

Algebra

1. Siano a, b, c numeri reali positivi. Dimostrare che

$$\left(1 + \frac{a}{b}\right) \left(1 + \frac{b}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{a}\right) \geq 2 \left(1 + \frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\right).$$

2. Determinare la più grande costante k tale che

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2} \geq k \left(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d} + \sqrt{e}\right)^2$$

per ogni quintupla di numeri reali positivi a, b, c, d, e tali che $a + b = c + d + e$.

3. Sia m un intero positivo, e sia a_n la successione definita per ricorrenza da

$$a_0 = \frac{m}{2}, \quad a_{n+1} = a_n \lceil a_n \rceil,$$

dove $\lceil a_n \rceil$ indica il più piccolo intero maggiore od uguale di a_n .

- (a) Determinare tutti gli interi m per cui il primo intero che compare nella successione è a_{2008} .
- (b) Determinare tutti gli interi m per cui nessun numero intero compare nella successione.

Combinatoria

1. Hanna e Barbera sono 2 prestigiatori (questi sono i loro nomi d'arte, nella realtà si chiamano Alberto e Barbara) che hanno in mente di presentare il seguente gioco.

Uno spettatore scrive una sequenza di n cifre (decimali) senza farle vedere a Barbera. Successivamente Hanna, sempre di nascosto da Barbera, cancella 2 cifre consecutive nel numero scritto dallo spettatore. A questo punto Barbera vede il numero con le 2 cifre occultate e, pronunciate le magiche parole, indovina le 2 cifre coperte (nel giusto ordine).

Determinare per quali n i 2 maghi possono concordare una strategia in modo che il gioco riesca sempre.

2. Sono date 100 cassette, ciascuna delle quali contiene mele e arance, in quantità e proporzioni variabili. Determinare il più piccolo intero n con questa proprietà: comunque siano ripartite le mele e le arance, è sempre possibile scegliere n cassette in modo che queste, complessivamente, contengano almeno un terzo delle mele ed almeno un terzo delle arance.
3. Consideriamo una scacchiera 19×19 . Un *cavallone* è un pezzo che si sposta sulla scacchiera compiendo delle "L" del tipo " $4 + 1$ ", ottenute cioè muovendosi di 4 caselle in una direzione e quindi di una casella in una direzione perpendicolare (il cavallo standard invece compie delle L del tipo " $2 + 1$ ").
 - (a) Dimostrare che un cavallone può visitare tutte le caselle della scacchiera.
 - (b) Siano V la casella posta in un vertice, A una delle 2 caselle ad essa adiacenti, V' la casella posta nel vertice opposto a V . Determinare il minimo numero di mosse necessario per portare un cavallone da A a V' .

Geometria

1. Sia ABC un triangolo acutangolo non isoscele. Sia XY il diametro della circonferenza circoscritta perpendicolare al lato BC , e sia M il punto d'incontro tra XY e BC . Supponiamo di aver nominato i punti in modo tale che $YM > XM$. Sia Z il simmetrico di X rispetto ad M , e sia W il punto medio di AZ .

(a) Dimostrare che W sta sulla circonferenza di Feuerbach di ABC .

(b) Dimostrare che MW è perpendicolare ad AY .

2. Sia ABC un triangolo con incentro I . Sia Γ una circonferenza avente centro in I , raggio maggiore del raggio della circonferenza inscritta, e non passante per nessuno dei vertici del triangolo. Sia X_1 l'intersezione tra Γ e la retta AB più vicina a B . Siano X_2 e X_3 le intersezioni tra Γ e la retta BC , con X_2 più vicino a B . Sia X_4 l'intersezione tra Γ e la retta CA più vicina a C . Sia infine K l'intersezione tra le rette X_1X_2 e X_3X_4 .

Dimostrare che AK passa per il punto medio di X_2X_3 .

3. Sia O il circocentro di un triangolo ABC . La retta BO incontra il lato AC in B' . La retta CO incontra il lato AB in C' . La retta $B'C'$ incontra la circonferenza circoscritta ad ABC in P e Q .

Dimostrare che $AP = AQ$ se e solo se $AB = AC$.

Teoria dei Numeri

1. Sia n un intero positivo tale che $(n, 2(2^{1386} - 1)) = 1$. Sia $\{a_1, a_2, \dots, a_{\varphi(n)}\}$ un sistema fondamentale di residui modulo n (cioè gli a_i non hanno fattori primi in comune con n e rappresentano tutte classi di resto diverse modulo n).

Dimostrare che n divide

$$a_1^{1386} + a_2^{1386} + \dots + a_{\varphi(n)}^{1386}.$$

2. (a) Sia d un intero positivo dispari, e sia $n = 2^{2008}d + 1$. Dimostrare che $2^{n-1} + 1$ non è multiplo di n .
(b) Determinare tutti gli interi positivi n tali che

$$n \mid (2^{n-1} + 1).$$

3. (a) Determinare se esiste un insieme X , costituito da 2008 interi positivi distinti, tale che per ogni sottoinsieme non vuoto $Y \subseteq X$ la media aritmetica degli elementi di Y è una potenza perfetta (cioè si scrive nella forma a^b per una qualche scelta degli interi $a > 1$ e $b > 1$).
(b) Determinare se è possibile fare in modo che anche le medie geometriche siano potenze perfette.
(c) Determinare se esiste un insieme X , costituito da infiniti interi positivi distinti, tale che per ogni sottoinsieme non vuoto $Y \subseteq X$ la media aritmetica degli elementi di Y è una potenza perfetta.