Allenamenti EGMO 2018 – 7

Problemi

A1. Sia $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ un polinomio a coefficienti razionali di grado n. Sapendo che esiste $m_0 \in \mathbb{N}$ tale che per ogni intero $m > m_0$ anche $p(m)$ è intero, dimostrare che $n!a_n$ è intero.

C2. Alberto e Barbara fanno il seguente gioco. Inizialmente Alberto sceglie una parola, cioè una stringa non vuota di lettere maiuscole. A questo punto Barbara sceglie un intero $k \geq 0$ e sfida Alberto a fornire una parola con esattamente k sottosequenze uguali alla parola scelta inizialmente da Alberto. Alberto vince se riesce a costruire una tale parola, altrimenti perde.

Per esempio, se Alberto sceglie la parola "GST" e Barbara sceglie $k = 5$, allora Alberto può fornire in risposta la parola "GSGSST", che ha 5 sottosequenze uguali a "GST".

Quali sono le parole che Alberto può scegliere affinché vinca a prescindere dal valore k scelto da Barbara?

(Le sottosequenze di una stringa di lunghezza n sono le 2^n stringhe formate cancellando alcuni dei suoi caratteri - eventualmente tutti o nessuno - preservando l'ordine dei caratteri rimanenti.)

G3. Sia ABC un triangolo con baricentro G. La circonferenza circoscritta ad ABG interseca la retta BC in B e in X. La circonferenza circoscritta ad ACG interseca la retta BC in C e in Y. Dimostrare che G è anche baricentro di AXY.

N4. Sia n un intero positivo e sia p un numero primo. Siano a, b, c interi (non necessariamente positivi) tali che $a^n + pb = b^n + pc = c^n + pa$. Dimostrare che $a = b = c$.