I seguenti esercizi sono stati proposti, e quasi tutti risolti, attraverso la mailing list del corso di Geometria IV durante l'anno accademico 2004/2005.

Esercizio 1. *Dimostrare che se (X,d) è uno spazio metrico anche (X,d') lo è, dove $d' = \frac{d}{1+d}$.*

<u>Soluzione I</u>

Vogliamo dimostrare che $1 - \frac{1}{1+a} + 1 - \frac{1}{1+b} \geq 1 - \frac{1}{1+c}$ ogni volta che $a+b \geq c$. Poniamo $a' = 1+a$, $b' = 1+b$, $c' = 1+c$ per avere dei denominatori un po' meno brutti. Otteniamo: $1 - \frac{1}{a'} + 1 - \frac{1}{b'} - (1 + \frac{1}{c'}) \geq 0$ ogni volta che (occhio che cambia anche l'ipotesi) $a'+b'-1 \geq c'$. N.B: prima a,b,c erano ≥ 0, ora a',b',c' sono ≥ 1.

La disuguaglianza che vogliamo provare diventa: $1 + \frac{1}{c'} \geq \frac{1}{a'} + \frac{1}{b}$ usando l'ipotesi ci basta dimostrare che $1 + \frac{1}{a'+b'-1} \geq \frac{1}{a'} + \frac{1}{b'}$. Questa si riscrive come: $\frac{a'+b'}{a'+b'-1} \geq \frac{a'+b'}{a'b'}$ che è vera se e solo se $a'b' \geq a'+b'-1$ (i numeratori sono uguali). Ma questa è sempre vera, perché dividendo ad es per a' (che è ≥ 1) rimane: $b' \geq 1 + \frac{b'-1}{a'}$ ovvero $b'-1 \geq \frac{b'-1}{a'}$ che è vero perchè $a' \geq 1$.

<u>Soluzione II</u>

Il grafico della funzione $f(x) = \frac{x}{1+x}$ è un'iperbole, che passa per l'origine, con asintoto orizzontale la retta di equazione $x = 1$ (e asintoto verticale la retta $y = -1$). Consideriamo solo la parte con x positiva.

Innanzitutto notiamo che se $a \leq b \leq c$ allora $f(a) \leq f(b) \leq f(c)$. Per dimostrare che la disuguaglianza triangolare si conserva basta dimostrare che se $a+b \geq c$ allora $f(a)+f(b) \geq f(c)$ (non serve farlo per tutte le combinazioni possibili di a,b,c). Consideriamo la retta passante per $f(a)$ e per $f(b)$ (per capirci qualcosa è consigliabile fare un disegno), questa sarà del tipo $y = kx+h$, con k e h positivi perché la funzione è crescente e la derivata seconda è sempre negativa (o più semplicemente perchè si vede dal disegno) quindi da $f(a) = ka+h$, $f(b) = kb+h$, $f(a)+f(b) = k(a+b)+2h \geq k(a+b)+h \geq kc+h$ (perchè $a+b \geq c$), ma la retta sta sopra il grafico di f a destra di b, quindi: $kc+h \geq f(c)$ cioé $f(a)+f(b) \geq f(c)$ che è quello che ci serve.

<u>Soluzione III</u>

Dal fatto che f è crescente sui positivi segue: se $a+b > c$ allora $f(a+b) > f(c)$ cioé: $\frac{a+b}{a+b+1} \geq \frac{c}{c+1}$ cioé: $\frac{a}{a+b+1} + \frac{b}{a+b+1} \geq \frac{c}{c+1}$. Ma allora anche $\frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} \geq \frac{c}{c+1}$.

Esercizio 2. *Dimostrare o confutare che* $d(x,y) \geq 0$ *e* $d(x,y) = d(y,x)$*, sapendo:*

1. $d(a,b) = 0 \iff a = b$;
2. $d(a,c) + d(c,b) \geq d(a,b)\ \forall a, b, c$.

Soluzione

La tesi è falsa. Infatti sia $X = \{a, b\}$ con la "metrica": $d(a,a) = 0$, $d(b,b) = 0$, $d(a,b) = 1$, $d(b,a) = -1$ che verifica entrambe le condizioni richieste, ma non verifica $d(x,y) = d(y,x)$, in più questo non verifica neanche la proprietà: $d(x,y) \geq 0$.

Esercizio 3. *Determinare il numero di componenti connesse del seguente insieme:* $\mathbb{C}^2 \supseteq Y = \{x, y \in \mathbb{C} : x \neq y\}$.

Soluzione

Possiamo porre $Y = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 - S$, dove $\mathbb{C}^2 \supseteq S = \{((x,y),(z,w)) : (x,y) = (z,w),\ x, y, z, w \in \mathbb{R}\}$. Y è connesso perché è connesso per archi, infatti per andare da $((a,b),(c,d))$ ad $((x,y),(z,w))$ intuitivamente si può prima tenere fermo (c,d) e muovere in modo continuo (a,b) fino a (x,y) senza passare per (c,d). (Questo si può fare se $(c,d) \neq (x,y)$, nel caso ciò non fosse vero prima si sposta di un po' (c,d) e poi si fa la stessa cosa). Una volta spostato (a,b) in (x,y) si sposta in modo continuo (c,d) in (z,w) senza passare per (x,y).

Esercizio 4. *Un sottoinsieme* S *di uno spazio topologico* X *viene detto raro se non possiede punti interni. Dimostrare che un chiuso* C *in* X *è raro se e solo è frontiera di un qualche aperto di* X.

Soluzione

- $\Rightarrow$:

  Se C è chiuso e raro, allora C è la frontiera di $X - C$, che è aperto.

  Dimostriamo innanzi tutto che $\overline{X - C} = X$. Infatti $X - \overline{X - C}$ è il complementare di un chiuso, quindi è aperto, ma è contenuto in C quindi $X - \overline{X - C}$ è vuoto perchè C è raro e non contiene aperti diversi dal vuoto. Allora $X = \overline{X - C}$.

  Ricordando che l'interno di un aperto è l'aperto stesso si ha $\partial(X - C) = \overline{(X - C)} - (X \overset{\circ}{-} C) = \overline{(X - C)} - (X - C) = X - (X - C) = C$.

- $\Leftarrow$:

  sia A aperto; sia $\partial A = \overline{A} - \mathring{A} = \overline{A} - A = C$ che è chiuso. Se C non fosse raro allora esisterebbe un punto di C che ha un intero intorno contenuto in C, chiamiamo l'aperto contenuto in questo intorno I. Ma

C è contenuto in $\overline{A}$ che è il più piccolo chiuso che contiene A. Visto che $\overline{A}$ contiene A anche $\overline{A} \cap (X - I) \supseteq A$ (perchè I è contenuto in $\overline{A} - A$), ma $\overline{A} \cap (X - I)$ è un chiuso che contiene A, ed è più piccolo di $\overline{A}$. Assurdo.

Esercizio 5. *Calcolare la cardinalità della famiglia dei chiusi di $\mathbb{R}^n$ nella topologia euclidea.*

Soluzione

Sia τ l'insieme di tutti gli aperti di $\mathbb{R}^n$. La cardinalità di τ (e quindi dell'insieme dei chiusi) è $\aleph_1$, infatti si ha $|\tau| \geq \aleph_1$ perché l'insieme delle bolle di raggio 1 ha cardinalità $\aleph_1$. Per dimostrare che $|\tau| \leq \aleph_1$, notiamo che $\mathbb{R}^n$ ha una topologia a base numerabile (si prenda come base l'insieme delle bolle di centro a coordinate razionali e di raggio razionale) quindi ha una base di cardinalita $\aleph_0$ da ciò segue che $|\tau| \leq \aleph_1$, quindi, per quanto detto prima, $|\tau| = \aleph_1$.

Esercizio 6. *Un sottoinsieme A di uno spazio topologico X viene detto perfetto se e solo se $A = A'$, dove con A' si intende l'insieme dei punti di accumulazione di A (un punto $p \in X$ viene detto di accumulazione per A se ogni aperto di X contenente p contiene un punto $q \in A$ con $p \neq q$). Si provi che ogni sottoinsieme A perfetto di uno spazio topologico X, con X compatto e di Hausdorff, non è numerabile.*

Soluzione

Premettiamo un lemma: se $\{C_i\}_{i \in I}$, dove I è un arbitrario insieme di indici, è una famiglia di compatti in uno spazio di Hausdorff tale che l'intersezione degli elementi di ogni sottofamiglia FINITA è non vuota allora l'intersezione di tutti gli elementi della famiglia è non vuota. Useremo liberamente il lemma, di cui daremo dimostrazione alla fine.

Vogliamo usare il lemma in questo modo: supponiamo di avere un perfetto numerabile P. Mostriamo che si può costruire una successione di intorni compatti dei punti di P che non verifica la tesi del lemma, quindi avremmo trovato l'assurdo. Ordiniamo i punti di P in una successione $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. I punti infatti sono infiniti (basta usare che lo spazio è di hausdorff e ogni punto è di accumulazione). Prendiamo p_1 e p_2, esisteranno un intorno U_1 di p_1 e un intorno I_2 di p_2 che sono aperti e disgiunti perchè P è di Hausdorff. Consideriamo $X - U_1$ e chiamiamolo X_1. X_1 è un chiuso (perchè complementare di un aperto) in un compatto, quindi X_1 è compatto, ed è di Hausdorff. X_1 non contiene p_1 ma contiene p_2. Sia h_1 il più piccolo indice > 2 tale che p_{h_1} appartenga a X_1 (ne esiste 1 perchè X_1 è un intorno di p_2 e p_2 è un punto di accumulazione). Esistono un intorno U_2 di p_2 e un intorno I_{h_1} di p_{h_1} che sono aperti e disgiunti in X. Consideriamo $X - (U_1 \cup U_2)$ e chiamiamolo X_2. X_2 è chiuso in un compatto, quindi X_2 è compatto, ed è di Hausdorff. X_2 non contiene p_i per ogni i inferiore ad h_1, ma contiene

p_{h_1}. Sia h_2 il più piccolo indice $> h_1$ tale che p_{h_2} appartenga a X_2. Esistono (permettetemi un'altra "tiritera" altrimenti temo non si capisca) un intorno U_{h_1} di p_{h_1} e un intorno I_{h_2} di p_{h_2} che sono aperti e disgiunti in X. Consideriamo $X-(U_1 \cup U_2 \cup U_{h_1})$ e chiamiamolo X_{h_1}. X_{h_1} è chiuso in un compatto, quindi X_{h_1} è compatto, ed è di Hausdorff. X_{h_1} non contiene p_i per ogni i inferiore ad h_2 , ma contiene p_{h_2}. Ora è chiaro come si va avanti. Definiamo ora $P, P_1, P_2, P_{h_1}, P_{h_2} \dots$ come intersezione tra X e $X, X_1, X_2, X_{h_1}, X_{h_2} \dots$ rispettivamente. La successione $P, P_1, P_2, P_{h_1}, P_{h_2} \dots$ è una successione di compatti l'uno contenuto dentro l'altro. L'intersezione di un numero finito di essi è diversa dal vuoto, ma l'intersezione di tutti i compatti della successione non contiene nessun p_i quindi è vuota. Assurdo perché contraddice il lemma.

DIMOSTRAZIONE DEL LEMMA:

Sia C_1 il primo compatto della famiglia. Supponiamo per assurdo che nessun punto di C_1 appartenga all'intersezione di tutti i compatti. I compatti sono insiemi chiusi perchè un compatto in uno spazio di Hausdorff è chiuso. Quindi se D_i è il complementare di C_i allora tutti i D_i sono aperti. Più precisamente l'unione di tutti i D_i è un ricoprimento aperto di C_1. Ne estraiamo un ricoprimento finito e consideriamo i rispettivi C_i. Ora $C_1 \cap (\cap C_i)$ sarebbe vuoto. Ma è un intersezione di un numero finito di compatti della famiglia e non dovrebbe essere vuota. Assurdo.

Esercizio 7. *Trovare un insieme perfetto P in uno spazio topologico X che non contenga nessun aperto di X.*

<u>Soluzione</u>

Un insieme che ha questa proprietà è un insieme molto noto per un'altra proprietà che poi esporrò: si chiama INSIEME DI CANTOR, ed è fatto così: dall'intervallo $[0,1]$ si tolga prima l'intervallo $(1/3, 2/3)$, poi per gli intervalli rimanenti (che sono $[0,1/3]$ e $[2/3,1]$) si faccia una cosa simile, cioé si divida l'intervallo in tre parti uguali e si tolga quella in mezzo, lasciando gli estremi e si prosegua con la stessa operazione infinite volte. Questo insieme è perfetto, è facile, infatti, vedere che gli unici elementi che rimangono sono del tipo: $\frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \frac{a_3}{3^3} + \dots$ dove gli a_i sono o 0 o 2. Quindi se x è un elemento dell'insieme preso un qualunque aperto contenente x esso conterrà una bolla di raggio ϵ centrata in x. Ora basta prendere n abbastanza grande in modo che $\frac{2}{3^n}$ sia minore di ϵ. Ora costruiamo un punto che abbia lo stesso sviluppo di x come somma di potenze di 3, ma che differisca da x per l'addendo $\frac{a_n}{3^n}$. Possiamo affermare che la distanza tra questo e x è minore di ϵ quindi x non è isolato. Ora basta mostrare che l'insieme di Cantor è chiuso, ma questo è banale perchè il suo complementare è stato costruito come unione di aperti, quindi l'INSIEME DI CANTOR è perfetto!.

La proprietà di cui parlavo è che l'insieme di Cantor è un esempio di insieme di misura nulla ma che ha la cardinalità del continuo: per verificare che è di misura nulla basta calcolarne la lunghezza come $1-$(lunghezza di tutti i pezzettini che si tolgono) e si tratta di calcolare una semplicissima serie geometrica. Ora utilizziamo quanto detto prima sullo sviluppo come potenze di 3: la cardinalità dell'insieme è $2^{\aleph_0}$ perchè per ogni a_i si hanno 2 scelte, quindi l'insieme ha la cardinalità del continuo.

Esercizio 8. *Dimostrare che D è denso in X se e solo se per ogni A aperto non vuoto di X si ha: $A \cap D \neq \emptyset$.*

Esercizio 9. *X si dice SEPARABILE se esiste un sottoinsieme di X che è numerabile e denso in X (la sua chiusura è tutto X). Dimostrare che se X ammette una base numerabile allora è separabile.*