

Si vuole dimostrare che data l'equazione $x^2 - 2y^2 = 1$ è tale che se esistono due soluzioni intere di essa a e b allora l'equazione $(a + \sqrt{N}b)^2 = c + \sqrt{N}d$ con c e $d \in \mathbb{N}$ è tale che c e d sono soluzioni della prima equazione; è ovvio che questo implica esistano infinite soluzioni intere alla prima equazione. Per ipotesi possiamo dire

$$b = \sqrt{\frac{a^2-1}{N}} \text{ ne segue che } (a + \sqrt{N}b)^2 = a^2 + 2a\sqrt{a^2-1} + a^2 - 1 = 2a^2 - 1 + 2ab\sqrt{N},$$

ora ponendo $c = 2a^2 - 1$ e $d = 2ab = 2a \frac{\sqrt{a^2-1}}{\sqrt{N}}$ si ha

$c^2 - Nd^2 = 4a^4 - 4a^2 + 1 - 4a^4 + 4a^2 = 1$ che è quanto si voleva dimostrare. Ora per il mio problema interessava il caso particolare di $N=2$ per ogni k naturale e bastava la condizione che l'esponente m di $(a + \sqrt{N}d)^m$ fosse 2. Difatti è una condizione sufficiente all'infinità dei triangolari coincidenti con quadrati perfetti. Ma EvaristeG ci ha posto un problema molto più generale e interessante ovvero che m è un qualsiasi numero naturale. Faccio notare che la dimostrazione per 2 implica quella per 2^k per ogni k naturale e che per la stessa ragione basterebbe dimostrarlo per ogni m primo, ma non vedo come questo semplifichi le cose. Quindi a meno che non ci siano altri, invito te EvaristeG a risolvere l'enigma. Non aspetto altro...