

Allenamenti EGMO 2019 – 2

1.1 Problemi

A1. Siano a, b, c reali positivi tali che $abc = 1$. Mostrare che $a + b + c \leq a^2 + b^2 + c^2$

C2. Sia A un sottoinsieme di 101 elementi di $S = \{1, 2, 3, \dots, 1000000\}$. Mostrare che esistono $t_1, \dots, t_{100} \in S$ tali che gli insiemi $A_j = \{x + t_j | x \in A\}$ siano a due a due disgiunti.

G3. Sia ABC un triangolo inscritto in una semicirconferenza di centro O e diametro BC . Le due tangenti alla semicirconferenza in A e B si intersecano in D . Dimostrare che la retta DC interseca l'altezza AH del triangolo ABC nel suo punto medio.

N4. Sia $p > 3$ un numero primo e sia

$$S = \sum_{2 \leq i < j < k \leq p-1} ijk$$

Dimostrare che $S + 1$ è divisibile per p .