Allenamenti EGMO 2019

Il Team Allenamenti EGMO

Indice

1 Primo allenamento

1.1 Problemi

A1 Siano a, b, c interi diversi da 0 tali che

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \in \mathbb{N}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a} \in \mathbb{N}.$$

Dimostrare che $|a| = |b| = |c|$.

C1 Alice ama mischiare mazzi di carte e questa volta ha inventato un gioco particolare. Prende un mazzo di carte numerate da 1 a 52 e le ordina. Poi divide il mazzo in due metà, in modo che il primo mazzo sia formato dalle prime 26 e il secondo dalle ultime 26, e le mischia così: la prima carta del secondo mazzo, la prima carta del primo mazzo, la seconda carta del secondo mazzo, la seconda carta del primo mazzo... e così via, alternando i mazzetti e prendendo ogni volta la prima carta. Dopo aver mischiato la prima volta le carte allora saranno in quest'ordine $27, 1, 28, 2, \ldots, 51, 25, 52, 26$.
Allora Alice divide ancora il mazzo in due mazzetti da 26 e mischia ancora le carte, seguendo la stessa regola. Quante volte in totale dovrà mischiare in questo modo le carte per averle nuovamente ordinate da 1 a 52?

G1 Costruiamo esternamente ai lati AB ed AC di un triangolo ABC dei semicerchi (di diametro AB ed AC rispettivamente). Tracciata la tangente comune, siano P e Q i punti di tangenza (P sull'arco AB e Q sull'arco AC). Chiamata X la proiezione di Q su BC e sapendo che l'angolo $\angle PBC$ è retto, dimostrare che il triangolo ABX è isoscele.

N1 Determinare tutte le coppie (x, y) di numeri naturali tali che $x + y$, $x + 2y$ e $2x + y$ sono quadrati perfetti.

1.2 Soluzioni

Soluzione di A1: Consideriamo il polinomio

$$p(x) = \left(x - \frac{a}{b}\right)\left(x - \frac{b}{c}\right)\left(x - \frac{c}{a}\right) = x^3 - \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right)x^2 + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a}\right)x - 1$$

è un polinomio monico a coefficenti interi con radici $\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{a} \in \mathbb{Q}$: quindi per il *criterio della radice razionale* le sue radici sono intere e divisori del termine noto, che in questo caso è 1.

Da questo segue immediatamente che $\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{a} \in \{-1, 1\} \Rightarrow |a| = |b| = |c|$.

Soluzione di C1: Sia $p_k(i)$ la posizione della carta i-esima dopo aver mischiato il mazzo k volte: vale $p_0(i) = i$. Cerchiamo il minimo numero di mosse m tali che $p_m(i) = i$ per ogni i.

Dimostriamo per induzione su i che $p_1(i) \equiv 2i \pmod{53}$.

- Passo Base: Consideriamo due passi base:

  $i = 1$ dopo una mossa la carta 1 finisce nella posizione 2 e la tesi è vera.

  $i = 27$ dopo una mossa la carta 27 finisce nella posizione $1 \equiv 2(26 + 1) \pmod{53}$ e la tesi è vera.
- Passo Induttivo: Supponiamo che la tesi sia vera per $i - 1$ e dimostriamola per i. Sappiamo che $p_1(i - 1) \equiv 2(i - 1) \pmod{53}$, e che per tutti gli i tranne $i = 27$(già trattato nel passo base), si ha che: $p_1(i + 1) = p_1(i) + 2$.
  Quindi $p_1(i + 1) \equiv 2i + 2 \equiv 2(i + 1) \pmod{53}$

Si dimostra facilmente che dopo k mosse $p_k(i) \equiv 2^k i \pmod{53}$.

Stiamo quindi cercando il più piccolo esponente m tale che $2^m i \equiv i \pmod{53} \iff 2^m \equiv 1 \pmod{53}$ (perchè 53 è primo, quindi esiste l'inverso di ogni $i \neq 0$).
Dobbiamo determinare $m = ord_{53}(2)$. Per il teorema di Fermat si ha $ord_{53}(2) \mid \phi(53) = 52$. Osserviamo però $2^4 = 16 \not\equiv 1 \pmod{53}$ e $2^{26} \equiv (2^6)^4 \times 4 \equiv (11)^4 \times 4 \equiv (121)^2 \times 4 \equiv 15^2 \times 4 \equiv 13 * 4 \equiv 52 \equiv -1 \pmod{53}$ e poichè 4 e 26 sono divisori massimali di 52, l'unica possibilità è che l'ordine di 2 modulo 53 sia 52.

Quindi il numero di mosse necessarie per tornare alla configurazione iniziale è 52.

Soluzione di G1: Dimostriamo preliminarmente in un lemma una proprietà generale delle tangenti comuni delle circonferenze.

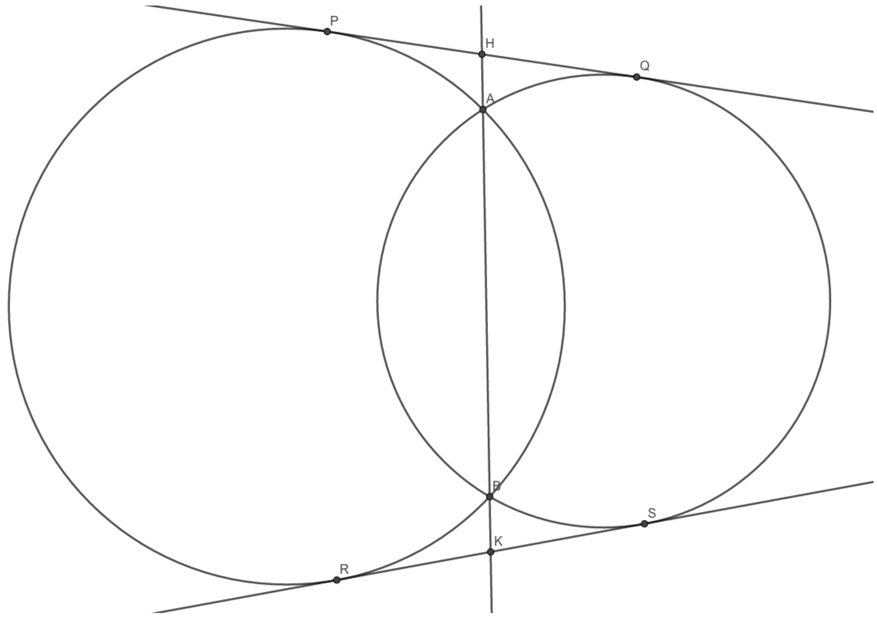
Lemma 1. Date due circonferenze che si intersecano nei punti A e B, tracciata la tangente comune nei punti P e Q, e detta H l'intersezione di questa retta con l'asse radicale, vale $PH = HQ$.
Dimostrazione
Per il teorema della tangente vale che

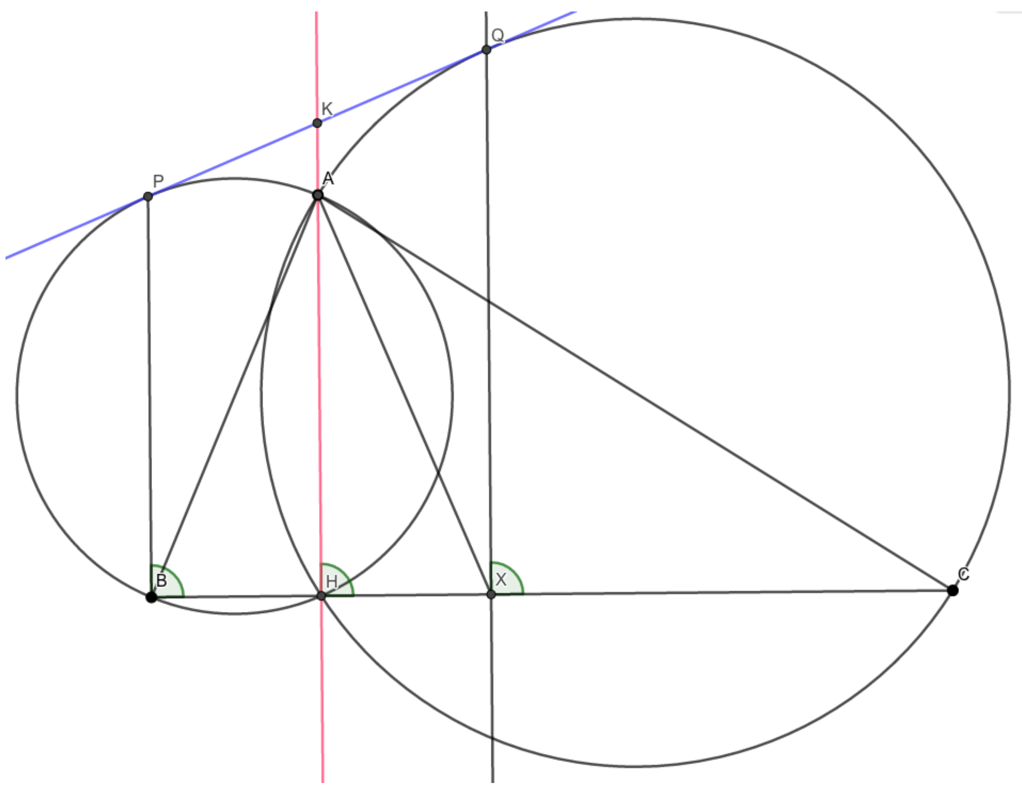
$$PH^2 = HA \cdot HB$$

e analogamente, sempre per lo stesso teorema:

$$HQ^2 = HA \cdot HB$$

da cui segue immediatamnte che $PH = HQ$.





Riprendiamo ora la dimostrazione del problema: definiamo H il piede dell'altezza di $\triangle ABC$ su BC e sia K l'intersezione di AH con PQ. Dato che, per definizione $\angle AHS$ è retto, H appartiene alla circonferenza che ha per diametro AC, sia essa Γ_1, e per analoghe ragioni appartiene anche alla circonferenza che ha per diametro AB, che chiameremo Γ_2. Allora, AH è l'asse radicale delle circonferenze Γ_1 e Γ_2, e dunque, per il lemma prima dimostrato, si ha $PK = KQ$. Osservando infine che le tre rette PB, KH e QX sono parallele perchè tutte perpendicolari alla retta BC, e applicando il teorema di Talete considerando le secanti AC

e PQ si ottiene che $BH = HX$. Ma allora, nel triangolo $\triangle ABX$ si ha che l'altezza AH è anche mediana e questo conclude.

Soluzione di N1: Osserviamo che i residui quadratici modulo 4 sono solamente 0 ed 1, dunque, ciascuna delle espressioni $x + y$, $x + 2y$ e $2x + y$ deve essere congrua a 0 o a 1 in modulo 4. Da questa osservazione si ottiene facilmente che sia x che y sono congrui a 0 modulo 4; infatti separando i due casi:
$x + y \equiv 0 \pmod 4$: sottraendo la prima espressione alle altre due si ottiene che, se $x + 2y \equiv i$ e $2x + y \equiv j$ (con $i, j \in \{0, 1\}$), $y \equiv i$ e $x \equiv j$ in modulo 4; ma dato che $0 \leq i + j \leq 2$ $x + y \equiv i + j \equiv 0$ se e solo se $i = j = 0$.
$x + y \equiv 1 \pmod 4$: utilizzando la medesima notazione si ottiene che $y \equiv i - 1$ e $x \equiv j - 1$, da cui $-2 \leq (i - 1) + (j - 1) \leq 0$ mentre $x + y \equiv (i - 1) + (j - 1) \equiv 1$ che ci porta ad un assurdo, dunque non ci possono essere soluzioni in questo caso.
Dato che sia x sia y sono multipli di 4 posso scrivere $x = 4^k a$ e $y = 4^k b$, con $a, b, k \in \mathbb{N}$ e $k > 0$ tale che 4^k sia la più alta potenza che divida sia x che y; dunque $x + y = 4^k a + 4^k b$, $x + 2y = 4^k a + 4^k \cdot 2b$ e $2x + y = 4^k \cdot 2a + 4^k b$, per cui, raccogliendo un fattore 4^k in ciascun termine, si ha che anche $a + b$, $a + 2b$ e $2a + b$ sono quadrati perfetti. Ma allora a e b sono entrambi divisibili per 4, che dà un assurdo per come era stato definito k, a meno che non sia $x = 0$ ed $y = 0$, che rimane dunque l'unica possibile soluzione.

2 Secondo allenamento

2.1 Problemi

A2 Siano a, b, c reali positivi tali che $abc = 1$. Mostrare che $a + b + c \leq a^2 + b^2 + c^2$

C2 Sia A un sottoinsieme di 101 elementi di $S = \{1, 2, 3, \dots, 1000000\}$. Mostrare che esistono $t_1, \dots, t_{100} \in S$ tali che gli insiemi $A_j = \{x + t_j | x \in A\}$ siano a due a due disgiunti.

G2 Sia $\triangle ABC$ un triangolo iscritto in una semicirconferenza di centro O e diametro BC. Le due tangenti alla semicirconferenza in A e in B si intersecano in D. Dimostrare che la retta DC interseca l'altezza AH del triangolo $\triangle ABC$ nel suo punto medio.

N2 Sia $p > 3$ un numero primo e sia

$$S = \sum_{2 \leq i < j < k \leq p-1} ijk$$

Dimostrare che $S + 1$ é divisibile per p.

2.2 Soluzioni

Soluzione di A2: Per prima cosa applichiamo la disuguaglianza tra le medie AM e GM sulla terna (a^2, b^2, c^2), da cui si ottiene:

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{3} \geq \sqrt[3]{a^2b^2c^2} = 1 \tag{1}$$

dove si é usata l'ipotesi $abc = 1$.
Ora applichiamo $AM - QM$ sulla terna (a, b, c):

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} \geq \frac{a+b+c}{3} \tag{2}$$

e dato che dalla 1 si ha $\frac{a^2+b^2+c^2}{3} \geq 1$ allora vale:

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{3} \geq \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} \geq \frac{a+b+c}{3} \tag{3}$$

dove la seconda disuguaglianza é data dalla (2), e moltiplicando da ambo le parti per 3 si ha la tesi.

Soluzione di C2: *Prima soluzione:* la prima soluzione procede in modo induttivo: supponiamo di aver scelto $t_1, \ldots, t_k$ che soddisfano le ipotesi con $k \leq 99$ e cerchiamo t_{k+1}. Gli unici valori che siamo obbligati a escludere per t_{k+1} sono quelli della forma $t_i + a_j - a_l$, dove $1 \leq i \leq k$ e $a_j, a_l \in A$. Dunque abbiamo $k \cdot 101 \cdot 100$ valori proibiti per a_{k+1} nel caso in cui a_j e a_l siano distinti, oltre ad altri k valori proibiti corrispondenti al caso in cui $a_j = a_l$. Dunque ci sono al più $99 + 99 \cdot 100 \cdot 101 = 100 \cdot (1 + 99 \cdot 101) - 1 = 1000000 - 1$ valori proibiti e rimane almeno un valore possibile per t_{100}.
Seconda soluzione: La seconda soluzione permette di giungere a una stima più raffinata e passa attraverso un approccio algoritmico. L'osservazione chiave é che non si possono scegliere t_i, t_j tale che esistano $a_h, a_k \in A$ per cui valga:

$$t_i - t_j = a_h - a_k$$

Definiamo quindi:

$$D \coloneqq \{a_i - a_j | a_i, a_j \in A\} \cup \{0\}$$

e osserviamo che ha cardinalità al più 5051.
Sia ora $S_0 = S$, $t_1 = \min S$ e induttivamente:

$$\begin{aligned} S_i &= S_{i-1} \setminus (D + t_i) \\ t_{i+1} &= \min S_i \end{aligned}$$

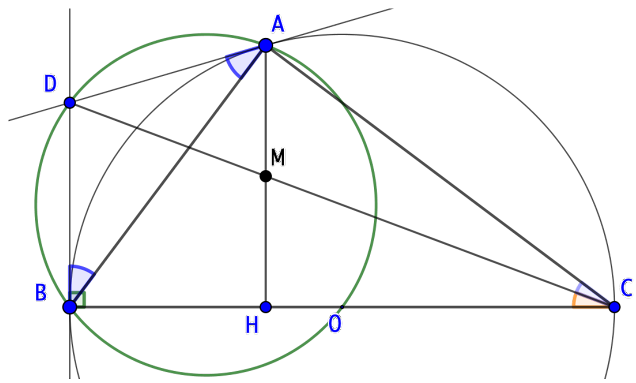
con $i \leq 100$, cioè si decide di scegliere prima $t_1 = 1$, poi di prendere t_2 come il minimo dell'insieme ottenuto eliminando da S tutti i numeri che sono proibiti per aver scelto $t_1 = 1$, (che é proprio $D + t_1$); a questo punto si vorrebbe scegliere t_3 tra i valori di S_1 permessi, e dunque bisogna cancellare da quest'ultimo tutti i valori dell'insieme $D + t_2$, e via dicendo. Con questa scelta si eliminano al massimo $5051 \cdot 100 = 505100$ valori di S che però ha cardinalità $1000000 > 505100$, e quindi la scelta é possibile.

Soluzione di G2:

Lemma 2 (della Mediana)**.** Sia $\triangle ABC$ un triangolo e M il punto medio del lato BC. Allora

$$\sin \widehat{BAM} \cdot AB = AC \cdot sin\widehat{MAC}$$

Dim. (Hint: usa il teorema dei seni sui triangolui $\triangle ABM$ e $\triangle MAC$) □



Osserviamo per prima cosa che DA è perpendicolare a OA e DB è perpendicolare a OB (DA e DB sono tangenti alla circonferenza di centro O rispettivamente in A e in B).
Inoltre, $\widehat{DAB} = \widehat{ACB} = \widehat{DBA} = \gamma$, perchè angoli alla circonferenza che insistono sul lato BC.

Sia M il punto d'intersezione fra AH e DC.

Usando il lemma della mediana sul triangolo $\triangle ACH$, per dimostrare che M è il punto medio di AH basta far vedere che:

$$\frac{\sin \widehat{ACM}}{\sin \widehat{MCH}} = \frac{CH}{AC}$$

Osserviamo $\widehat{MCH} = \widehat{DCB}$ e poiché il triangolo $\triangle DBC$ è rettangolo (DB è perpendicolare a OB perchè tangente in B alla circonferenza), allora $\sin \widehat{DCB} = \frac{DB}{DC}$

D'altra part:$\widehat{ACM} = \widehat{ACD}$ e per il teorema dei seni sul triangolo $\triangle ADC$ vale:

$$\frac{\sin \widehat{ACD}}{DA} = \frac{\sin \widehat{DAC}}{DC} = \frac{\sin 90° + \gamma}{DC} = \frac{\cos \gamma}{DC}$$

dove $\cos \gamma = \cos \widehat{ACB} = \frac{CH}{AC}$

Allora

$$\frac{\sin \widehat{ACM}}{\sin \widehat{MCH}} = \cdot \frac{\cos \gamma \cdot DA}{DC} \frac{DC}{DB} = \cos \gamma = \frac{CH}{AC}$$

Soluzione di N2: Consideriamo

$$\left(\sum_{i=2}^{p-1} i \right)^3 = \sum_{i=2}^{p-1} i^3 + 3 \sum_{\substack{i,j=2 \\ i \neq j}}^{p-1} i^2 j + 6 \sum_{2 \leq i < j < k \leq p-1} ijk \tag{4}$$

Analizziamo i termini che compaiono nell'uguaglianza:

- $\sum_{i=2}^{p-1} i = 2^{-1} \cdot p(p-1) - 1 \equiv -1 \pmod p$, dove 2^{-1} esiste perché $p > 3$ è coprimo con 2;
- $\sum_{i=2}^{p-1} i^3 = (2^{-1} \cdot p(p-1))^3 - 1^3 \equiv -1 \pmod p$;
- $\sum_{\substack{i,j=2 \\ i\neq j}}^{p-1} i^2 j = \sum_{i=2}^{p-1} i^2 (\sum_{\substack{j=2 \\ j\neq i}}^{p-1} j) \equiv \sum_{i=2}^{p-1} i^2 \cdot (-1-i) \equiv -\sum_{i=2}^{p-1} i^2 - \sum_{i=2}^{p-1} i^3$.
  Ora: $\sum_{i=2}^{p-1} i^2 \equiv (6^{-1}(p-1)(p)(2p-1)) - 1^2 \equiv -1 \pmod p$ (dove esiste l'inverso di 6 perché $p > 3$, quindi coprimo con 6) e $\sum_{i=2}^{p-1} i^3 \equiv -1 \pmod p$ per quanto detto sopra. Quindi $\sum_{\substack{i,j=2 \\ i\neq j}}^{p-1} i^2 j \equiv 2 \pmod p$;
- $6 \sum_{2 \leq i < j < k \leq p-1} ijk = 6S$.

Quindi guardando l'equazione 4 modulo p troviamo:

$$(-1)^3 \equiv -1 + 3 \cdot 2 + 6S \pmod p \tag{5}$$
$$6S + 6 \equiv 0 \pmod p \tag{6}$$

e poiché $(6, p) = 1$, questo conclude che $S + 1 \equiv 0 \pmod p$

3 Terzo allenamento

3.1 Problemi

A3 Usando l'identità $1^3 + 2^3 + \cdots n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ dimostrare che, dati $a_1, a_2, \ldots, a_n$ interi positivi distinti vale:

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i^7 + a_i^5) \geq 2 \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^3 \right)^2 .$$

C3 In una galassia lontana c'è un pianeta famoso per aver sviluppato 2019 diverse lingue. Su questo pianeta vivono $3 \times 2019!$ alieni e sappiamo che ogni coppia di alieni dialoga in esattamente una di queste lingue. Dimostrare che ci sono 3 alieni che comunicano tra loro con la stessa lingua.

G3 Sia $\triangle ABC$ un triangolo: sia Γ la circonferenza circoscritta, O il circocentro e G il baricentro. Supponiamo che GO sia perpendicolare a AG. Sia A' la seconda intersezione di AG con Γ. Sia D l'intersezione dei segmenti CA' e AB, e sia E l'intersezione di BA' e AC.
Dimostrare che il circocentro del triangolo $\triangle ADE$ appartiene a Γ.

N3 Dati $a, b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ coprimi e una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{cases} f(x+a) \leq f(x) + a \\ f(x+b) \geq f(x) + b \end{cases}$$

Dimostrare che $f(x+1) = f(x) + 1$

3.2 Soluzioni

Soluzione di A3: Dimostriamo la tesi per induzione su n.
Passo base: nel caso $n = 1$, per $AM - GM$ si ha immediatamente che

$$\frac{a_1^7 + a_1^5}{2} \geq \sqrt{a_1^{12}} = a_1^6$$

che conclude il passo base.
Passo induttivo: supponiamo che la disuguaglianza sia vera per una qualunque $n-$upla di interi positivi e mostriamo che vale anche per una $(n+1)-$upla. Senza perdita di generalità possiamo supporre che gli a_i siano ordinati in ordine crescente $a_1 < \ldots < a_{n+1}$.
Dall'ipotesi induttiva segue che

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1}(a_i^7 + a_i^5) &= \sum_{i=1}^{n}(a_i^7 + a_i^5) + a_{n+1}^7 + a_{n+1}^5 \geq \\ &\geq 2 \cdot \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i^3\Big)^2 + a_{n+1}^7 + a_{n+1}^5\end{aligned}$$

e se dimostrassimo che:

$$2 \cdot \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i^3\Big)^2 + a_{n+1}^7 + a_{n+1}^5 \geq 2 \cdot \Big(\sum_{i=1}^{n+1} a_i^3\Big)^2$$

si avrebbe la tesi.
Ora, riarrangiando la disuguaglianza sopra e con qualche passaggio algebrico ci si riduce a voler dimostrare:

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}^7 + a_{n+1}^5}{2} &\geq \Big(\sum_{i=1}^{n+1} a_i^3 - \sum_{i=1}^{n} a_i^3\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n+1} a_i^3 + \sum_{i=1}^{n} a_i^3\Big) \\ &= a_{n+1}^3\Big(a_{n+1}^3 + 2\sum_{i=1}^{n} a_i^3\Big)\end{aligned}$$

ossia, essendo $a_{n+1} > 0$:

$$\frac{a_{n+1}^2(a_{n+1}^2 + 1)}{2} \geq a_{n+1}^3 + 2\sum_{i=1}^{n} a_i^3$$

Osserviamo però che per il primo termine di quest'ultima disuguaglianza vale, usando la formula per la somma dei primi n cubi:

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}^2(a_{n+1}^2 + 1)}{2} + a_{n+1}^3 &= \frac{a_{n+1}^2(a_{n+1} + 1)^2}{2} = \\ &= 2\sum_{k=1}^{a_{n+1}} k^3\end{aligned}$$

da cui la tesi risulta dimostrata se é vero che:

$$2\sum_{k=1}^{a_{n+1}} k^3 \geq 2a_{n+1}^3 + 2\sum_{i=1}^{n} a_i^3$$

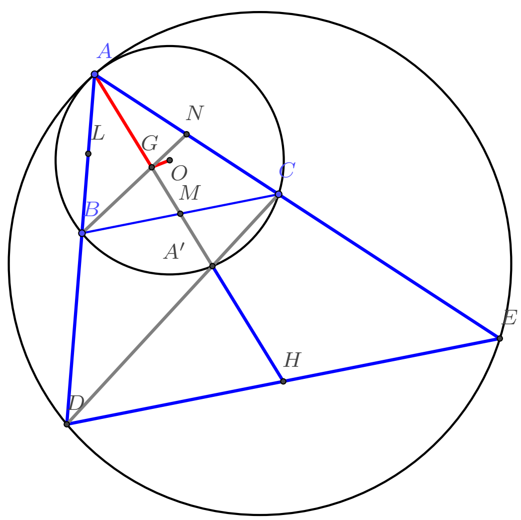
che é chiaramente verificata, dato che gli a_i sono interi positivi distinti.

Soluzione di C3: Riconduciamoci a un problema più generale e in questo caso più semplice da risolvere: procedendo per induzione mostriamo che $\forall n \in \mathbb{N}$ fra $3 \times n!$ alieni che comunicano con n lingue (ogni coppia esattamente con un solo linguaggio) ci sono 3 alieni che tra di loro parlano la stessa lingua.
Passo base: per $n = 1$ la tesi è banale in quanto si hanno proprio 3 alieni che parlano una lingua sola.
Passo induttivo: supponiamo che la tesi sia valida per n e mostriamola per $n + 1$. Fissato un alieno A, per Pigeonhole esiste un sottoinsieme S dei restanti $3 \times (n+1)! - 1$ di cardinalità almeno

$$|S| \geq \left\lceil \frac{3 \times (n+1)! - 1}{n+1} \right\rceil = 3 \times n!$$

che parlano tutti la stessa lingua B con l'alieno A. Ma dunque, se due alieni di S comunicano tra di loro nella lingua B si ha la tesi, mentre se nessun alieno dell'insieme S parla la lingua B ci siamo ricondotti a un insieme di cardinalità $3 \times n!$ in cui gli alieni comunicano con n lingue diverse, e per l'ipotesi induttiva si trovano 3 alieni che soddisfano la tesi in S.

Soluzione di G3: Siano M, N, L rispettivamente i punti medi dei lati BC, CA, AB.



Sappiamo che il quadrilatero $ANOL$ è ciclico e la circonferenza circoscritta (che chiamiamo γ) ha diametro AO: poichè $\widehat{AGO} = 90°$, anche $G \in \gamma$

Osserviamo che $BN \parallel DC$: infatti

$$\widehat{DCB} = \widehat{A'CB} = \widehat{A'AB} = \widehat{GAL} = \widehat{GNL} = \widehat{BNL}$$

(dove usiamo uguaglianze fra angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco, e l'allineamento dei punti B, G, N). E inoltre, poiché $MN \parallel BC$, $\widehat{CBN} = \widehat{BNL} = \widehat{DCB}$, e poiché $\widehat{CBN}$ e $\widehat{DCB}$ sono gli angoli alterni interni delle rette BN e DC, tagliate dalla trasversale BC, abbiamo il parallelismo.

Ma allora, per il Piccolo Teorema di Talete abbiamo che

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AN}{AC} = \frac{1}{2}$$

ovvero B è il punto medio di AD.

Con lo stesso ragionamento sulle rette CL e EB, troviamo che C è il punto medio di AE.

Allora consideriamo l'omotetia di centro A e fattore 2: questa omotetia manda il triangolo $\triangle ABC$ nel triangolo $\triangle ADE$ (fissa il punto A e manda B in D, e C in E). Quindi Γ finirà nella circonferenza circoscritta a $\triangle ADE$, e O nel centro della circonferenza circoscritta a $\triangle ADE$. Basta quindi dimostrare che O finisce su Γ, ma questo è ovvio, perchè l'omotetia ha fattore 2 e O è il centro di Γ (e quindi O va nel punto diametramente opposto a A).

Soluzione di N3: È facile dimostrare per induzione su n, che $f(x+na) \leq f(x) + na$ e $f(x+nb) \geq f(x) + nb$.

Passo Base $n = 1$, è l'ipotesi.

Passo Induttivo Supponiamo la tesi vera per n e dimostriamola per $n+1$:

$$f(x+(n+1)a) = f(x+na+a) \leq f(x+na) + a \overset{(*)}{\leq} f(x) + (n+1)a$$

$$f(x+(n+1)b) = f(x+nb+b) \geq f(x+nb) + b \overset{(*)}{\leq} f(x) + (n+1)b$$

dove in $(*)$ usiamo l'ipotesi induttiva.

Poiché $(a,b) = 1$, per l'identità di Bézout sappiamo che esistono $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$ tali che $ax_0+by_0 = 1$.

Ma allora tutte le coppie $(x,y) = (x_0 - kb, y_0 + ka)$ con $k \in Z$ risolvono l'equazione $ax + by = ax_0 - kab + by_0 + kab = ax_0 + by_0 = 1$. Al variare di k trovo quindi sia coppie (x,y) per cui $x > 0$ e $y < 0$, che coppie in cui $x < 0$ e $y > 0$.

Se consideriamo $m, n \in \mathbb{N}$ per cui $an - bm = 1$:

$$f(x+1) = f(x+an-bm) \leq f(x-bm) + an \leq (x-bm+bm) + an - bm = f(x) + 1$$

Analogamente, se prendiamo invece $n, m \in \mathbb{N}$ tali che $bm - an = 1$

$$f(x+1) = f(x+bm-an) \geq f(x-an) + bm \geq (x-an+an) + bm - an = f(x) + 1$$

Abbiamo quindi trovato $f(x) + 1 \leq f(x+1) \leq f(x) + 1$, ovvero $f(x+1) = f(x) + 1$.

4 Quarto allenamento

4.1 Problemi

A4 Sia $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ tale che:

- f è strettamente crescente
- $f(x) > -\frac{1}{x}$ per ogni $x > 0$
- $f(x) \cdot f\left(f(x) + \frac{1}{x}\right) = 1$ per ogni $x > 0$

Determinare $f(1)$.

C4 Alberto e Barbara hanno 2019 lampadine spente in fila ed altrettanti interruttori: ogni interruttore accende/spegne una sola lampadina.
Alberto sfida Barbare a collegare ogni lampadina al proprio interruttore, aiutandola con degli indizi: un indizio di Alberto consiste nello scegliere un sottoinsieme degli interruttori non banale (quindi diverso dal vuoto e da tutto l'insieme) e premerli contemporaneamente, cambiando lo stato delle lampadine.

a) Supponendo che Alberto giochi in modo casuale (ma senza dare per due volte lo stesso indizio), quanti indizi di Alberto servono al minimo perché Barbara sia sicura di aver indovinato?

b) Supponiamo che il gioco funzioni diversamente, e sia Barbara a dire ad Alberto quali e quanti interruttori premere ogni volta. Quanti indizi le servono al minimo per raggiungere il suo scopo?

G4 Sia $\triangle ABC$ un triangolo isoscele su base AB e siano D un punto sul prolungamento del lato AC tale che $AC > CD$ e M il punto medio di BD. La bisettrice dell'angolo $\widehat{BCD}$ interseca BD nel punto N, e la tangente in M al circocerchio di $\triangle AMD$ interseca BC in P.
Dimostrare che i punti A, P, N, M sono conciclici.

N4 Un intero n viene detto *Mozart* se la rappresentazione decimale della successione $1, 2, \ldots, n$ contiene tutte le cifre un numero pari di volte.

a) Mostrare che tutti numeri *Mozart* sono pari.

b) Mostrare che esistoni infiniti numeri *Mozart*.

4.2 Soluzioni

A4 Osserviamo per prima cosa che, poichè f è strettamente crescente, f è iniettiva.
Sia $a = f(1)$: dalla terza condizione, ponendo $x = 1$, ricaviamo che $a \cdot f(a+1) = 1$, quindi necessariamente $a \neq 0$ e dalla seconda condizione abbiamo $a > -1$. Possiamo allora dividere per a e troviamo che $f(a+1) = \frac{1}{a}$. Inoltre poichè f è crescente abbiamo $a = f(1) < f(f(1)+1) = \frac{1}{a} \Rightarrow \frac{(a-1)(a+1)}{a} < 0 \iff a \in [-1, 0]$
Sostituiamo ora $x = a + 1$ nella terza condizione, ricavando:

$$f(a+1) \cdot f\left(f(a+1) + \frac{1}{a+1}\right) = \frac{1}{a} \cdot f\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a+1}\right) = 1$$

Da cui (poiché $a \neq 0$) trovo $f\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a+1}\right) = a$. Ma sappiamo che f è iniettiva quindi necessariamente

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a+1} = \frac{2a+1}{a(a+1)} = 1$$

$$2a + 1 = a^2 + a \Rightarrow a^2 - a - 1 = 0$$

quindi a è l'unica radice negativa del polinomio $x^2 - x - 1$, ovvero

$$a = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

C4 Sai L l'insieme delle lampadine e siano a e b due lampadine in L: un indizio corrisponde ad un sottoinsieme $S \in L$. Osserviamo che per riuscire a collegare le lampadine a e b al proprio interruttore è necessario che almeno una volta uno dei due appartenga all'indizio e l'altro no.

Quindi per ogni coppia a, b di lampadine in L ci sono $2^{2017} * 2 - 2 = 2^{2018} - 2$ indizi non banali che o contengono sia a che b, o non contengono nessuna delle due lampadine: ovvero $2^{2018} - 2$ mosse non sono sufficienti a terminare il gioco. D'altra parte non potendo ripetere le mosse, fare $2^{2018} - 1$ indizi garantisce di aver scelto per ogni coppia di lampadine almeno un sottoinsieme di L che non le contenga entrambi (perchè per quanto detto questi sono solo $2^{2018} - 2$), quindi è possibile distinguerle, ovvero $2^{2018} - 1$ indizi sono sufficienti per risolvere il gioco.

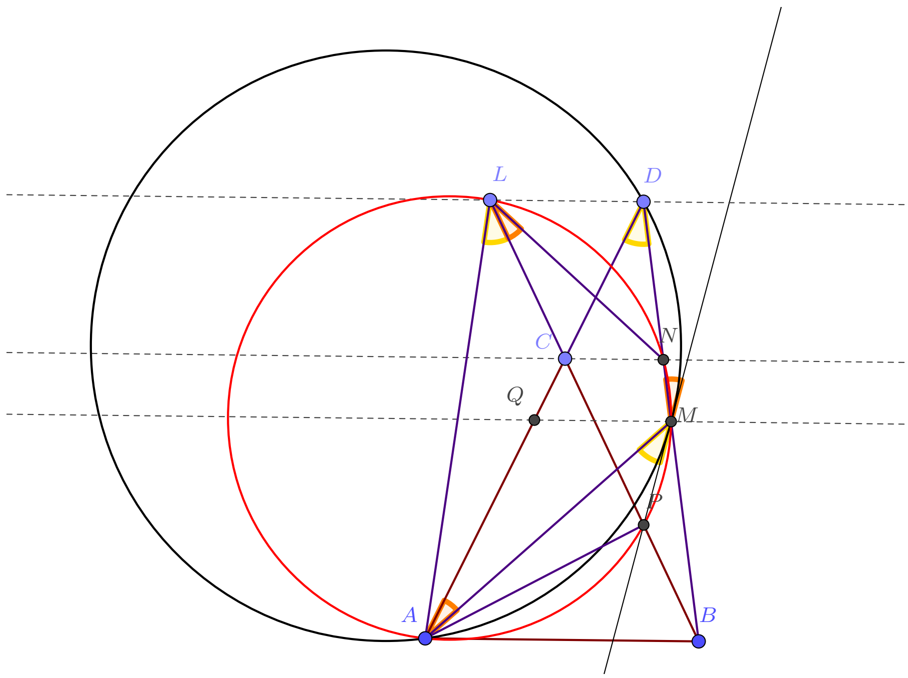
b) Diciamo che per risolvere il gioco a Barbare servono esattamente 11 indizi.
Osserviamo per prima cosa che tramite gli indizi è possibile associare ad ogni lampadina (e al suo interruttore) una stringa di acceso/spento in base al fatto che la lampadina sia o meno presente in un indizio: ovviamente se tutte le lampadine hanno stringhe diverse il gioco è finito.

Inoltre con n mosse è possibile distinguere al più 2^n stringhe, quindi se $n = 10$ avremo al più 1024 stringhe diverse e quindi necessariamente due lampadine con stringhe uguali. Quindi servono almeno 11 mosse.

D'altra parte è possibile procedere così. Sia L_0 l'insieme delle lampadine.
Ad ogni passo dati gli insiemi L_i, si divide ogni insieme in due parti di cardinalità $\lceil \frac{|L_i|}{2} \rceil$ e uno da $\lfloor \frac{|L_i|}{2} \rfloor$ e si sceglie come indizio il sottoinsieme composto dall'unione di una delle metà per ogni L_i: in questo modo, dopo il passo k-esimo Barbara riesce a dividere interruttori e lampadine in 2^k insiemi, di cardinalità minore uguale a $\lceil \frac{n}{2^k} \rceil$.

Quindi dopo 11 mosse Barbara ha diviso interruttori e lampadine in $2^{11} = 2048 > 2019$ insiemi di cardinalità al più 1, ovvero ha collegato tutti gli interruttori ala propria lampadina.

G4 Sia L il simmetrico di D rispetto all'asse di AB: poichè il triangolo è isoscele, i punti B, C, L sono allineati (simmetrici dei punti A, C e D).



Chiamiamo $\alpha = \widehat{ADB}$: allora $\widehat{ALB} = \alpha$ per costruzione e $\widehat{AMP} = \alpha$ perché MP è tangente alla circoscritta al triangolo $\triangle AMD$. Quindi $\widehat{ALP} = \widehat{ALB} = \widehat{AMP}$, da cui ricaviamo che $APML$ è ciclico.

Adesso per dimostrare la tesi, basta dimostrare che anche il punto N appartiene alla circonferenza circoscritta a $APML$.
Sia Q l'intersezione fra AC e la parallela a AB passante per M: per Talete, poichè M è il punto medio di BD, Q è il punto medio di AD.

Osserviamo per prima cosa che la retta CN è parallela alla retta AB (e quindi anche a QM): infatti $\widehat{BCN} = \frac{\pi - \widehat{ACB}}{2} = \widehat{CBA}$.

Allora i triangoli $\triangle DQM$, $\triangle DCN$ sono simili, da cui trovo:

$$\frac{CN}{QM} = \frac{DC}{DQ} = \frac{DC}{QA}$$

.

e inoltre usando che $CN \parallel QM$ troviamo $\widehat{AQM} = \pi - \widehat{LCN} = \widehat{LCN}$ (dove l'ultima uguaglianza vale perchè D e L sono simmetrici).

Quindi i triangoli $\triangle AQM$ e $\triangle LCN$ sono simili, ovvero $\widehat{CLN} = \widehat{QAM} =$, da cui ricaviamo $\widehat{ALN} = \widehat{ALP} + \widehat{CLN} = \widehat{AMP} + \widehat{QAM} = \pi - \widehat{AMD}$ (dove nell'ultima uguaglianza usiamo che MP è tangente alla circoscritta al triangolo $\triangle AMD$). Ovvero anche $AMNL$ è ciclico.

N4 Definiamo tonalità $T(n)$ di un numero intero positivo n il vettore di 10 componenti a lui associato in cui l'$i-$esima componente assume valore 1 se il numero di volte che la cifra i compare nella successione $1, \ldots, n$ é dispari, 0 altrimenti.

Osserviamo che se n é dispari $T(n+10) = T(n) + \mathbb{1}$, dove con $\mathbb{1}$ si intende il vettore le cui componenti sono tutte pari a 1 (e le componenti di $T(n)$ sono intese modulo 2). Questa osservazione é vera perché tutte le cifre compaiono una e una sola volta come cifre delle unità tra n ed $n+10$, mentre le altre cifre sono costanti nella successione da $n+1$ a $n+k$ (dove $n+k$ ha 9 come cifra delle unità) e da $n+k+1$ a $n+10$, entrambi intervalli composti da un numero pari di numeri, dunque tali cifre non contribuiscono alla tonalità di $n+10$. Da questa osservazione segue immediatamente il punto a) della tesi: infatti le tonalità dei numeri dispari da 1 a 9 hanno tutte almeno una coppia di componenti con parità diversa, dunque nessun numero dispari successivo può essere un numero Mozart (che richiederebbe una tonalità con componenti tutte nulle).

In realtà da qui segue anche il punto b) della tesi: infatti si mostra facilmente per induzione che $\forall n \in \mathbb{N}$

$$T((2n+1) \cdot 10 + 9) = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

dunque tutti i numeri della forma

$$N = \underbrace{222 \ldots 2222}_{2k \text{ volte}} 0$$

sono numeri Mozart (per ogni k intero positivo). Quanto appena affermato vale perché abbiamo osservato che

$$T(N-1) = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

dunque

$$T(N) = (1+1, 0, 2k, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \equiv (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \pmod 2$$

da cui la tesi.

5 Quinto allenamento

5.1 Problemi

A5 Un polinomio ha tutte le sue radici reali e i suoi coefficienti sono ± 1. Determinare il massimo grado che può avere.

C5 Dati una coppia (x, y) di interi positivi di parità diversa, una *operazione* consiste nel sostituire la coppia (x, y) con $(\frac{x}{2}, y + \frac{x}{2})$ se x è pari, o con $(x + \frac{y}{2}, \frac{y}{2})$ altrimenti.
Dimostrare che per ogni numero dispari $n > 1$, esiste $b < n$ pari tale che, partendo dalla coppia (n, b) è possibile ottenere la coppia (b, n) con un numero finito di operazioni.

G5 Sia $\triangle ABC$ un triangolo acutangolo con $AB > AC$, O il suo circocentro e D il punto medio del lato BC. Siano inoltre E, F i punti di intersezione della circonferenza di diametro AD con i lati AB e AC. Dimostrare che la parallela a AO passante per D incontro EF nel suo punto medio.

N5 Sia a_n una successione definita da $a_0 = 3$ e $a_{n+1} - a_n = n(a_n - 1)$. Trovare tutti gli interi positivi m tali che

$$mcd(m, a_n) = 1 \ \forall n$$

5.2 Soluzioni

A5 Ricordiamo innanzitutto le formule di Viète per un polinomio di grado n:

$$\frac{a_{n-1}}{a_n} = -\sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$
$$\frac{a_{n-2}}{a_n} = \sum_{1\le i<j\le n}^{n} \lambda_i\lambda_j$$
$$\frac{a_0}{a_n} = (-1)^n \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

dove a_i é il coefficiente del termine di grado i del polinomio e λ_i é la sua i-esima radice. Senza perdita di generalità assumiamo che il polinomio sia monico, osservando che nel caso il coefficiente di testa fosse -1 sarebbe possibile moltiplicare tutto il polinomio per -1 ottenendone uno monico con le stesse proprietà di quello di partenza. Ora é facile notare che

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = a_{n-1}^2 - 2a_{n-2} \ge 0$$

dove la disuguaglianza vale perché una delle ipotesi garantisce che tutte le radici siano reali, e quindi i loro quadrati sono tutti non negativi. Dato che $a_{n-1}^2 = 1$ e $a_{n-1}^2 - 2a_{n-2} \ge 0$ si deve avere $a_{n-2} = -1$, da cui

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = 3.$$

A questo punto, per la disuguaglianza di *AM-GM* applicata alla n-upla dei quadrati delle radici (che sono tutti positivi, il che ci consente di usare la ben nota disuguaglianza) si deve avere:

$$\frac{3}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2}{n} \ge \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} \lambda_i^2} = \sqrt[n]{a_0^2} = 1$$

da cui $n \le 3$. Per concludere é sufficiente trovare un polinomio di grado 3 che soddisfa le ipotesi e osserviamo che:

$$P(x) = (x-1)^2(x+1) = x^3 - x^2 - x + 1$$

ha evidentemente tutte le radici reali e come coefficienti ± 1.

C5 Osserviamo preliminarmente che un'*operazione* lascia invariata la somma degli elementi della coppia su cui agisce.
Sia ora $n = 2^k + a$ con a intero dispari tale che $0 \le a < 2^k$ e $b = 2^k + 1 - a$ (che é quindi pari): osserviamo che l'*operazione* manda il primo elemento di una qualunque coppia (x, y) in $\frac{x}{2} \pmod{x+y}$, a condizione che $x+y = 2^{k+1}+1$, che é dispari e garantisce che la divisione per due (o sue potenze) é ben definita.
A questo punto iterando l'operazione $k+1$ volte su (n, b) otteniamo che il primo elemento diventa:

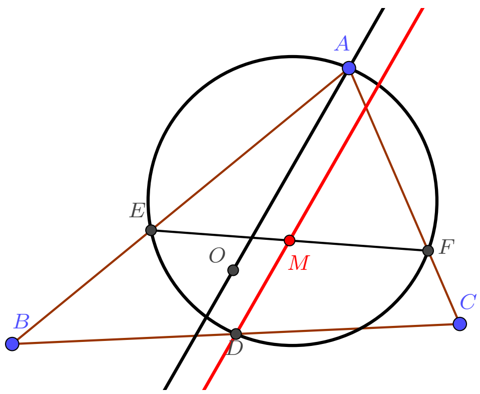
$$\frac{n}{2^{k+1}} \equiv \frac{n}{-1} \equiv -2^k - a \equiv 2^k + 1 - a \pmod{2^{k+1}+1}$$

e siccome gli elementi di questa coppia devono essere interi positivi che sommano a $2^{k+1}+1$, la congruenza finale diventa un'uguaglianza e si ha proprio che dopo $k+1$ mosse (n, b) é stata mandata in (b, n).

G5 Usiamo le notazioni standard su $\triangle ABC$. Poiché D è il punto medio di BC, per il lemma della mediana vale:

$$\frac{\sin \widehat{BAD}}{\sin \widehat{DAC}} = \frac{AC}{AB} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$$

(si dimostra con il teorema dei seni, provarci!)



Per ipotesi i triangoli $\triangle EDA, \triangle FDA$ sono rettangoli, quindi vale

$$ED = AD \sin \widehat{EAD} \quad \text{e} \quad FD = AD \sin \widehat{DAF}$$

Osserviamo inoltre che $\widehat{EDM} = \gamma$ e $\widehat{MDF} = \beta$: infatti

$$\begin{aligned}
\widehat{EDM} &= \widehat{EDA} + \widehat{ADM} = \widehat{EFA} + \widehat{DAO} \text{ perchè } OA \parallel MD \\
&= 90^\circ - \widehat{EFD} + \widehat{DAO} = 90^\circ - \widehat{EAD} + \widehat{DAO} \\
&= 90^\circ - \widehat{EAO} = \gamma \text{ perché } O \text{ centro della circoscritta, quindi } \widehat{EAO} = 90^\circ - \gamma
\end{aligned}$$

e $\widehat{FDM} = 180^\circ - \alpha - \widehat{EDM} = 180^\circ - \alpha - \gamma = \beta$.

Allora

$$\frac{ED}{FD} = \frac{\sin \widehat{EAD}}{\sin \widehat{DAF}} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{\sin \widehat{FDM}}{\sin \widehat{EAD}}$$

ovvero DM è mediana del triangolo $\triangle EDF$, cioè M è il punto medio di EF.

N5 Dimostriamo per induzione su n che $a_n = 2 \cdot n! + 1$.

- Passo Base $n = 0$: $3 = a_0 = 2 \cdot 1 + 1$ e la tesi è verificata.
- Passo Induttivo Supponiamo $a_n = 2 \cdot n! + 1$ e dimostriamo che $a_{n+1} = 2 \cdot (n+1)! + 1$: questo è facile, infatti

  $$a_{n+1} = (n+1)a_n - n = (n+1)(2 \cdot n! + 1) - n = 2 \cdot (n+1)! + 1$$

  Cerchiamo allora m tale che $mcd(m, a_n) = 1 \ \forall n$.

È facile vedere che $mcd(2^k, a_n) = mcd(2^k, 2 \cdot n! + 1) = 1 \forall k \geq 0$. Dimostriamo $m = 2^k, k \geq 0$ sono le uniche soluzioni.

Sia $p \geq 3$ un numero primo: osserviamo che $p \mid a_{p-3}$.
Infatti dal Teorema di Wilson sappiamo che $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$, quindi:

$$-1 \equiv (p-3)!(p-2)(p-1) \equiv 2(p-3)! \pmod{p} \Rightarrow a_{p-3} = 2(p-3)! + 1 \equiv 0 \pmod{p}$$

Allora $\forall m \neq 2^k, \exists p \geq 3$ tale che $p \mid m$, ma quindi $mcd(m, a_{p-3}) \neq 1$, e m non è fra le soluzione cercate.

6 Sesto allenamento

6.1 Problemi

A6 Trovare tutti i numeri reali α con la seguente proprietà: per ogni intero positivo n esiste un intero m tale per cui

$$\left|\alpha - \frac{m}{n}\right| < \frac{1}{3n}.$$

C6 Sia S un insieme di n vertici in cui sono stati scelti P, Q vertici speciali.
Francesca e Veronica fanno il seguente gioco: a turno a partire da Francesca disegnano un arco che congiunge due vertici di S, senza poter riconnettere due vertici già collegati da un arco, e perde chi disegna l'arco cui cui i vertici speciali vengono a trovarsi nella stessa componente connessa. Determinate chi vince

G6 Dato il triangolo $\triangle ABC$ consideriamo ω_B la circonferenza passante per A, B e tangente in A al lato AC e, simmetricamente, ω_C la circonferenza passante per A, C e tangente in A al lato AB. Sia D il punto di intersezione di ω_B e ω_C, e sia E il punto sulla retta AD tale che $AD = DE$. Dimostrare che E sta sulla circonferenza circoscritta al triangolo $\triangle ABC$.

N6 Trovare tutti gli interi $k \geq 0$ tali per cui $3^k + 5^k$ sia scrivibile come n^m dove n, m sono interi positivi e $m \geq 2$.

6.2 Soluzioni

6.3 Problemi

A6 Definiamo *colorati* i reali α che soddisfano la condizione del testo, e mostriamo che questi sono tutti e soli i numeri interi.

Osserviamo innanzitutto che possiamo ridurci a studiare $\alpha \in [0,1)$, poiché se $\alpha \notin [0,1)$ allora esiste un intero $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tale che $\alpha = k + \alpha^*$ con $\alpha^* \in [0,1)$, ossia la parte frazionaria di α, e vale

$$\left|\alpha - \frac{m}{n}\right| < \frac{1}{3n} \iff \left|\alpha^* - \frac{m+nk}{n}\right| < \frac{1}{3n}$$

dove m ed n sono interi, dunque α é colorato se e solo se lo é la sua parte frazionaria α^*.
Notiamo inoltre che

$$\left|\alpha - \frac{m}{n}\right| < \frac{1}{3n} \iff |n\alpha - m| < \frac{1}{3}$$

Sia dunque $\alpha \in [0,1)$: é chiaro che se $\alpha = 0$ é la parte frazionaria di un intero, e basta scegliere $m = 0$ con cui la condizione é $|n\alpha - m| = 0 < \frac{1}{3}$ soddisfatta $\forall n$, dunque tutti i numeri interi sono *colorati.*

Nel caso in cui $\alpha \in (0,1)$ si distinguono tre casi:

- se $0 < \alpha < \frac{1}{3}$ esiste $\overline{n} \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ per cui $\overline{n} \cdot \alpha < \frac{1}{3}$ e $(\overline{n}+1) \cdot \alpha \geq \frac{1}{3}$, tuttavia

  $$(\overline{n}+1) \cdot \alpha = \overline{n} \cdot \alpha + \alpha < \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

  dunque $\forall m \in \mathbb{Z}$ vale $|(\overline{n}+1) \cdot \alpha - m| > \frac{1}{3}$ e quindi α non può essere *colorato*, così come tutti i reali che lo hanno come parte frazionaria.

- se $\frac{1}{3} \leq \alpha \leq \frac{2}{3}$ chiaramente per $n = 1$ la condizione non può essere rispettata.

- se $\frac{2}{3} < \alpha < 1$ allora $\beta = 1 - \alpha$ appartiene a $\left(0, \frac{1}{3}\right)$ e quindi non può essere colorato; ma se un tale α fosse colorato si avrebbe che per ogni n si ha m tale che $|n\alpha - m| < \frac{1}{3}$, quindi $|n - n\beta - m| < \frac{1}{3}$, ossia $|n\beta - (n-m)| < \frac{1}{3}$, dunque β sarebbe colorato, il che é assurdo.

  Se ne conclude che se un numero reale ha parte frazionaria non nulla non può essere *colorato*, da cui solo i numeri interi possono esserlo.

C6 Nei casi in cui $n \equiv 1 \pmod 4$ o $n \equiv 2 \pmod 4$ vince Veronica, mentre negli altri due casi é Francesca ad avere una strategia vincente.

Osserviamo preliminarmente che, immaginando di colorare il vertice P di rosso e Q di blu, lasciando gli altri bianchi, connettendo un vertice bianco a uno colorato anche questo viene colorato e il gioco finisce quando una delle due é costretta a connettere due vertici di due colori diversi (tra rosso e blu). Osserviamo anche che il gioco finisce quando non ci sono più vertici bianchi e le due componenti connesse rossa e blu sono complete (ossia in ogni componente connessa sono stati tracciati tutti gli archi possibili), perché a quel punto deve essere tracciato un arco che connetta le due componenti di due colori diversi. Sia a la cardinalità di vertici

$a \backslash n$	0	1	2	3
0	0	0	2	2
1	2	0	0	2
2	0	0	2	2
3	2	0	0	2

Table 1: Residui modulo 4 dell'espressione $(n-a)^2+a^2-n$ al variare di a lungo le righe e di n lungo le colonne.

nella componente connessa rossa allora il numero di mosse operate fino a quel punto, ossia il numero di archi tracciati risulta essere:

$$\binom{a}{2}+\binom{N-a}{2}=\frac{(n-a)^2+a^2-n}{2}$$

Studiando l'espressione $(n-a)^2+a^2-n$ in modulo 4 otteniamo la casistica riportata in 1. Dalla tabella si evince immediatamente che per $n \equiv 1 \pmod 4$ vince certamente Veronica perché a qualunque partizione del grafo in componenti connesse si arrivi saranno state fatte un numero pari di mosse quindi toccherà a Francesca connettere un punto rosso e uno blu, mentre nel caso in cui $n \equiv 3 \mod 4$ sarà sicuramente Francesca a vincere per ragioni analoghe. Analizziamo separatamente i casi in cui $n \equiv 0 \pmod 4$ e $n \equiv 2 \pmod 4$.
$n \equiv 2 \pmod 4$**:** in questo caso Veronica riesce a vincere se le due componenti connesse in cui il grafo viene partizionato alla fine hanno entrambi un numero dispari di punti (Veronica può vincere dove ci sono gli 0 della tabella) e mostriamo che, partendo da una condizione in cui entrambe le componenti connesse abbiano cardinalità dispari Veronica riesce a fare in modo che dopo la sua mossa tali cardinalità non abbiano cambiato parità.

- Se Francesca cambia la parità del numero di vertici di un certo colore, senza perdita di generalità sia il rosso, allora, dato che la componente connessa blu ha un numero dispari di vertici, essendo n pari esiste una componente connessa (di vertici ancora bianchi) con un numero dispari di punti, e Veronica può connettere quest'ultima a un vertice rosso, lasciando dopo la sua mossa entrambe le componenti rosse e blu con un numero dispari di vertici.
- Se Francesca lascia entrambe le componenti connesse rossa e blu con un numero dispari di vertici, allora dette le loro cardinalità rispettivamente a e b, il numero di archi che possono essere tracciati complessivamente senza colorare un nuovo vertice é data dalla somma degli archi che connettono vertici del medesimo colore, a cui vanno sottratti quelli già tracciati. I possibili archi che connettono vertici dello stesso colore sono:

$$\begin{aligned}\binom{a}{2}+\binom{b}{2}+\binom{n-(a+b)}{2} &= \\ &= a^2+b^2-n(a+b)+\frac{n}{2}(n-1)+ab \equiv \\ &\equiv 0 \pmod 2\end{aligned}$$

Tenendo conto che $a, b \equiv 1 \pmod 2$ e $n \equiv 2 \pmod 4$, questa quantità é pari, comunque sia stato scelto di partizionare il grafo, e siccome fino a Francesca sono state operate un numero dispari di mosse, allora é stato tracciato un numero di archi esattamente dispari, da cui Veronica ha a disposizione almeno un arco da tracciare senza cambiare la parità dei vertici rossi o blu.

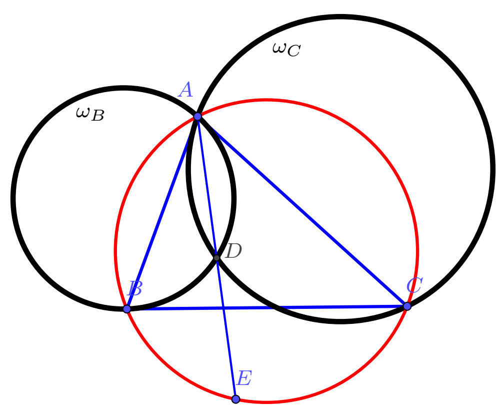
In questo caso dunque Veronica riesce a mantenere dispari sia il numero di vertici rossi che quello dei vertici blu e quindi potrà vincere.
$n \equiv 0 \pmod 4$**:** In questo caso Francesca vince quando lascia a Veronica un grafo bipartito in due componenti connesse complete, quella rossa e quella blu, entrambe con un numero dispari di vertici, come mostrato nella tabella 1 (Francesca vince nei casi corrispondenti ai 2 nella tabella). Il ragionamento si ripropone allora esattamente analogo al caso $n \equiv 2 \pmod 4$, ma questa volta il conto di tutti gli archi possibili, nel caso in cui Veronica lasci a Francesca un grafo le cui componenti blu e rossa abbiano entrambi un numero di vertici dispari, risulta essere:

$$\binom{a}{2} + \binom{b}{2} + \binom{n-(a+b)}{2} =$$
$$= a^2 + b^2 - n(a+b) + \frac{n}{2}(n-1) + ab \equiv$$
$$\equiv 1 \pmod 2$$

dispari perché $n \equiv 0 \pmod 4$ e quindi ora $\frac{n}{2}$ é pari. Ma dunque, essendoci state un numero pari di mosse (l'ultima a muovere é stata Veronica), di tutti i possibili archi ne é stato tracciato solo un numero pari e quindi di nuovo a Francesca é rimasto almeno un possibile arco da tracciare senza colorare nessun vertice nuovo. Questo mostra come per $n \equiv 0 \pmod 4$ vinca Francesca e conclude la dimostrazione.

G6 Vogliamo dimostrare che E appartiene alla circonferenza per A, B, C.
Consideriamo una inversione di centro A e raggio AD: la tesi è verificata se e solo se l'immagine di E tramite l'inversione appartiene all'immagine della circoscritta tramite l'inversione. Guardiamo come agisce l'inversione:

- tutte le rette per A finiscono in loro stesse;
- il punto D viene fissato e E finisce nel punto medio di D;
- il punto B va in un punto B' sulla retta AB e C in un punto C' sulla retta AC;
- la circoscritta ad ABC finisce nella retta $B'C'$
- ω_B è la circonferenza per AB tangente al lato AC, quindi finisce nella parallela ad AC passante per D, e analogamente ω_C finisce nella parallela ad AB passante per C



Quindi $AB'DC'$ è un parallelogramma (le coppie di lati sono paralleli) e AD e $B'C'$ sono le due diagonali: poiché in un parallelogramma le due diagonali si incontrano nel loro punto medio e E' è il punto medio di AD, questo mi dice che E' appartiene a $B'C'$, che è l'immagine della circoscitta ad ABC.

- **N6** Cerchiamo tutti i $k > 0$ per cui esistono $n, m \in \mathbb{N}, n > 1, m > 0$ tali che

$$3^k + 5^k = n^m$$

Osserviamo per prima cosa che sicuramente k è dispari.
Infatti se $2 \mid k$, poichè $\phi(4) = 2$ avrei $3^k \equiv 5^k \equiv 1 \pmod 4$, ma quindi $3^k + 5^k \equiv 2 \pmod 4$, ovvero la massima potenza di 2 che divide $3^k + 5^k$ è 1, ovvero nell'espressione $3^k + 5^k = n^m$, m è necessariamente 1.

Quindi k è dispari e quindi

$$3^k + 5^k = 8 \cdot \left(\sum_{i=0}^{k-1} 3^i 5^{k-1-i} \right)$$

Osserviamo che in $\sum_{i=0}^{k-1} 3^i 5^{k-1-i}$ è una somma di un numero dispari (k) di termini dispari, quindi è sicuramente dispari, ovvero la massima potenza di 2 che divide $3^k + 5^k$ è 3.

Quindi si esistono n, m per cui $3^k + 5^k = n^m$, m è necessariamente 3. Cerchiamo quindi i k dispari per cui esiste n tale che

$$3^k + 5^k = n^3 \tag{7}$$

Osserviamo per prima cosa che sicuramente $k = 1$ è una soluzione ($3^1 + 5^1 = 8 = 2^3$). Supponiamo $k > 1$.

Guardiamo l'equazione 7 modulo 9: $\phi(9) = 6$, quindi $n^3 \equiv \pm 1 \pmod 9$; inoltre $k > 1$ $3^k \equiv 0 \pmod 9$. L'equazione diventa quindi:

$$5^k \equiv \pm 1 \pmod 9 \Rightarrow k = 3, 6 \pmod 6$$

D'altra parte k è dispari, quindi necessariamente $k \equiv 3 \pmod 6$.

Guardiamo anche l'equazione 7 modulo 7: anche $\phi(7) = 6$, inoltre se $k \equiv 3 \pmod 6$, $3^k \equiv 27 \equiv -1 \pmod 7$ e $5^k \equiv 125 \equiv -1 \pmod 7$, quindi $n^3 = 3^k + 5^k \equiv -2 \pmod 7$. D'altra parte però i cubi sono tutti congrui a ± 1 modulo 7, quindi no ci sono soluzioni per $k > 1$.