

## Allenamenti EGMO 2019 – 3

### 1.1 Problemi

**A1.** Usando l'identità  $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$  dimostrare che, dati  $a_1, a_2, \dots, a_n$  interi positivi distinti vale:

$$\sum_{i=1}^n (a_i^7 + a_i^5) \geq 2 \left( \sum_{i=1}^n a_i^3 \right)^2.$$

**C2.** In una galassia lontana c'è un pianeta famoso per aver sviluppato 2019 diverse lingue. Su questo pianeta vivono  $3 \times 2019!$  alieni e sappiamo che ogni coppia di alieni dialoga in esattamente una di queste lingue. Dimostrare che ci sono 3 alieni che comunicano tra loro con la stessa lingua.

**G3.** Sia  $\triangle ABC$  un triangolo: sia  $\Gamma$  la circonferenza circoscritta,  $O$  il circocentro e  $G$  il baricentro. Supponiamo che  $GO$  sia perpendicolare a  $AG$ . Sia  $A'$  la seconda intersezione di  $AG$  con  $\Gamma$ . Sia  $D$  l'intersezione dei segmenti  $CA'$  e  $AB$ , e sia  $E$  l'intersezione di  $BA'$  e  $AC$ . Dimostrare che il circocentro del triangolo  $\triangle ADE$  appartiene a  $\Gamma$ .

**N4.** Dati  $a, b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  coprimi e una funzione  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tali che

$$\begin{cases} f(x+a) \leq f(x) + a \\ f(x+b) \geq f(x) + b \end{cases}$$

Dimostrare che  $f(x+1) = f(x) + 1$