Geometria – **Problemi di ammissione**

1. I punti D ed E giacciono sui segmenti AB e AC di un triangolo ABC in modo che $DE \parallel BC$. Siano O_1 e O_2 rispettivamente i circocentri dei triangoli ABE e ACD. La retta O_1O_2 incontra AC in P e AB in Q. Sia O il circocentro del triangolo APQ e M l'intersezione di AO con BC.

   Mostrare che M è il punto medio di BC.

2. Sia H l'ortocentro di un triangolo ABC. Siano M e N rispettivamente i punti medi di AB e AC. Assumiamo che H giaccia all'interno del quadrilatero $BMNC$ e che le circonferenze circoscritte ai triangoli BMH e CNH siano tangenti a vicenda. La retta per H e parallela a BC interseca le circonferenze circoscritte ai triangoli BMH e CNH rispettivamente in K e L. Sia F l'intersezione di MK e NL e sia J l'incentro del triangolo MHN.

   Mostrare che $FJ = FA$.

3. Sia $ABCD$ un quadrilatero inscritto in una circonferenza ω e sia P l'intersezione di AC e BD. I punti E e F giacciono rispettivamente su AB e CD in modo che $\angle APE = \angle DPF$. Sia ω_1 la circonferenza tangente alla circonferenza circoscritta al triangolo PEF in P e tangente a ω in un punto X. Sia ω_2, analogamente, la circonferenza tangente alla circonferenza circoscritta al triangolo PEF in P e tangente a ω in un punto Y.

   Mostrare che

   $$\frac{EX}{EY} = \frac{FX}{FY}$$