

Allenamenti EGMO 2016 – 2

Esercizio 1. Diciamo che una successione a_n , con $n \geq 0$ intero, è polinomiale se esiste un polinomio $p(x)$ tale che $a_n = p(n)$ per ogni $n \geq 0$ intero. Dire (dimostrando le affermazioni) se le seguenti successioni sono polinomiali:

1. $a_n = 2^n$;
2. $a_n = \left\lfloor \frac{n^3+n+1}{3} \right\rfloor$.

Esercizio 2. Giada e Federico giocano ad un gioco. Iniziano con n palline e ad ogni mossa possono togliere o 3 o 4 palline. Perde chi non può più muovere (cioè al suo turno non sono rimaste abbastanza palline da togliere) e inizia Giada. Chi vince?

Esercizio 3. Sia ABC un triangolo con $AB > AC$. Chiamiamo D il piede dell'altezza da A a BC , E ed F i punti medi dei lati AD e BC rispettivamente e G il piede della perpendicolare da B ad AF . Dimostrare che EF tange in F la circonferenza passante per G , F , C .

Esercizio 4. Sia n un intero positivo e siano $1 = d_1 < d_2 < \dots < d_k = n$ i suoi divisori, elencati in ordine crescente. Determinare tutti gli n tali che $k > 3$ e $n = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2$.