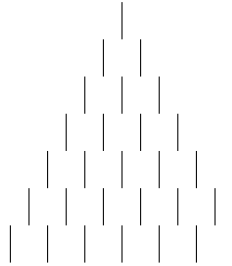


Il gioco dell'abete

Francesco Zigliotto

31 dicembre 2015



Sommario

Dati sette gruppi di bastoncini verticali disposti come in figura, il *gioco dell'abete* consiste nel tracciare, a turno, una linea orizzontale che “cancelli” un certo numero (maggiore di zero) di bastoncini consecutivi. Perde il giocatore che, per primo, non può più fare la mossa al proprio turno (perché tutti i bastoncini sono stati cancellati).

In questo lavoro si farà riferimento alla *famiglia* di giochi che hanno le stesse regole del *gioco dell'abete* ma iniziano da una configurazione qualunque (un qualunque insieme di gruppi di bastoncini, ciascuno con un numero a piacere di bastoncini). Si dimostrerà un criterio generale per determinare se il gioco ammette una strategia vincente per il primo o per il secondo giocatore e si determineranno le mosse di tale strategia.

INDICE

1	Formalizzazione del gioco	2
1.1	Lemma di equivalenza	3
1.2	Configurazioni semplificate	3
1.3	Corrispondenza biunivoca tra configurazioni semplificate e numeri interi positivi	4
1.4	Somma di configurazioni	4
1.5	Alterazioni e mosse	5

2	Le configurazioni secondarie	6
2.1	Funzioni ψ e σ di una configurazione	6
2.2	La funzione σ genera secondarie	7
2.3	Il teorema delle secondarie	10
2.4	Generalizzazione a configurazioni non necessariamente semplificate	12
3	La mossa vincente	12
4	Le configurazioni complete	13
5	Conclusioni	14

1 FORMALIZZAZIONE DEL GIOCO

Il gioco dell'abete è un gioco combinatorio finito. Pertanto, per ogni configurazione iniziale, ammette una strategia vincente per uno dei due giocatori.

Come anticipato nel sommario, il si generalizza ora il gioco, considerando che nella configurazione iniziale possa esserci un numero a piacere di gruppi di bastoncini, ciascuno costituito da un numero di bastoncini arbitrario.

Definizione 1. Si definisce *gruppo* ciascuno degli insiemi di bastoncini tale che tutti gli elementi al suo interno si possono cancellare in un'unica mossa e non esista un elemento che *non* gli appartiene tale che, in un'unica mossa, possa essere cancellato insieme ad uno qualsiasi degli elementi che gli appartengono.

Gruppi.

Definizione 2. Due gruppi si dicono *uguali* se hanno lo stesso numero di elementi.

Gruppi uguali.

Definizione 3. Due configurazioni si dicono *equivalenti* se il giocatore che ha la strategia vincente (quello di cui è il turno o l'altro) è lo stesso per entrambe.

Configurazioni equivalenti.

Definizione 4. Si definisce *grado* di una configurazione α il massimo $n \in \mathbb{Z}$ tale che esista un gruppo di n elementi in α . Si indica con $\deg(\alpha)$.

Grado.

Definizione 5. Si definiscono *coefficienti* di una configurazione di grado n i naturali $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ tali che nella configurazione ci siano esattamente α_1 gruppi di 1 elemento, α_2 gruppi di 2 elementi, \dots , α_n gruppi di n elementi.

Coefficienti.

Definizione 6. Una configurazione α si dice *primaria* se ammette strategia vincente per il primo giocatore, altrimenti si dice *secondaria*. La configurazione vuota è *secondaria* in quanto il primo giocatore non può muovere, quindi perde, dunque il secondo giocatore ha la strategia vincente.

Configurazioni primarie e secondarie.

Osservazione 1. *Una configurazione è primaria se e solo se è possibile raggiungere una configurazione secondaria in una mossa.*

1.1 Lemma di equivalenza

Lemma 1. *Siano a e b due configurazioni. Sia c la configurazione unione di a e di b . Se b è secondaria, allora le configurazioni a e c sono equivalenti.*

Dimostrazione. Sia g il giocatore che ha la strategia vincente su a e sia h l'altro giocatore. Si dimostra che g ha una strategia vincente per la configurazione c , unione delle due sotto-configurazioni a e b . La strategia vincente per g è la seguente:

- Se l'ultima mossa di h è stata su un gruppo di bastoncini appartenenti alla sotto-configurazione a oppure se g è il primo a muovere, allora anche g fa la sua mossa sui bastoncini di a , la stessa mossa che avrebbe fatto se, nella configurazione c non ci fossero anche i bastoncini della sotto-configurazione b , secondo la sua strategia vincente.
- Se l'ultima mossa di h è stata sui bastoncini della sotto-configurazione b , allora anche g fa la sua mossa sui bastoncini di b .

In questo modo g non giocherà mai per primo sulla sotto-configurazione b : anche se h giocasse su a fino ad esaurirne i bastoncini, dato che g ha una strategia vincente su a , sarà comunque g ad effettuare l'ultima mossa su a , costringendo h a muovere per primo su b .

Quindi, siccome b è secondaria e g vi muove per secondo, g ha una strategia vincente per anche per la sotto-configurazione b . Questo significa che g cancellerà l'ultimo bastoncino di a e l'ultimo bastoncino di b , di conseguenza vincerà anche su c .

Dunque entrambe le configurazioni a e c hanno g come giocatore vincente, perciò sono equivalenti. \square

1.2 Configurazioni semplificate

Lemma 2. *Se una configurazione è costituita esclusivamente da due gruppi uguali, allora è secondaria.*

Dimostrazione. Affinché il secondo giocatore vinca, basta che per ogni mossa del primo giocatore su uno dei due gruppi, il secondo faccia la stessa mossa sull'altro gruppo. In questo modo il gioco finisce in un numero pari di mosse. \square

L'unione di questi due lemmi implica che, data una qualunque configurazione, togliendo ad essa 2 gruppi uguali, si ottiene una configurazione equivalente. A questo punto è ben posta la seguente definizione:

Definizione 7. Data una generica configurazione a che ha coefficienti a_1, a_2, \dots, a_n , posto:

$$b_i = \begin{cases} 0 & \text{se } a_i \text{ è pari} \\ 1 & \text{se } a_i \text{ è dispari} \end{cases} \quad \forall i \in [1, n]$$

si definisce *configurazione semplificata* di a la configurazione b che ha coefficienti b_1, b_2, \dots, b_n . Per i lemmi 1 e 2, b è equivalente ad a .

Il problema si riduce ora allo studio delle *configurazioni semplificate*.

1.3 Corrispondenza biunivoca tra configurazioni semplificate e numeri interi positivi

Esiste una corrispondenza biunivoca tra le configurazioni semplificate e i numeri interi positivi: ad ogni numero $x \in \mathbb{Z}^+$ tale che:

$$x = a_n \cdot 2^{n-1} + a_{n-1} \cdot 2^{n-2} + \dots + a_2 \cdot 2 + a_1$$

(dunque $a_n a_{n-1} \dots a_1$ è la sua scrittura in base 2) si associa la configurazione semplificata che ha per coefficienti a_1, a_2, \dots, a_n . La relazione è biunivoca in quanto è invertibile: ogni configurazione semplificata ha per coefficienti solo 0 o 1, quindi è possibile associarle il numero, che, scritto in binario, ha per cifre i suoi coefficienti.

Dunque le configurazioni si possono *ordinare*: una configurazione è minore di un'altra se e solo se il numero associato alla prima è minore del numero associato alla seconda.

D'ora in poi si applicherà implicitamente la relazione prima descritta e ogni configurazione semplificata verrà considerata sia come *configurazione* in sé, sia come *numero* scritto in binario. Dunque, per ogni configurazione/numero, i concetti di *coefficiente* e di *cifra* (da destra) diventano equivalenti.

Inoltre, quando si parlerà di *configurazioni*, da ora s'intenderà *configurazioni semplificate*.

Ordinamento delle configurazioni.

Identificazione di configurazioni e numeri

1.4 Somma di configurazioni

Definizione 8. Date due configurazioni a e b , si definisce $a \oplus b$ la configurazione c tale che $c = \text{XOR}(a, b)$.¹

Osservazione 2. *Valgono le seguenti proprietà*

¹ Si ricorda che l'operatore XOR tra due numeri binari è la somma senza riporto; in formula, detto n il numero di cifre in binario del massimo tra a e b ,

$$\text{XOR}(a, b) = \sum_{i=0}^n 2^i \left[\left(\left\lfloor \frac{a}{2^i} \right\rfloor \bmod 2 \right) + \left(\left\lfloor \frac{b}{2^i} \right\rfloor \bmod 2 \right) \right] \bmod 2.$$

- $a \oplus b = b \oplus a$.
- $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$
- Se $c = a \oplus b$ allora $a = b \oplus c$ e $b = a \oplus c$.
- Se $a \oplus c = b \oplus c$, allora $a = b$.
- $a \oplus b \leq a + b$ (l'operazione XOR è di fatto una somma senza riporto).

Date due configurazioni a e b , sia c la configurazione *unione* di a e b , semplificata. Se n è il grado del massimo tra a e b , detto c_i l' i -esimo coefficiente di c e definiti analogamente a_i e b_i , per ogni $i \in [1, n]$ varrà che $c_i = a_i + b_i \pmod{2}$. Quindi $c = a \oplus b$. Con l'operatore \oplus , dunque, si ottiene una configurazione equivalente all'*unione* delle due configurazioni di partenza.

A questo punto si può enunciare il seguente corollario del lemma 1:

Corollario 1. Per ogni configurazione a , se x è una configurazione secondaria, $a \oplus x$ è equivalente ad a .

1.5 Alterazioni e mosse

Definizione 9. Data una configurazione a di grado n , si definisce una sua *alterazione* $\mu(x_1, x_2, \dots, x_m)$ con $n \geq x_1 > x_2 > \dots > x_m$ la trasformazione di a in b tale che:

$$b = a \oplus \sum_{i=1}^m 2^{x_i-1}$$

ovvero vengono cambiate (da 0 a 1 e viceversa) le cifre di a che, da destra, occupano i posti x_1, \dots, x_m .

Una mossa valida consiste nell'individuare un gruppo di x bastoncini e cancellarne alcuni consecutivi, con uno dei seguenti risultati:

Le tre tipologie di mosse possibili.

- si cancella l'intero gruppo di x bastoncini;
- il gruppo di x bastoncini si riduce e diventa un gruppo di y bastoncini (con $x > y$);
- il gruppo di x bastoncini si separa in due gruppi, di y e z bastoncini rispettivamente, con $x > y + z$.

Definizione 10. Si definisce *mossa* su una configurazione a una delle seguenti alterazioni:

- $\mu(x)$;
- $\mu(x, y)$, con $x > y$;

- $\mu(x, y, z)$, con $x > y > z$ e $x > y + z$;

in tutti e tre i casi deve valere che l' x -esima cifra di a (da destra) è 1. Questo significa che ogni mossa porta ad una configurazione *strettamente minore* di quella di partenza.

2 LE CONFIGURAZIONI SECONDARIE

2.1 Funzioni ψ e σ di una configurazione

Definizione 11. Si definisce *contenuto* di una configurazione x di grado n (e si indica con il simbolo $\psi(x)$) la configurazione che ha per coefficienti x_1, x_2, \dots, x_r (r è il massimo naturale tale che $2^{r-1} \leq n$), dove x_1, x_2, \dots, x_r sono le cifre di x che occupano (da destra) le posizioni $2^0, 2^1, \dots, 2^{r-1}$, rispettivamente.

Contenuto: la funzione ψ .

Osservazione 3. Valgono le seguenti proprietà:

- $a = b \implies \psi(a) = \psi(b)$.
- $\psi(a + b) = \psi(a) \oplus \psi(b)$.
- $\psi(2^{2^{k-1}-1}) = 2^{k-1} \implies$ se x è una potenza di 2, $\psi(2^{x-1}) = x$.

Definizione 12. Detto \mathbb{P}_2 l'insieme delle potenze di 2, sia $\sigma: \mathbb{N} \setminus \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{N}$ la funzione tale che (posta $x_n \dots x_1$ la rappresentazione binaria di $x > 0$):

La funzione σ .

$$\sigma(x) = 2^{x-1} + \sum_{i=1}^n x_i 2^{2^{i-1}-1}.$$

Si pone per definizione $\sigma(0) = 0$. Sia \mathbb{S} l'insieme delle immagini di σ .

Osservazione 4. Valgono le seguenti proprietà:

Proprietà.

- $\deg(\sigma(x)) = x$. Infatti, dato un naturale x non potenza di 2, detto n il numero delle sue cifre, si ha che:

$$\begin{aligned} n &= \lfloor 1 + \log_2(x) \rfloor < 1 + \log_2(x) \\ \implies \forall i \in [1, n] : 2^{2^{i-1}-1} &\leq 2^{2^{n-1}-1} < 2^{2^{\log_2(x)}-1} = 2^{x-1}. \end{aligned}$$

- Posto n il numero delle cifre di x , si ha che l' n -esima cifra di x in binario è 1, quindi anche la 2^{n-1} -esima cifra di $\sigma(x)$ è 1. Si consideri anche che 2^{n-1} è la più grande potenza di 2 minore di x .
- $\psi(\sigma(x)) = x$.
- $\sigma(\psi(x)) = 2^{\psi(x)-1} + x$

- Per ogni x nel dominio di σ , $\sigma(x)$ ha almeno 3 cifre uguali a 1. Infatti, $\psi(\sigma(x))$ ha almeno 2 cifre (non è una potenza di 2), e $\sigma(x)$ ha almeno un'altra cifra (che occupa posto x).

Dunque σ associa il numero x alla più piccola delle configurazioni di grado n che hanno contenuto x . Di seguito alcuni esempi:

Esempi.

$$\begin{aligned}\sigma(111_{(2)}) &= \boxed{1}00\boxed{1}0\boxed{1}1 \\ \sigma(10111_{(2)}) &= \boxed{1}000000\boxed{1}0000000\boxed{0}000\boxed{1}0\boxed{1}1 \\ \sigma(11010_{(2)}) &= \boxed{1}000000000\boxed{1}0000000\boxed{1}000\boxed{0}0\boxed{1}0\end{aligned}$$

2.2 La funzione σ genera secondarie

Teorema 1. Per ogni $x \in \mathbb{N}$, se x è una potenza di 2, allora non esistono configurazioni secondarie di grado x ; se invece x non è una potenza di 2, allora $\sigma(x)$ è secondaria.

Tutte le configurazioni di \mathbb{S} sono secondarie.

Dimostrazione (per induzione estesa su x).

PASSO BASE: $x = 0$.

$\sigma(0) = 0$, che è secondaria.

PASSO INDUTTIVO: $0, \dots, x-1 \rightarrow x$.

Data una qualsiasi configurazione a di grado n (con $n \leq x$), si ha che, per ogni $i < n$ che non sia una potenza di 2, $\sigma(i)$ è secondaria, per ipotesi induttiva. Dunque, siano $a_1 < a_2 < \dots < a_s$ (con $a_s < n$) le posizioni (da destra) delle cifre di a uguali a 1 tali che nessuno tra a_1, \dots, a_s sia una potenza di 2. Si ponga:

$$a^* = a \oplus \sigma(a_s) \oplus \sigma(a_{s-1}) \oplus \dots \oplus \sigma(a_1).$$

Si ha che a^* è equivalente a a . Per ognuna delle configurazioni $\sigma(a_i)$ l'unica cifra uguale a 1 che occupi un posto *non* potenza di 2 è la cifra di posto a_i . Pertanto, detta $a_n^* a_{n-1}^* \dots a_1^*$ la rappresentazione binaria di a^* , si ha che per ogni $i < n$ non potenza di 2, $a_i^* = 0$.

La configurazione a^* è anch'essa di grado n , ma è evidente che $a^* \leq a$, infatti tutte le cifre di a^* di posizione (da destra) compresa tra a_s (escluso) e n (incluso) sono uguali alle rispettive cifre di a , mentre la cifra di posto a_s è 0 in a^* e 1 in a .

A questo punto è ben posta la seguente definizione:

Definizione 13. Si definisce a^* come una *configurazione normalizzata* equivalente a a .

Osservazione 5. Tutte le configurazioni $\in \mathbb{S}$ (l'insieme delle immagini di σ) sono normalizzate.

Osservazione 6. *Non esistono due configurazioni distinte secondarie dello stesso grado $\leq x$, entrambe normalizzate. Infatti la loro somma sarebbe una configurazione che ha per grado una potenza di 2 che, per ipotesi induttiva, è primaria.*

Osservazione 7. *Non esistono due configurazioni a e b entrambe secondarie che differiscono per due cifre, infatti, dette m e n tali cifre:*

$$a \oplus b = 2^{n-1} + 2^{m-1}$$

dove il membro di destra è una configurazione primaria (in una mossa è possibile ricondursi alla configurazione nulla).

Si distinguono ora due casi:

PRIMO CASO: x è una potenza di 2.

x è una
potenza di 2.

Sia $x = 2^k$ e sia a una generica configurazione di grado x . Inoltre, sia a^* la normalizzata equivalente a a e si ponga $d = \psi(a^* \oplus 2^{x-1})$.

Se d è una potenza di 2, allora a^* ha solo due cifre, dunque a^* (e di conseguenza anche a) è primaria.

Se invece d non è una potenza di due, si ha che:

$$d \leq \sum_{i=1}^{k-1} 2^i = 2^k - 1 < 2^k = x.$$

Allora, per ipotesi induttiva, $\sigma(d)$ è secondaria. Si ha che:

$$\sigma(d) = \sigma(\psi(a^* \oplus 2^{x-1})) = 2^{d-1} \oplus a^* \oplus 2^{x-1}.$$

Dunque $\sigma(d)$ e a^* differiscono per due cifre (di posto d e x). Allora per l'osservazione 7, non possono essere entrambe secondarie, dunque a^* (e di conseguenza anche a) è primaria.

Pertanto tutte le configurazioni di grado x sono primarie.

SECONDO CASO: x non è una potenza di 2.

x non è una potenza
di 2.

Se, per assurdo, $\sigma(x)$ non fosse secondaria, allora sarebbe primaria, dunque in una mossa sarebbe possibile giungere ad una secondaria.

Si suppone per assurdo che si possa giungere in una mossa dalla configurazione $\sigma(x)$ ad una secondaria a dello stesso grado (cioè x). Sia a^* la secondaria normalizzata equivalente a a . Posto $b = \psi(a^*)$, si avrebbe che $\sigma(b)$ e a^* avrebbero lo stesso contenuto, dunque:

$$a^* \oplus \sigma(b) = 2^{x-1} + 2^{b-1}.$$

Ma $a^* \leq a < \sigma(x)$, inoltre a^* e $\sigma(x)$ hanno lo stesso grado, quindi $\psi(a^*) < \psi(\sigma(x))$, cioè $b < x$, quindi vale l'ipotesi

induttiva e $\sigma(b)$ è secondaria. Questo è assurdo, in quanto $2^{x-1} + 2^{b-1}$, somma di due secondarie, è primaria (in una mossa è possibile ricondursi alla configurazione nulla).

Se ne desume che in una mossa non è possibile giungere da $\sigma(x)$ ad una secondaria dello stesso grado. Dunque si esaminano ora le possibili mosse che comportano il coinvolgimento dell' x -esima cifra di $\sigma(x)$:

- $\mu(x)$ sarebbe l'unica mossa possibile che coinvolga un solo elemento, tuttavia, questa mossa porterebbe ad una configurazione che ha per grado una potenza di 2 minore di x , che, per ipotesi induttiva, è una configurazione primaria.

Mosse su un elemento.

- Si consideri allora una mossa del tipo $\mu(x, y)$.
Se y fosse una potenza di 2, allora la configurazione ottenuta con tale mossa non avrebbe alcun 1 in una posizione che *non* sia una potenza di 2, dunque avrebbe una potenza di 2 per grado, allora sarebbe primaria per ipotesi induttiva.

Mosse su due elementi.

Se invece y non fosse una potenza di 2, allora, detta p la più grande potenza di 2 minore di x , dato che la cifra di posto p (da destra) di $\sigma(x)$ è 1 (per proprietà di σ), y dev'essere maggiore di p , altrimenti si giungerebbe ad una configurazione di grado p , che è primaria. La configurazione che si otterrebbe sarebbe di grado y e già normalizzata, ma con contenuto x . Dato che, per ipotesi induttiva, $\sigma(y)$ è secondaria e normalizzata (di grado y), si avrebbero due secondarie normalizzate dello stesso grado (y) diverse tra loro, che è impossibile per l'osservazione 6.

- Si consideri allora una mossa del tipo $\mu(x, y, z)$.
Se y e z fossero potenze di 2, allora si giungerebbe ad una configurazione costituita solo da potenze di 2, primaria per ipotesi induttiva, a meno che non si giunga alla configurazione nulla. Tuttavia questo sarebbe possibile solo se x avesse solo 2 cifre uguali a 1 in binario (si ponga che occupino da destra le posizioni a e b). Si avrebbe che $x = 2^{a-1} + 2^{b-1}$, dunque:

*Mosse su tre elementi.
 x e y potenze di 2.*

$$\begin{aligned}\sigma(x) &= 2^{x-1} + 2^{2^{a-1}-1} + 2^{2^{b-1}-1} \\ &= 2^{2^{a-1}+2^{b-1}-1} + 2^{2^{a-1}-1} + 2^{2^{b-1}-1}.\end{aligned}$$

Quindi le tre cifre di $\sigma(x)$ occuperebbero (da destra) le posizioni 2^{a-1} , 2^{b-1} e $(2^{a-1} + 2^{b-1})$; affinché si possano cancellare tutti e tre le cifre 1 in un'unica mossa, dovrebbe valere $x = 2^{a-1} + 2^{b-1}$, $y = 2^{a-1}$, $z = 2^{b-1}$, che è assurdo in quanto così si avrebbe $x \neq y + z$.

Se invece solo uno tra y e z fosse una potenza di due (si pone che z sia una potenza di 2, l'altro caso è analogo), in seguito alla mossa è necessario giungere ad una configurazione α di grado y , altrimenti (altrimenti il grado sarebbe una potenza di 2) già normalizzata che, per l'osservazione 6, deve avere lo stesso *contenuto* di $\sigma(y)$, cioè y :

Uno solo tra x e y è potenza di 2.

$$\overbrace{\psi(\sigma(x))}^{=x} \oplus z = y \implies x = y \oplus z.$$

Questo significherebbe che $x \leq y + z$, che è assurdo. Infine, se nessuno tra y e z fosse una potenza di 2, in seguito alla mossa si giungerebbe ad una configurazione α di grado y , e *contenuto* x (ha lo stesso contenuto di $\sigma(x)$) e si avrebbe anche che:

x e y non sono potenze di 2.

$$\alpha^* = \alpha \oplus \sigma(z)$$

Per l'osservazione 6, dovrebbe valere anche:

$$\alpha^* = \sigma(y).$$

Dunque:

$$\begin{aligned} \sigma(y) &= \alpha \oplus \sigma(z) \\ \implies \overbrace{\psi(\sigma(y))}^{=y} &= \overbrace{\psi(\alpha)}^{=x} \oplus \overbrace{\psi(\sigma(z))}^{=z}. \end{aligned}$$

che, analogamente al caso precedente, è assurdo. \square

A questo punto è ben posta la definizione di *configurazione normalizzata* per qualunque $x \in \mathbb{N}$.

Corollario 2. Una configurazione α di grado n è secondaria se e solo se la sua configurazione normalizzata α^* è tale che

$$\alpha^* = \sigma(n) \iff \alpha^* \oplus \sigma(n) = 0.$$

2.3 Il teorema delle secondarie

Definizione 14. Sia $\mathbb{U}(x)$ l'insieme di interi positivi tale che $i \in \mathbb{U}(x)$ se e solo se l' i -esima cifra di x (scritto in binario) è 1. Sia $\mathbb{P}(x)$ l'insieme degli interi positivi j tali che $j \in \mathbb{U}(x)$ e j è una potenza di 2. Analogamente, sia $\mathbb{Q}(x)$ l'insieme degli interi positivi k tali che $k \in \mathbb{U}(x)$ e k non è una potenza di 2.

$\mathbb{U}(x), \mathbb{P}(x), \mathbb{Q}(x)$

Si userà la notazione \sum^{\oplus} per le somme secondo l'operatore \oplus .

Chiaramente, quando si sommano potenze di due distinte, tale notazione coincide con \sum .

Teorema 2. *Data una configurazione x di grado n (con n non potenza di 2), x è secondaria se e solo se*

$$\sum_{i \in U(x)}^{\oplus} i = 0.$$

Dimostrazione. La normalizzata di x è, per definizione:

$$x^* = x \oplus \sum_{\substack{i \in Q(x) \\ i < n}}^{\oplus} \sigma(i).$$

Inoltre, ogni configurazione x si può scrivere come

$$x = \sum_{i \in U(x)}^{\oplus} 2^{i-1} = \sum_{i \in P(x)}^{\oplus} 2^{i-1} \oplus \sum_{i \in Q(x)}^{\oplus} 2^{i-1}.$$

Per il corollario 2, x è secondaria se e solo se

$$\begin{aligned} & x^* \oplus \sigma(n) = 0 \\ \Leftrightarrow & \overbrace{\sum_{i \in P(x)}^{\oplus} 2^{i-1} \oplus \sum_{i \in Q(x)}^{\oplus} 2^{i-1}}^x \oplus \sum_{\substack{i \in Q(x) \\ i < n}}^{\oplus} \sigma(i) \oplus \sigma(n) = 0 \\ \Leftrightarrow & \sum_{i \in P(x)}^{\oplus} 2^{i-1} \oplus \underbrace{\sum_{i \in Q(x)}^{\oplus} 2^{i-1} \oplus \sum_{i \in Q(x)}^{\oplus} \sigma(i)}_{\text{Ha cifre 1 solo su potenze di 2.}} = 0. \end{aligned}$$

Il membro di sinistra ha le cifre uguali a 1 che occupano un posto che è potenza di 2 (da destra), dunque esso è uguale a 0 se e solo se è uguale a 0 il suo contenuto:

$$\begin{aligned} & \chi \left(\sum_{i \in P(x)}^{\oplus} 2^{i-1} \oplus \sum_{i \in Q(x)}^{\oplus} 2^{i-1} \oplus \sum_{i \in Q(x)}^{\oplus} \sigma(i) \right) = 0 \\ \Leftrightarrow & \chi \left(\sum_{i \in P(x)}^{\oplus} 2^{i-1} \right) \oplus \overbrace{\chi \left(\sum_{i \in Q(x)}^{\oplus} 2^{i-1} \right)}^{=0} \oplus \chi \left(\sum_{i \in Q(x)}^{\oplus} \sigma(i) \right) = 0 \\ \Leftrightarrow & \sum_{i \in P(x)}^{\oplus} \chi(2^{i-1}) \oplus \sum_{i \in Q(x)}^{\oplus} \chi(\sigma(i)) = 0 \\ \Leftrightarrow & \sum_{i \in P(x)}^{\oplus} i \oplus \sum_{i \in Q(x)}^{\oplus} i = 0 \Leftrightarrow \sum_{i \in U(x)}^{\oplus} i = 0. \end{aligned}$$

□

2.4 Generalizzazione a configurazioni non necessariamente semplificate

Si consideri una configurazione x non necessariamente semplificata.

Definizione 15. Data una configurazione x di grado n composta da x_1 gruppi di 1 elemento, x_2 gruppi di 2 elementi, \dots , x_n gruppi di n elementi (con gli x_i eventualmente nulli), sia $\mathbb{W}(x)$ il *multiinsieme*.

$$\mathbb{W}(x) = \{\underbrace{1, \dots, 1}_{x_1 \text{ volte}}, \underbrace{2, \dots, 2}_{x_2 \text{ volte}}, \dots, \underbrace{n, \dots, n}_{x_n \text{ volte}}\}.$$

Il teorema 2 si può così generalizzare:

Corollario 3. Ogni configurazione x (eventualmente non semplificata) è secondaria se e solo se

$$\sum_{i \in \mathbb{W}(x)}^{\oplus} i = 0.$$

Dimostrazione. Dato che la somma (\oplus) di un numero pari di elementi uguali fra loro è 0, si ha che:

$$\sum_{i \in \mathbb{W}(x)}^{\oplus} i = 0 \iff \sum_{i=1}^n x_i \cdot i = 0 \iff \sum_{i=1}^n (x_i \bmod 2) \cdot i = 0.$$

Sia \tilde{x} la configurazione semplificata di x . Si ha che

$$\mathbb{U}(\tilde{x}) = \{1 \cdot (x_1 \bmod 2), 2 \cdot (x_2 \bmod 2), \dots, n \cdot (x_n \bmod 2)\}$$

Dunque:

$$\sum_{i=1}^n (x_i \bmod 2) \cdot i = 0 \iff \sum_{i \in \mathbb{U}(\tilde{x})}^{\oplus} i = 0,$$

che, per il teorema 2, è vero se e solo se \tilde{x} è secondaria, quindi se e solo se x è secondaria (in quanto \tilde{x} è equivalente a x). \square

3 LA MOSSA VINCENTE

Si supponga che sia data una certa configurazione primaria x , non necessariamente semplificata. Si ponga:

$$y = \sum_{i \in \mathbb{W}(x)}^{\oplus} i.$$

Detto n il numero di cifre di y , sia h un elemento di $\mathbb{W}(x)$ tale che l' n -esima cifra (da destra) di h scritto in binario sia 1 (è facile verificare che tale elemento esiste sicuramente).

Si considera ora la configurazione x' ottenuta dalla configurazione x sostituendo uno dei gruppi di h elementi con un gruppo di $(h \oplus y)$ elementi. Si ha che:

$$\sum_{i \in \mathbb{W}(x')} i = y \oplus \sum_{i \in \mathbb{W}(x)} i = 0.$$

Dunque x' è secondaria. Inoltre è possibile passare in una mossa da x a x' in quanto, per costruzione, $h \oplus y < h$. Tale mossa consiste appunto nel cancellare $h - (h \oplus y)$ elementi da un'estremità del gruppo di h elementi.

4 LE CONFIGURAZIONI COMPLETE

Si approfondiscono ora le *configurazioni complete*, un caso particolare di configurazioni semplificate.

Definizione 16. Una configurazione (semplificata) si dice *completa* se è della forma $2^n - 1$, cioè $\forall i \in [1, n]$ esiste esattamente un gruppo di i elementi e non vi sono gruppi con più di n elementi.

Definizione.

Teorema 3. Una configurazione completa $2^n - 1$ è secondaria se e solo se $n \equiv 3 \pmod{4}$.

Teorema delle configurazioni complete.

Dimostrazione. Dato che $\mathbb{W}(2^n - 1) = \{1, 2, \dots, n\}$, per il teorema 2, $2^n - 1$ è secondaria se e solo se

$$\sum_{i=1}^n i = 0.$$

Se si indica con $\gamma_r(x)$ l' r -esima cifra (da destra) di x (scritto in binario), deve quindi valere che:

$$\forall r : \gamma_r \left(\sum_{i=1}^n i \right) = 0.$$

In generale, per ogni numero i scritto in base 2 vale che:

$$\gamma_r(i) = \begin{cases} 0 & \text{se } i \bmod 2^r \in [0, 2^{r-1}[\\ 1 & \text{se } i \bmod 2^r \in [2^{r-1}, 2^r[\end{cases}$$

quindi, per $r > 1$:

$$\gamma_r \left(\sum_{i=1}^n i \right) = 0 \iff n \bmod 2^r \in [0, 2^{r-1}[\\ \text{oppure} \begin{cases} n \bmod 2^r \in [2^{r-1}, 2^r[\\ n \equiv 1 \pmod{2}. \end{cases}$$

Per $r = 1$ si ottiene la condizione necessaria che $n \bmod 4 \in \{0, 3\}$.

Da quest'ultima e dalle precedenti condizioni ne deriva che, se $n \equiv 3 \pmod{4}$, allora $2^n - 1$ è secondaria.

Se invece $n \equiv 0 \pmod{4}$, si ha che $n - 1 \equiv 3 \pmod{4}$ dunque $2^{n-1} - 1$ è secondaria. Vale inoltre che

$$(2^n - 1) \oplus (2^{n-1} - 1) = 2^{n-1}.$$

Dato che 2^{n-1} è primaria, se ne desume che anche $2^n - 1$ è primaria.

Pertanto $2^n - 1$ è secondaria se e solo se $n \equiv 3 \pmod{4}$. \square

Corollario 4. *Nel gioco dell'abete il secondo giocatore ha la strategia vincente.*

5 CONCLUSIONI

Dai precedenti lemmi e teoremi si possono trarre le seguenti conclusioni:

- Ogni configurazione del gioco ammette una strategia vincente per uno dei due giocatori. La configurazione iniziale del *gioco dell'abete* ammette una strategia vincente per il secondo a giocare.
- Sommare (\oplus) le cardinalità (numero di elementi) di ogni gruppo (scritte in binario); la configurazione è secondaria se e solo se tale somma è 0.
- Se si è stabilito che la configurazione è secondaria, qualunque mossa è equivalente: non c'è strategia vincente per il giocatore di cui è il turno.
- Se invece la configurazione attuale è primaria, il giocatore che ha ora il turno ha una strategia vincente. Per seguire questa strategia, il giocatore può seguire il procedimento descritto nel paragrafo 3.