

ANALISI MATEMATICA — INGEGNERIA GESTIONALE
PROF. GIACOMELLI — ESEMPI DI PROVE D'ESAME — A.A.
05/06

* Determinare il limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{(\cos(x^2)-1)} - 1}{(x - \sin(x))^2}$$

.....
Risposta: $-\infty$.

* Calcolare il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x^2} \left(\log(1-x) + \frac{1}{2}(\log(1+x))^2 + x - \frac{1}{2}x^2 \right) \right].$$

.....
Risposta: $-1/2$.

Al variare di $\alpha \in (-\infty, \infty)$, studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{\alpha}{2}} + |2 - \alpha|^n}.$$

.....
Risposta: convergente per $\alpha \in (-\infty, 1) \cup (2, \infty)$ e divergente a $+\infty$ altrimenti.

Al variare di $x \in \mathbf{R}$, studiare il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-3n} n^{2n}}{(n!)^x}.$$

.....
Risposta: convergente per $x \in [2, +\infty)$, divergente a $+\infty$ altrimenti.

* a) Determinare, se esiste, il limite

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x \right);$$

b) studiare la convergenza semplice e assoluta della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\frac{\pi}{2} - \arctan(n^2)}{1 + \log n} \right).$$

.....

Risposta: (a) 1; (b) assolutamente convergente.

* Calcolare

$$2 \int \cos(\log(x^2)) dx.$$

.....

Risposta: $\frac{2}{5}x(2\sin(\log(x^2)) + \cos(\log(x^2))) + C$.

* Dire per quali $\alpha \in \mathbf{R}$ il seguente integrale improprio è convergente:

$$\int_1^\infty \frac{\arctan(x)}{\sqrt{x}(1+x^\alpha)} dx.$$

.....

Risposta: convergente se e solo se $\alpha \in (1/2, +\infty)$.

* (a) Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y' + \frac{1}{t^2 + 2}y = \frac{1}{t^2 + 2}$$

(b) Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + \frac{1}{t^2 + 2}y = \frac{1}{t^2 + 2} \\ y(-1) = 1. \end{cases}$$

.....

Risposta: (a) $y(t) = 1 + C e^{\arctg(t/\sqrt{2})}$, $C \in \mathbf{R}$; (b) $y(t) = 1$.

* Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y''(t) + y'(t) + \frac{1}{2}y(t) = \sin(t).$$

.....

Risposta: $y(t) = e^{-t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t) - \frac{5}{8}(2 \cos t + \sin t)$.

* Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = t + t(y(t))^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

specificando l'intervallo massimale di esistenza della soluzione.

* Data la funzione

$$f(x, y) = x(x - y)e^{-(x+y)},$$

calcolarne i punti stazionari e determinare la loro natura.

* Calcolare l'integrale

$$\int \int_D |x - y| dx dy$$

dove

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 \leq y \text{ e } x \geq y\}.$$

.....

Risposta: 1/60.

* Calcolare l'area della regione piana

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : |y| \leq \sqrt[3]{x}(1 - \sqrt[3]{x})\}.$$

.....

Risposta: 3/10.

*. Studiare la funzione

$$f(x) = \log(|x - 2| - 2)$$

e tracciarne un grafico qualitativo.

.....

- $\text{dom } f = D = (-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$, $f \in C(D)$;
- $f(-1) = f(5) = 0$;
- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$;
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$;
- $f'(x) = \begin{cases} (x - 4)^{-1} & x > 4 \\ x^{-1} & x < 0 \end{cases}$;
- $f \in C^1(D)$, f decrescente in $(-\infty, 0)$, f crescente in $(4, +\infty)$;
- $\sup f = +\infty$, $\inf f = -\infty$, nessun massimo/minimo locale;
- $f''(x) = \begin{cases} -(x - 4)^{-2} & x > 4 \\ -x^{-2} & x < 0 \end{cases}$;
- $f \in C^2(D)$, f concava in $(-\infty, 0)$, f concava in $(4, +\infty)$, nessun flesso.

(a) Studiare la funzione

$$f(x) = \log \left(\frac{1}{|x| - |x-2|} \right)$$

e tracciarne un grafico qualitativo nell'ipotesi che il numero di flessi sia minimo.

(b) Utilizzando (a), tracciare un grafico qualitativo della funzione

$$g(x) = \frac{1}{\log \left(\frac{1}{|x| - |x-2|} \right)}.$$

* (a) Studiare la funzione

$$f(x) = 2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1$$

e tracciarne un grafico qualitativo nell'ipotesi che il numero di flessi sia minimo.

(b) Utilizzando (a), tracciare un grafico qualitativo della funzione

$$g(x) = |f(x)|;$$

dire se la funzione $g(x)$ è derivabile nei punti $x = \frac{\pi}{2}$ e $x = \frac{5\pi}{6}$.

* Dire se esiste una funzione tale che:

- $f \in C^1(D)$, $D \subset \mathbf{R}$,
- $f'(x) > 0$ per ogni $x \in D$,
- f non è monotona in D

(in caso affermativo fornire un esempio, in caso negativo motivare la risposta).

.....

Risposta: Sì. La funzione $f(x) = -1/x$ verifica le proprietà richieste.

Sia $\{a_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ una successione tale che $a_0 > 0$ e $a_{n+1} \geq 3a_n$ per ogni n .

(a) Dimostrare che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty.$$

(b) Mostrare con un controesempio che la conclusione in (a) è falsa se non si assume che $a_0 > 0$.

* Fornire l'esempio di una funzione $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ che nel punto $(0, 0)$ non è continua ma è derivabile nella direzione $\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, -2)$, e verificare che la f prescelta soddisfa tali proprietà .

* Determinare la somma della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right) .$$

.....

Risposta: $3/2$.