

The 9th Romanian Master of Mathematics Competition

Giorno 2: Sabato 25 Febbraio 2017, Bucharest

Language: Italian

Problema 4. Nel piano cartesiano, siano \mathcal{G}_1 e \mathcal{G}_2 i grafici delle funzioni quadratiche $f_1(x) = p_1x^2 + q_1x + r_1$ e $f_2(x) = p_2x^2 + q_2x + r_2$, dove $p_1 > 0 > p_2$. I grafici \mathcal{G}_1 e \mathcal{G}_2 si intersecano nei punti A e B , distinti fra loro. Le quattro rette tangenti a \mathcal{G}_1 e \mathcal{G}_2 in A e in B determinano un quadrilatero convesso che ha una circonferenza inscritta.

Dimostrare che i grafici \mathcal{G}_1 e \mathcal{G}_2 hanno lo stesso asse di simmetria.

Problema 5. Fissiamo un intero $n \geq 2$. Un *crivello* $n \times n$ è una scacchiera $n \times n$ in cui n caselle sono state rimosse, in modo che in ogni riga e in ogni colonna sia stata rimossa esattamente una casella. Un *tassello* è una scacchiera $1 \times k$ o $k \times 1$ per qualche intero positivo k . Per ogni crivello A , sia $m(A)$ il minimo numero di tasselli necessari per partizionare A .

Trovare tutti i valori possibili di $m(A)$, al variare di A fra tutti i possibili crivelli $n \times n$.

Problema 6. Sia $ABCD$ un quadrilatero convesso e siano P, Q, R, S punti sui segmenti AB, BC, CD e DA rispettivamente. I segmenti PR e QS suddividono $ABCD$ in quattro quadrilateri, ognuno dei quali ha le diagonali perpendicolari tra loro.

Dimostrare che i punti P, Q, R, S sono conciclici.

Ogni problema vale 7 punti.

Il tempo a disposizione è di 4 ore e 30 minuti.