

Allenamenti EGMO 2018 – 9

Problemi

A1. Determinare tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tali che

$$f(f(x))(x - f(y)) + 2xy = f(x)f(x + y)$$

per ogni $x, y \in \mathbb{R}$.

C2. Siano $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ e $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ due insiemi di numeri reali positivi tali che:

- a_1, \dots, a_n non sono tutti uguali tra loro, e neanche b_1, \dots, b_n ;
- $\{a_1, \dots, a_n\}$ può essere partizionato in due insiemi con la stessa somma, e così pure $\{b_1, \dots, b_n\}$.

Dimostrare che esiste un $2n$ -agono semplice (cioè senza autointersezioni) con i lati paralleli agli assi cartesiani, in cui i lati orizzontali sono lunghi a_1, \dots, a_n (in qualche ordine) e i lati verticali sono lunghi b_1, \dots, b_n (in qualche ordine).

G3. Sia ABC un triangolo acutangolo, con $AB < AC < BC$, inscritto in una circonferenza Γ . Sia D il piede della bisettrice uscente da A . L'asse del segmento AD interseca Γ in K ed L , dove K appartiene all'arco AB non contenente C . La circonferenza di centro K passante per A interseca Γ nuovamente in T e la circonferenza di centro L passante per A interseca Γ nuovamente in S .

Dimostrare che D è l'incentro del triangolo AST .

N4. Trovare tutti gli interi $n \geq 2$ tali che per ogni coppia di divisori positivi $a, b < n$ almeno uno tra $2a - b$ e $2b - a$ è un divisore (non necessariamente positivo) di n .