Allenamenti EGMO 2016 – 3

Esercizio 1. Siano a, b, c le radici del polinomio $x^3 - 17x - 19 = 0$. Quanto vale $a^3 + b^3 + c^3$?

Esercizio 2. Considero $X = \{1, 2, 3, \ldots, 2n-2, 2n-1, 2n\}$. Sia A un sottoinsieme di X con $n+1$ elementi.

1. Dimostrare in A vi sono almeno due numeri coprimi.

2. Dimostrare che in A vi sono almeno due numeri tali che uno divide l'altro.

Esercizio 3. Sia ABC un triangolo. Sia Γ_A il luogo dei punti X tali che $BX/CX = BA/CA$.

- Mostrare che Γ_A è una circonferenza, che chiamiamo *circonferenza di Apollonio* relativa ad A.

Siano ora D e D' rispettivamente i piedi delle bisettrici interna ed esterna relative ad A.

- Mostrare che A, D, D' appartengono a Γ_A.

- Mostrare inoltre che Γ_A è la circonferenza di diametro DD'.

Definiamo ora analogamente Γ_B e Γ_C, le circonferenza di Apollonio relative a B e C.

- Mostrare che Γ_A, Γ_B e Γ_C passano tutte per due punti J e J', che quindi ne determinano l'asse radicale comune.

Esercizio 4. Definiamo la successione dei Fibonacci come $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ e $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ per ogni $n \geq 0$. Dimostrare che ogni intero positivo è rappresentabile in un unico modo come somma finita di numeri di Fibonacci distinti e diversi da F_0 e F_1, in modo che tale somma non contenga mai due numeri di Fibonacci consecutivi (cioè la somma non può contenere due Fibonacci F_n e F_m tali che $|m-n| \leq 1$).

Più precisamente questo vuol dire che per ogni N intero positivo esistono unici $n_1, \ldots, n_k$ interi positivi tali che:

1. $n_i \geq 2$ per ogni $i = 1, \ldots, k$;

2. $n_{i+1} \geq n_i + 2$ per ogni $i = 1, \ldots, k-1$;

3. $N = \sum_{i=1}^{k} F_{n_i}$.