B_{2i-1} e nessun'altro.

Dimostrare che il numero di modi di scegliere r coppie ragazzo-ragazza in modo che i componenti di ogni coppia si conoscano è

$$\binom{n}{r} \frac{n!}{(n-r)!}.$$

10. Ad un party prendono parte $12k$ persone. Ciascuna di esse stringe la mano ad esattamente $3k + 6$ persone. Si sa che esiste un numero N tale che, per ogni coppia di persone A, B , il numero di invitati che stringe la mano sia ad A sia a B è esattamente N .

Determinare per quali valori (interi) di k si può realizzare questa situazione.

IMO Problems: 1974/1, 1981/2, 1972/3, 1998/2, 1966/1.

6 Combinatoria 2

1. In una popolazione il 40% degli individui è obeso, il 30% mangia 1 Kg di cioccolato al giorno e di questi l'80% sono obesi.

Determinare la probabilità che un obeso mangi almeno 1 Kg di cioccolato al giorno.

2. Determinare per quali n è possibile piastrellare una scacchiera $n \times n$ usando piastrelle a forma di "T" composte da quattro quadratini.

3. Consideriamo una scacchiera 11×11 privata della quarta casella della riga superiore.

Determinare se è possibile costruire un percorso che visiti una ed una sola volta ogni casella e torni infine al punto di partenza (è possibile solo muoversi tra caselle che abbiano un lato in comune).

4. Il sacchetto A ed il sacchetto B contengono 3 palline nere e 5 bianche, il sacchetto C contiene 5 palline nere e 3 bianche. Si sceglie a caso un sacchetto, e poi da questo sacchetto vengono estratte (sempre a caso) due palline, reimbussolando la pallina tra la prima e la seconda estrazione.

Sapendo che le due palline estratte sono nere, determinare la probabilità che si sia scelto il sacchetto A.

5. La regione di Matelandia è costituita da un numero finito di città. Per garantire gli spostamenti, sono state costruite delle strade che tuttavia, per motivi di budget, sono strette e a senso unico. In ogni caso, per ogni coppia di città, esiste sempre un tragitto (non necessariamente diretto) che le collega in almeno uno dei due versi.

Dimostrare che esiste almeno una città dalla quale si può raggiungere qualsiasi altra città, ed esiste almeno una città che può essere raggiunta partendo da ogni altra città.

6. Su un foglio di carta quadrettata si disegna un quadrato di lato 2002. Si anneriscono poi alcuni dei lati dei quadratini interni (pensando così di costruire delle pareti) in modo però che da ogni quadratino si possa raggiungere ogni altro quadratino.

Determinare il massimo numero di lati che possono essere anneriti.

7. Determinare se esiste una permutazione di $1, 1, 2, 2, \dots, 2001, 2001, 2002, 2002$ tale che, per ogni k , vi siano esattamente k numeri tra le due ripetizioni di k .

8. Alberto e Barbara tracciano un grafo su di un foglio ed iniziano a giocare al seguente gioco. A turno, iniziando da Alberto, ciascun giocatore effettua una delle seguenti due mosse:

- cancellare tre segmenti che formano un triangolo;
- dati tre punti di cui due non collegati, ma collegati al terzo, cancellare i due collegamenti presenti e unire i due punti non collegati.

Il giocatore che non può fare mosse valide perde la partita.

Dimostrare che l'esito della partita non dipende da come giocano Alberto e Barbara, e determinare un criterio per stabilire chi vince in funzione della configurazione iniziale.

9. Camillo è andato per un certo periodo a Lipsia, dove vive in un condominio con 7 tedeschi. Ogni condomino ha un posto auto riservato a lui. Camillo, da buon italiano, quando torna a casa parcheggia in un posto a caso; ogni tedesco invece cerca di parcheggiare al proprio

posto, e solo se non ci riesce parcheggia pure lui a caso. Un giorno Camillo rientra quando tutti gli altri sono ancora fuori.

Determinare la probabilità che l'ultimo rientrato abbia potuto parcheggiare al proprio posto.

10. In una tranquilla vallata vivono dodici gnomi, i cui nomi coincidono con i nomi dei mesi: Gennaio, Febbraio, ..., Dicembre. Ogni gnomo abita in una casetta dipinta di azzurro o di rosa.

Nel mese di gennaio, lo gnomo Gennaio va a trovare tutti i suoi amici. Se nota che la maggioranza stretta dei suoi amici ha la casetta di un colore diverso dalla sua, allora entro la fine del mese egli ridipingere la sua casetta, cambiando il colore per "adeguarsi alla maggioranza degli altri".

Nel mese di febbraio, tocca allo gnomo Febbraio fare visita ai suoi amici ed eventualmente ridipingere la casetta per "adeguarsi alla maggioranza", e così via.

Questa procedura si ripete di anno in anno. Si dimostri che, da un certo momento in poi, nessuno gnomo avrà più bisogno di ridipingere la sua casetta (si supponga l'amicizia simmetrica, e che ogni gnomo non includa se stesso nella lista dei suoi amici).

11. Usando n rette, in quante regioni si può suddividere un piano, al massimo? E usando n piani per suddividere uno spazio?
12. n partecipanti prendono parte ad una gara a punti. Finita la gara si stila la classifica in base al punteggio ottenuto da ciascuno (cosicché possono esserci dei pari merito). Detto H_n il numero di classifiche possibili, si scriva una ricorsione per H_n .
13. Un grafo orientato (e finito) non contiene cicli. Sia n la massima lunghezza di un cammino lungo il grafo. Dimostrare che n è il più piccolo intero per cui si possono colorare i vertici in n colori in modo che 2 vertici dello stesso colore non siano raggiungibili l'uno a partire dall'altro.
14. Un carico di 100 lingotti (d'oro 24ct) tutti da 1kg sono disposti in 50 sacchi, nessuno dei quali contiene più di 50kg. Dimostrare che i sacchi possono essere divisi in 2 carichi dello stesso peso.
15. Dato n intero positivo, sia $P_n = \{2^n, 2^{n-1}3, \dots, 3^n\}$. Dato un sottoinsieme $Y \subseteq P_n$ denotiamo con S_Y la somma degli elementi di Y . Per ogni reale r con $0 \leq r \leq 3^{n+1} - 2^{n+1}$ dimostrare che esiste $Y \subseteq P_n$ tale che $0 \leq r - S_Y \leq 2^n$.
16. Sono date n scatole contenenti ciascuna una quantità non negativa di monete. Una mossa consiste nel prelevare 2 monete da una scatola, gettarne via una e riporre l'altra in una scatola a scelta. Una configurazione di monete è detta *felice* se con un numero finito di mosse è possibile fare in modo che tutte le scatole siano non vuote. Determinare tutte le configurazioni *felici*.

IMO Problems: 1986/3, 1996/1.

7 Geometria 1

1. Calcolare

$$\sum_{n=0^{\circ}}^{90^{\circ}} \sin^2 n.$$

2. Dimostrare che, se x non è un multiplo intero di π , allora si ha che

$$1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(2kx) = \frac{\sin((2n+1)x)}{\sin x}.$$

3. In un triangolo si ha che $\gamma = 3\alpha$, $a = 27$ e $c = 48$ (usando le notazioni standard).

Determinare b .

4. Corde parallele di lunghezza 2, 3, 4 determinano in un cerchio angoli al centro, rispettivamente, di α , β e $\alpha + \beta$ radianti, con $\alpha + \beta < \pi$.

Determinare il coseno di α .

5. Determinare l'area di un triangolo che ha due mediane ortogonali lunghe rispettivamente 10 e 15.

6. Sia dato un triangolo ABC rettangolo in A . L'altezza condotta da A ha lunghezza 12, mentre la bisettrice condotta da A ha lunghezza 13.

Determinare la lunghezza della mediana condotta da A .

7. Calcolare

$$\sum_{n=0}^{2002} \tan n \cdot \tan(n+1).$$

8. Sia O il circocentro del triangolo ABC e siano D , E , F , rispettivamente, i punti intercettati sui lati opposti dalle rette AO , BO , CO .

Dimostrare che

$$\frac{1}{AD} + \frac{1}{BE} + \frac{1}{CF} = \frac{2}{AO}.$$

9. Sia $ABCD$ un quadrilatero tale che un semicerchio con centro nel punto medio di AB e diametro sul segmento AB sia tangente agli altri tre lati BC , CD , DA .

Dimostrare che

$$AB^2 = 4 \cdot BC \cdot AD.$$

10. Sia Γ un circonferenza e A un punto che non appartiene a Γ . Le rette che collegano A ai vertici P, Q, R di un triangolo equilatero variabile, inscritto in Γ , incontrano nuovamente Γ in U, V, W rispettivamente. Dimostrare che

$$\frac{AP}{AU} + \frac{AQ}{AV} + \frac{AR}{AW}$$

è costante, al variare del triangolo equilatero PQR .

11. Sia ABC un triangolo e siano L ed M i punti medi di BC e CA rispettivamente. Sia inoltre CF l'altezza uscente da C . La circonferenza passante per A ed M e tangente ad AL in A , incontra il prolungamento di AB in X .

Trovare il valore minimo di BX/CF , specificando per quale triangolo ABC si ottiene tale minimo.

12. Sia dato un triangolo ABC e si fissino i punti A', B', C' sui lati opposti ai vertici A, B, C , rispettivamente, in modo che le rette AA', BB', CC' siano concorrenti in un punto P interno al triangolo. Sia d il diametro del cerchio circoscritto al triangolo ABC , e sia S' l'area del triangolo $A'B'C'$.

Dimostrare che

$$d \cdot S' = AB' \cdot BC' \cdot CA'.$$

13. Mostrare le seguenti identità trigonometriche in un triangolo (notazione standard). R è il raggio della circonferenza circoscritta, r quello della circonferenza inscritta, S l'area, p il semiperimetro.

- In un triangolo acutangolo $\tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma = \tan \alpha \tan \beta \tan \gamma$.
- $\sum_{cyc} \cot \alpha \cot \beta = 1$
- $\sum_{cyc} \tan \frac{\alpha}{2} \tan \frac{\beta}{2} = 1$
- $\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\beta}{2} + \sin^2 \frac{\gamma}{2} + 2 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} = 1$
- $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = 1$

14. Mostrare le seguenti identità triangolari

- $2R^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma = S$
- $2R \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma = r(\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma)$
- $r = 4R \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}$
- $\sum_{cyc} a \cos \alpha = \frac{abc}{2R^2}$
- $p = 4R \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}$
- $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 1 + 4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} = 1 + \frac{r}{R}$
- $\sum_{cyc} \sin 2\alpha = 4 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$
- $\sum_{cyc} \cos 2\alpha = -1 - 4 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma$
- $\sum_{cyc} \sin^2 \alpha = 2 + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma$

IMO Problems: 1962/4, 1964/3, 1965/5, 1966/4, 1967/4, 1969/2, 1975/5, 1984/4.

8 Geometria 2

1. Un triangolo ha i vertici in $(1, 1)$, $(10, 2)$, $(3, 4)$. Determinare le coordinate dell'ortocentro, del circocentro, del baricentro e dell'incentro.
2. Calcolare la distanza tra due diagonali sghembe di due facce adiacenti di un cubo di lato unitario.
3. Determinare la lunghezza dell'asse maggiore dell'ellisse che ha fuochi in $(9, 20)$ e $(49, 55)$ e che è tangente all'asse delle ascisse.
4. Un giardino si estende su un quadrato di 100 metri di lato, orientato secondo i punti cardinali, ed è percorso da due sentieri che seguono un andamento parabolico: il primo passa per i due estremi del lato Nord ed ha il vertice nel punto medio del lato Sud, il secondo passa per i due estremi del lato Est ed ha il vertice nel punto medio del lato Ovest.

Determinare quanti metri quadri misura l'area del quadrilatero che ha come vertici i quattro punti d'incontro dei due sentieri.

5. Sia P un punto interno alla base AB di un triangolo isoscele ABC . Dimostrare che

$$PC^2 = AC^2 - AP \cdot BP.$$

Determinare come cambia tale formula se P sta sul prolungamento di AB .

6. Calcolare, usando il formalismo vettoriale, la somma dei quadrati delle mediane di un triangolo di lati a , b , c .
7. Sono dati un quadrilatero ed un punto M .
Dimostrare che i simmetrici del punto M rispetto ai punti medi dei lati del quadrilatero sono vertici di un parallelogrammo.
8. Dimostrare che il punto di intersezione delle mediane di un quadrilatero (i segmenti che congiungono i punti medi di due lati opposti) è il punto medio del segmento che congiunge i punti medi delle diagonali.
9. In un quadrilatero $ABCD$, la retta passante per A e parallela a BC interseca la diagonale BD nel punto M , e la retta passante per B e parallela ad AD interseca la diagonale AC nel punto N .
Dimostrare che MN è parallelo a DC .
10. Siano $ABMN$ e $BCQP$ i quadrati costruiti sui lati AB e BC di un triangolo, esternamente al triangolo stesso.
Dimostrare che i centri di tali quadrati ed i punti medi di AC ed MP sono i vertici di un quadrato.
11. Sia $ABCD$ un quadrato, e siano P e Q punti interni al quadrato e tali che AP è parallelo a QC e $AP = PQ = QC$.

(a) Determinare le possibili posizioni del punto P .

(b) Determinare la minima ampiezza che può avere l'angolo \hat{DAP} .

12. Siano dati tre punti $A = (x_1, x_2)$, $B = (y_1, y_2)$, $C = (z_1, z_2)$ che si suppone formino un triangolo.

- (*) Dato un punto P si mostrerà in G3 che data qualsiasi retta passante per P che intersechi una circonferenza in A e B , allora $PA \cdot PB$ è costante e viene detta potenza di P rispetto alla circonferenza. Mostrare che se la circonferenza ha equazione $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ e $P = (x_1, x_2)$ allora la potenza di P rispetto alla circonferenza è $x_1^2 + y_1^2 + ax_1 + by_1 + c$.
- (*) Usando l'esercizio precedente mostrare che l'asse radicale di due circonferenze $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ e $x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$ (il luogo dei punti per cui la potenza rispetto alla prima è uguale alla potenza rispetto alla seconda) è una retta di equazione $(a - d)x + (b - e)y + (c - f) = 0$
- (**) Usando l'esercizio precedente mostrare che date tre circonferenze, i tre assi radicali delle tre coppie concorrono. (Scrivere i 3 assi radicali, intersecarne 2 e vedere che l'intersezione è sul terzo)

13. (*) Mostrare che, riferendoci ad A , B e C del primo esercizio, il luogo dei punti X tali che

$$\overrightarrow{XA} \cdot \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XB} \cdot \overrightarrow{XC} + \overrightarrow{XC} \cdot \overrightarrow{XA} = 0$$

è una circonferenza centrata nel baricentro di ABC . Qual è il suo raggio? (Si indichi $X = (x, y)$ e si ricordi che detta O l'origine degli assi, $\overrightarrow{OV} \cdot \overrightarrow{OW} = v_1 w_1 + v_2 w_2$ dove $V = (v_1, v_2)$ e $W = (w_1, w_2)$).

14. Dati a , b e c scrivere i numeri complessi dei seguenti punti:

- Proiezione di a sulla retta passante per b e c . (Tale punto, detto k , soddisfa $ak \perp bc$ e $k \in bc$, quindi scrivendo le due condizioni...)
- Simmetrico di a rispetto alla retta passante per b e c .
- Supponiamo ora di essere ora in un sistema di riferimento centrato nel circocentro o di abc in cui il circocentro ha raggio 1 (dunque vale...). Come si semplificano le precedenti espressioni?
- Sempre nell'assunzione precedente scrivere l'intersezione i fra la retta passante per b e c e la tangente in a alla circonferenza. (Tale punto soddisfa $i \in bc$ e $ai \perp oi$, dunque...)

15. Considero un triangolo abc inscritto in una circonferenza unitaria. Scegliendo l'ovvio sistema di riferimento si rifletta sulle seguenti:

- Esistono tre numeri complessi u, v, w tali che $a = u^2$, $b = v^2$ e $c = w^2$.
- $-uv$, $-vw$, $-wu$ sono i punti medi degli archi ab , bc e ca che non contengono c , a e b . (Ragionare sulla interpretazione geometrica del prodotto...)
- Dando per noto che l'incentro di abc è l'ortocentro del triangolo formato dai punti medi degli archi prima considerati [G3] dedurre che, essendo i l'incentro, $i = -(uv + vw + wu)$.
- Si può mostrare che gli excentri sono i simmetrici dell'incentro rispetto ai punti medi degli archi [G3]. Ricavare, allora, le formule degli excentri.

16. (Un problema di geometria!) Mostrare, utilizzando i numeri complessi, che dato P un punto sulla circonferenza circoscritta a un triangolo ABC allora le proiezioni di P sui tre lati del triangolo sono allineate. Tale retta si chiama retta di Simson di P .

17. (*) Dati tre numeri complessi a, b, c mostrare che vale $ab + bc + ca = a^2 + b^2 + c^2$ se e solo se abc è equilatero.
18. (*) (Un problema di geometria!) Dato ABC un triangolo e detto O_1 il simmetrico del circocentro rispetto a BC , allora A, I, O_1 sono allineati se e solo se l'angolo in A misura 60 gradi.
19. Ponendo l'origine nel vertice A di un triangolo ABC mostrare il seguente teorema (Stewart):
Dato P un punto di AB , allora

$$CB^2 \cdot AP + CA^2 \cdot PB = AB \cdot (CP^2 + AP \cdot PB)$$

20. Sia $ABCD$ un quadrilatero e M, N, O, P i punti medi di AB, BC, CD, DA . Mostrare, usando i vettori, che

$$AC \perp BD \Leftrightarrow MO = NP$$

IMO Problems: 1959/5, 1971/2, 1973/1, 1977/1, 1982/5, 1992/4.

9 Geometria 3

1. Sia $ABCD$ un quadrilatero ciclico e sia P il punto di intersezione delle diagonali AC e BD . Detti O il circocentro del triangolo APB e H l'ortocentro di CPD , si dimostri che i punti O, P, H sono allineati.
2. Determinare le coordinate dei vertici del triangolo di area massima tra quelli che hanno un vertice in $(1, 1)$ e gli altri due vertici sull'ellisse di equazione $x^2 + 4y^2 = 5$.
3. Siano a, b, c, d le lunghezze dei lati di un quadrilatero (considerati in senso orario), e sia S la sua area.

Dimostrare che $2S \leq ac + bd$.

4. Siano A, B, C, D (nell'ordine) vertici adiacenti di un ettagono regolare; mostrare che

$$\frac{1}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}.$$

5. Sia $ABCD$ un quadrilatero convesso tale che le rette DA e CB si intersechino in un punto K , le rette AB e DC in un punto L , le rette AC e KL in G , le rette DB e KL in F . Mostrare che $KF : FL = KG : GL$.
6. Sia ABC un triangolo e sia Γ la circonferenza inscritta in ABC , che tange il lato AB nel punto T ; sia D il punto di Γ diametralmente opposto a T , e sia S il punto di intersezione della retta passante per C e D con il lato AB . Dimostrare che $AT = SB$.
7. Sia Γ_2 una circonferenza tangente internamente in A ad una circonferenza Γ_1 . Sia BC una corda di Γ_1 tangente a Γ_2 in D . Sia E la seconda intersezione tra la retta AD e Γ_1 . Dimostrare che E è il punto medio di uno degli archi di estremi B e C .
8. Siano AD, BE, CF tre ceviane del triangolo ABC passanti per un punto interno P .

Dimostrare che

$$\frac{AF}{FB} + \frac{AE}{EC} = \frac{AP}{PD}.$$

9. Siano ABC un triangolo rettangolo in A , Γ il cerchio circoscritto, Γ_1 il cerchio tangente ad AB, AC e (internamente) a Γ . Sia infine Γ_2 il cerchio tangente a AB, AC e a Γ (esternamente). Siano r_1 e r_2 i raggi di Γ_1 e Γ_2 .
Dimostrare che il prodotto $r_1 \cdot r_2$ è pari a quattro volte l'area del triangolo.
10. Dato un angolo convesso ed un punto esterno ad esso, tracciare una retta passante per il punto e che stacca nell'angolo un triangolo di perimetro assegnato.
11. Siano Γ_1 e Γ_2 due circonferenze tangenti esternamente in un punto T , sia AE una corda di Γ_1 e siano B e D punti di Γ_2 tali che AB e DE siano tangenti a Γ_2 . Si supponga che la retta AE incontri la retta BD in un punto P . Dimostrare che

- $\frac{AB}{AT} = \frac{ED}{ET}$;
- $\widehat{ATP} + \widehat{ETP} = 180^\circ$.

12. Sia MN una retta parallela al lato BC di un triangolo ABC che interseca i lati AB e AC in M ed N rispettivamente. Sia P l'intersezione delle rette BN e CM , e si supponga che le circonferenze circoscritte ai triangoli BMP e CNP abbiano un ulteriore punto d'intersezione Q , oltre a P . Mostrare che $\widehat{BAQ} = \widehat{CAP}$.

IMO Problems: 1961/5, 1962/5, 1963/3, 1967/1, 1973/4, 1986/2, 1988/1.

10 Teoria dei Numeri 1

1. Un crittografo escogita il seguente metodo per codificare gli interi positivi. Per prima cosa tali interi vengono espressi in base 5; poi si stabilisce una corrispondenza biunivoca tra le cifre $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ e le lettere $\{V, W, X, Y, Z\}$. In tal modo risulta che VYZ , VYX , VVW sono tre interi consecutivi, presi in ordine crescente.

Determinare l'espressione in base 10 di XYZ .

2. Determinare i valori del primo p per cui il polinomio $x^2 + px - 444p$ ha radici intere.
3. Determinare il più piccolo intero positivo a per cui $2002a + 3$ è multiplo di 59.
4. Trovare l'intero a dal valore assoluto più piccolo per cui vale il seguente criterio: "un intero positivo n è divisibile per 13 se e solo se è divisibile per 13 l'intero così costruito: si prende l'espressione di n privata della cifra delle unità e gli si somma la cifra delle unità moltiplicata per a ".
5. Determinare il più piccolo intero n tale che $abc|(a + b + c)^n$ per ogni scelta di tre interi positivi a, b, c tali che $a|b^3, b|c^3, c|a^3$.
6. Trovare il MCD tra tutti gli interi della forma $p^4 - q^4$, dove p e q sono numeri primi con almeno due cifre tali che $p > q$.
7. Determinare il più grande intero positivo n con questa proprietà: "esiste una progressione aritmetica infinita di ragione 2003 i cui termini non si possono scrivere come somma di n potenze 2002-esime".
8. Per ogni intero positivo n , sia d_n il massimo comun divisore tra $100 + n^2$ e $100 + (n + 1)^2$. Determinare il massimo valore possibile per d_n .
9. Definiamo la funzione $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ponendo $f(0) = f(1) = 0$ e poi per ricorrenza

$$f(2n) = 2f(n) + 1, \quad f(2n + 1) = 2f(n)$$

per ogni $n \geq 1$. Per ogni intero m definiamo poi per ricorrenza una successione a_k ponendo

$$a_0 = m, \quad a_{k+1} = f(a_k).$$

- (a) Dimostrare che, qualunque sia il valore iniziale m , la successione a_k è nulla da un certo punto in poi.
 - (b) Determinare il più piccolo valore di m per cui il primo valore di a_k ad essere nullo è il 2002-esimo.
10. Determinare le eventuali soluzioni intere dell'equazione

$$y^2 = x^5 - 4.$$

IMO Problems: 1959/1, 1964/1, 1986/1, 1988/3, 1971/3, 1975/2.

11 Teoria dei Numeri 2

1. Calcolare il valore di 1432^{1432} modulo 1001.
2. Per ogni intero positivo n sia $\sigma(n)$ la somma di tutti i divisori di n (compresi 1 e n). Determinare se la funzione $\sigma(n)$ è moltiplicativa e/o completamente moltiplicativa.
3. Sia A il numero intero la cui rappresentazione decimale è costituita da 7777 cifre 7 consecutive. Consideriamo il numero A^A e sommiamo le sue cifre. Sommiamo quindi le cifre del numero così ottenuto e via di seguito, fino a rimanere con un numero di una cifra sola. Determinare di quale cifra si tratta.
4. Determinare le ultime 5 cifre del numero $5^{5^{5^5}}$.
5. Determinare (in funzione di due parametri h e k) tutte le soluzioni intere dell'equazione $2x + 4y + 5z = 3$.
6. Determinare il più piccolo intero positivo n tale che $2^n \equiv 18$ modulo 385.
7. Dimostrare che per ogni primo p esistono infiniti n tali che p divide $2^n - n$.
8. Trovare il massimo valore di $\sin x$, dove x , espresso in gradi sessagesimali, è una potenza di 2.
9. Dimostrare che, scelti comunque tre interi d, m ed n , esiste una progressione aritmetica di ragione d e lunghezza m in cui ogni termine è divisibile per una potenza n -esima.
10. Consideriamo l'insieme
$$D = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ divide } 2^n + 1\}.$$
 - (a) Determinare tutti i primi che appartengono a D .
 - (b) Determinare tutte le potenze di primi che appartengono a D .
 - (c) Determinare tutti gli elementi di D che sono prodotto di due primi.
 - (d) Dimostrare che tutti gli elementi di D sono multipli di 3.
 - (e) Determinare tutti gli elementi di D della forma p^2q , con p e q primi distinti.

IMO Problems: 1978/1, 1975/4, 1990/3, 2000/5.

Parte III

Problemi IMO 1-4

Raccogliamo, nelle pagine seguenti, gli esercizi A1 e B1 delle ultime IMO (i primi esercizi delle due giornate); tra gli esercizi degli ultimi 5 anni, insieme ai 10 presi dalle pagine precedenti e già segnalati, saranno scelti i 4 problemi “noti” del Test Finale.

Per ogni problema è proposto un suggerimento di soluzione, che va ovviamente sviluppato e giustificato, in cui magari mancano casi particolari (o problemi di configurazione), la cui discussione è lasciata allo studente studioso.

Facciamo ancora una volta presente che lo scopo di inserire problemi di questo livello nel Test Finale non è quello di regalare insonni notti di studio mnemonico, ma di cercare di stimolare la comprensione e lo studio “critico” delle soluzioni, in modo da poterle riprodurre sul momento, senza ricordarle completamente, ma avendo assorbito le idee e padroneggiato le tecniche che occorrono alla soluzione.

1 2008

A1 Sia ABC un triangolo acutangolo con ortocentro H . La circonferenza con centro il punto medio di BC e passante per H interseca la retta BC in A_1 e A_2 . Analogamente, la circonferenza con centro il punto medio di CA e passante per H interseca la retta CA in B_1 e B_2 , e la circonferenza con centro il punto medio di AB e passante per H interseca la retta AB in C_1 e C_2 . Dimostrare che $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ giacciono su una medesima circonferenza.

Hint: Sia Γ_a la circonferenza con centro nel punto medio di BC e definiamo similmente Γ_b e Γ_c . L'asse radicale di Γ_a e Γ_b passa per H (perché?) ed è perpendicolare a AB (perché?); dunque è CH . Dalla potenza di C rispetto alle due circonferenze si ottiene che ...

B1 Determinare tutte le funzioni $f : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ (cioè tutte le funzioni f definite nell'insieme dei numeri reali positivi e a valori nell'insieme dei numeri reali positivi) tali che

$$\frac{(f(w))^2 + (f(x))^2}{f(y^2) + f(z^2)} = \frac{w^2 + x^2}{y^2 + z^2}$$

per tutti i numeri reali positivi w, x, y, z che soddisfano $wx = yz$.

Hint: Le soluzioni sono $f(x) = x$ e $f(x) = 1/x$. Sostituendo $(1, 1, 1, 1)$ si ottiene che $f(1) = 1$ (vero?). Sostituendo $(1, t, \sqrt{t}, \sqrt{t})$ si ottiene che $f(t)$ può essere uguale a t o a $1/t$ (come?). Ora, si supponga che per due dati reali diversi da 1 si abbia $f(x) = x$ ma $f(y) = 1/y$, allora ... (come si ottiene l'assurdo?). E non dimenticate di verificare che le soluzioni trovate rispettano l'equazione.

2 2009

A1 Sia n un intero positivo e siano a_1, \dots, a_k ($k \geq 2$) interi distinti nell'insieme $\{1, \dots, n\}$ tali che n divide $a_i(a_{i+1} - 1)$ per $i = 1, \dots, k-1$. Dimostrare che n non divide $a_k(a_1 - 1)$.

Hint 1: Modulo n si ha

$$a_1 \equiv a_1 a_2 \equiv \dots \equiv a_1 \cdot \dots \cdot a_k \equiv a_1 \cdot \dots \cdot a_{k-2} a_k \equiv \dots \equiv a_k$$

(perché?) da cui segue la tesi (perché?).

Hint 2: Si ha che, per ogni $j = 1, \dots, k$, $n | a_1 a_j - a_1$ (per induzione, magari?), da cui segue la tesi (perché?).

B1 Sia ABC un triangolo con $AB = AC$. Le bisettrici di \widehat{CAB} e \widehat{ABC} intersecano i lati BC e CA in D ed E rispettivamente. Sia K l'incentro del triangolo ADC . Supponiamo che $\widehat{BEK} = 45^\circ$. Determinare tutti i possibili valori di \widehat{CAB} .

Hint: Sia I l'incentro di ABC e sia X la sua proiezione su AC . Si ha $\widehat{IDK} = \widehat{IXK}$ (perché?) e dunque X, E, I, K sono conciliai (perché?). Ora, se X e E non sono lo stesso punto, $\widehat{CAB} = \dots$, se invece $X = E$...

3 2010

A1 Determinare tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tali che

$$f(\lfloor x \rfloor y) = f(x) \lfloor f(y) \rfloor$$

per tutti gli $x, y \in \mathbb{R}$

Hint: Ponendo $x = 0$ si ottiene che $f(0) = 0$ oppure $\lfloor f(y) \rfloor = 1$ per ogni y .

Nel primo caso, per $0 < x < 1$, otteniamo $0 = f(x)\lfloor f(y) \rfloor$, da cui $\lfloor f(y) \rfloor = 0$ per ogni y (e da qui si conclude $f(y) = 0$ per ogni y ... come?) oppure $f(x) = 0$ per $0 < x < 1$ (da qui con $x = 2$ e $y = 1/2$ si conclude che $f(1) = 0$ e dunque $f(y) = 0$ per ogni y).

Nel secondo caso, $f(x\lfloor y \rfloor) = f(x)$ e con $y = 0$ otteniamo che f è costante. Quanto può valere?

B1 Sia P un punto interno al triangolo ABC e sia Γ la sua circonferenza circoscritta. Le rette AP , BP e CP intersecano Γ nuovamente nei punti K , L ed M rispettivamente. La retta tangente a Γ in C interseca la retta AB in S . Supponiamo che $SC = SP$. Dimostrare che $MK = ML$.

Hint: Si ha $SC^2 = SA \cdot SB$ e dunque SPB e SPA sono simili. Dunque $\widehat{SPK} = \widehat{ABL} = \widehat{AKL}$, quindi $LK \parallel PS$. Inoltre, se O è il circocentro di ABC , $OM \perp SP$ (perché?) da cui $OM \perp LK$.

4 2011

A1 Per ogni insieme $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ di quattro interi positivi distinti, sia s_A la somma $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$, e sia n_A il numero delle coppie di indici (i, j) , con $1 \leq i < j \leq 4$, tali che $a_i + a_j$ divide s_A .

Tra tutti gli insiemi di quattro interi positivi distinti, determinare gli insiemi A per cui n_A è il più grande possibile.

Hint: Ordinando $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$, si ha che $a_2 + a_4$ e $a_3 + a_4$ sono maggiori di $s_A/2$, quindi $n_A \leq 4$. Gli insiemi che realizzano $n_A = 4$ devono essere del tipo $\{a, b, c - b, c - a\}$ con $a < b < c/2$ (perché?); inoltre $a + b = 2n/x$ e $a + c - b = 2n/y$ e quindi $1/x + 1/y > 1/2$ (perché?). Questo dà le soluzioni desiderate.

B1 Sia $n > 0$ un numero intero. Si Dispone di una bilancia a due piatti e di n pesi i cui pesi sono $2^0, 2^1, \dots, 2^{n-1}$.

Si devono piazzare tutti gli n pesi sulla bilancia, l'uno dopo l'altro, in maniera tale che il piatto destro non contenga mai un peso complessivo maggiore del piatto sinistro. A tal fine, ad ogni passo si sceglie uno dei pesi che non è stato ancora piazzato sulla bilancia e lo si aggiunge o sul piatto sinistro o sul piatto destro, fino a quando non sono stati piazzati tutti i pesi.

Determinare il numero di modi in cui questo si può fare.

Hint: Sia a_n il numero richiesto. Si dimostra che a_n è il numero di somme del tipo $\pm 2^{x_0} \pm 2^{x_1} \pm \dots \pm 2^{x_{n-1}}$ di modo che x_0, \dots, x_{n-1} sia una permutazione di $0, 1, \dots, n-1$ e che le somme $\sum_{i=0}^j \pm 2^{x_i}$ siano tutte positive. Da ogni tale somma eliminando il termine $\pm 2^0$ e dividendo per 2 otteniamo una somma per lo stesso problema con $n-1$ pesi; il termine $\pm 2^0$ può essere messo in ogni posizione, tranne la prima, dove può comparire solo $+2^0$. Quindi $a_n = (2n-1)a_{n-1}$. Da cui ...

5 2012

A1 Dato un triangolo ABC , il punto J è il centro della circonferenza ex-inscritta opposta al vertice A . Questa circonferenza è tangente al lato BC in M , ed alle rette AB ed AC in K ed L rispettivamente. Le rette LM e BJ si intersecano in F , e le rette KM e CJ si intersecano in G . Sia S il punto di intersezione delle rette AF e BC , e sia T il punto di intersezione delle rette AG e BC . Dimostrare che M è il punto medio di ST .

Hint: Si ha $J\widehat{F}L = J\widehat{A}L$ (perché?) quindi $AFJL$ è ciclico, quindi $SJMF$ è ciclico (perché?). Quindi JST è isoscele (perché?) e dunque $SM = MT$.

B1 Determinare tutte le funzioni $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ che soddisfano la seguente uguaglianza

$$f(a)^2 + f(b)^2 + f(c)^2 = 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a)$$

per tutti gli interi a, b, c tali che $a + b + c = 0$

Hint: Scriviamo $P(a, b, c)$ per l'affermazione del testo " $f(a)^2 + f(b)^2 + f(c)^2 = 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a)$ ". Da $P(0, 0, 0)$ si ha $f(0) = 0$. Da $P(0, a, -a)$ otteniamo che f è pari. Da $P(a, b, -a - b)$ e $P(a, -b, -a + b)$ otteniamo (come?) che

$$(f(a + b) + f(a - b))(f(a + b) - f(a - b)) = 2(f(a) + f(b))(f(a + b) - f(a - b)) .$$

Da cui $f(2) = 0$ o $f(2) = 4f(1)$ (perché?).

Nel primo caso si ha che $f(a) = 0$ se a è pari e $f(a) = k \in \mathbb{Z}$ se a è dispari.

Nel secondo caso, sia $f(1) = c$, allora $f(3)$ può essere c o $9c$; nel primo caso $f(a) = 0$ per a multiplo di 4, $f(a) = c$ per a dispari, $f(a) = 4c$ per $a \equiv 2 \pmod{4}$, nel secondo caso $f(a) = ca^2$.

6 2013

A1 Dimostrare che, per ogni coppia di interi positivi k ed n , esistono k interi positivi m_1, m_2, \dots, m_k (non necessariamente distinti) tali che

$$1 + \frac{2^k - 1}{n} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right) \left(1 + \frac{1}{m_2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{m_k}\right)$$

Hint: Impostando l'uguaglianza

$$1 + \frac{2^{k+1} - 1}{n} = \left(1 + \frac{2^k - 1}{m}\right) \left(1 + \frac{1}{m_{k+1}}\right)$$

si può risolvere per m_{k+1} , distinguendo i casi n pari e n dispari. Una soluzione può essere

$$m_{k+1} = 2(m + 2^k - 1)$$

per n pari, con $m = n/2$ e

$$m_{k+1} = n$$

e $m = (n + 1)/2$ se n è dispari. Ora si procede alla dimostrazione per induzione (estesa) su k .

B1 Sia ABC un triangolo acutangolo con ortocentro H , e sia W un punto del segmento BC , strettamente compreso tra B e C . I punti M ed N sono i piedi delle altezze condotte da B e C , rispettivamente. Indichiamo con ω_1 la circonferenza circoscritta a BWN , e con X il punto di ω_1 tale che WX sia un diametro di ω_1 . Analogamente, indichiamo con ω_2 la circonferenza circoscritta a CWM , e con Y il punto di ω_2 tale che WY sia un diametro di ω_2 . Dimostrare che i punti X, Y e H sono allineati.

Hint: Sia P l'ulteriore intersezione di ω_1 e ω_2 . Allora P, A, W sono allineati (perché?) e $XY \perp AW$ (perché?). Ora, P, H, A, N, M stanno su una stessa circonferenza (perché?), dunque $HP \perp AP$ ed abbiamo concluso (perché?).

7 2014

A1 Sia $a_0 < a_1 < a_2 < \dots$ una successione infinita di interi positivi. Dimostrare che esiste un unico intero $n \geq 1$ tale che

$$a_n < \frac{a_0 + a_1 + \dots + a_n}{n} \leq a_{n+1}.$$

Hint: Si consideri la successione $b_n = (a_n - a_{n-1}) + (a_n - a_{n-2}) + \dots + (a_n - a_1)$ e si riformuli la tesi tramite essa.

B1 Siano P e Q punti sul lato BC del triangolo acutangolo ABC , tali che $\widehat{PAB} = \widehat{BCA}$ e $\widehat{CAQ} = \widehat{ABC}$. Siano M ed N punti su AP e AQ rispettivamente tali che P sia punto medio di AM e Q sia punto medio di AN . Dimostrare che l'intersezione tra le rette BM e CN sta sulla circonferenza circoscritta ad ABC .

Hint: I triangoli CNQ e MBP sono simili (perché?) e dunque l'intersezione tra BM e CN sta sulla circonferenza circoscritta a BQN , ma allora ...

8 2015

A1 Diciamo che un insieme finito \mathcal{S} di punti nel piano è *equilibrato* se, per due qualsiasi punti distinti A e B in \mathcal{S} , esiste un punto C in \mathcal{S} tale che $AC = BC$. Diciamo che \mathcal{S} è *eccentrico* se, per tre qualsiasi punti distinti A , B e C in \mathcal{S} , non esiste alcun punto P in \mathcal{S} tale che $PA = PB = PC$.

1. Mostrare che per tutti gli interi $n \geq 3$ esiste un insieme *equilibrato* costituito da esattamente n punti.
2. Determinare tutti gli interi $n \geq 3$ per i quali esiste un insieme *equilibrato* ed *eccentrico* costituito da esattamente n punti.

Hint: Considerare i poligoni regolari per il caso dispari e tentare un'induzione $n \mapsto n + 2$ per il caso pari, costruendo triangoli equilateri. Per la seconda parte, provare un double counting sul numero di punti equidistanti da una coppia data.

B1 Sia Ω la circonferenza di centro O circoscritta al triangolo ABC . Una circonferenza Γ di centro A interseca il segmento BC nei punti D ed E , in modo che B, D, E, C siano distinti e in quest'ordine su BC . Siano F e G i punti di intersezione tra Γ e Ω , scelti in modo che A, F, B, C, G siano in quest'ordine su Ω . Sia K il punto di intersezione, diverso da B , tra la circonferenza circoscritta a BDF e il segmento AB . Sia L il punto di intersezione, diverso da C , tra la circonferenza circoscritta a CGE e il segmento CA . Dimostrare che, quando le rette FK e GL sono distinte e si intersecano in X , X giace sul segmento AO .

Hint: Siano F' e G' le ulteriori intersezioni di FG con le circonferenze a BDF e CGE rispettivamente. I quadrilateri $FBDF'$ e $G'ECG$ sono simili (perché?) e questo implica la tesi (perché?).