# Algebra – Allenamenti EGMO 2020 - 1

A1. Siano $x, y, z$ numeri reali tali che $x \neq 1, y \neq 1$ e $x \neq y$. Dimostrare che se

$$\frac{yz - x^2}{1 - x} = \frac{zx - y^2}{1 - y},$$

allora

$$\frac{yz - x^2}{1 - x} = \frac{zx - y^2}{1 - y} = x + y + z.$$

A2.

a) Dimostrare che esiste una 5-upla di numeri reali non negativi $(a, b, c, d, e)$ tali che $a+b+c+d+e = 1$ con la seguente proprietà: comunque si dispongano i 5 numeri su una circonferenza, esiste una coppia di numeri vicini il cui prodotto è $\geq \frac{1}{9}$.

b) Dimostrare che per ogni 5-upla di numeri reali non negativi $(a, b, c, d, e)$ tali che $a + b + c + d + e = 1$, esiste un modo di disporre i 5 numeri su una circonferenza in modo che per ogni coppia di numeri vicini il loro prodotto è $\leq \frac{1}{9}$.

# **Combinatoria** – Allenamenti EGMO 2020 - 1

C3. Giulia ha raccolto un mucchio di $n$ conchiglie, con $n$ intero positivo e si diletta con il gioco di seguito illustrato; ad ogni turno può scegliere tra una delle seguenti due mosse:

$\alpha$) se ci sono almeno 5 conchiglie, togliere 5 conchiglie dal mucchio;

$\beta$) se il numero di conchiglie attualmente presenti è divisibile per 7, dividerle in 7 mucchietti uguali, toglierne 4 e riunire i 3 restanti in un unico mucchio.

Giulia vince se riesce a togliere tutte le conchiglie dal mucchio iniziale, mentre perde in tutti gli altri casi:

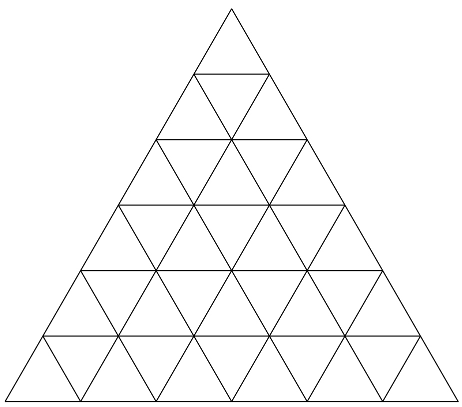
a) per quali $n$ riesce a vincere?

Giulia cambia le regole del gioco, e questa volta vince se alla fine le rimangano esattamente 3 conchiglie.

b) per quali $n$ può vincere in questo nuova versione del gioco?

C4. I confini della pianta della città $n$-Trilandia formano un triangolo equilatero di lato $2n$ per un certo intero positivo $n \geq 2$. La città ha in tutto $6n$ strade (confini della città compresi), e ogni strada è parallela ad uno dei tre confini, ed in particolare esattamente $2n - 1$ strade interne sono parallele ad uno stesso confine. Prese $2n$ strade parallele tra di loro, queste dividono i rimanenti due confini in tratti di strada lunghi 1.

Ad esempio, 3-Trilandia è fatta così:



Il sindaco di $n$-Trilandia vuole disporre delle sentinelle agli incroci delle strade, confini compresi. Ogni sentinella riesce a difendere tutte e sole le strade che si intersecano nella sua posizione.

Quante sentinelle al minimo sono necessarie per difendere ogni strada di $n$-Trilandia?

# Geometria – Allenamenti EGMO 2020 - 1

G5. Sia $\omega$ una circonferenza di centro $O$, e $P$ un punto esterno ad essa. Siano $A$ e $B$ i punti di intersezione fra le tangenti uscenti da $P$ e la circonferenza. Preso $M$ sul segmento $AB$, siano $C$ e $D$ i punti di intersezione della perpendicolare ad $OM$ per $M$ con $PA$ e $PB$. Dimostrare che $M$ è il punto medio di $CD$

G6. Sia $ABCD$ un trapezio di basi $AD$ e $BC$ tale che $AB = AD + BC$. Indichiamo con $F$ il punto medio di $CD$.

a) Dimostrare che la bisettrice dell'angolo $\angle DAB$ incontra $CD$ in $F$.

Sia $\omega$ la circonferenza di diametro $CD$ e $J$ l'intersezione di $AF$ e la bisettrice di $\angle ADC$. Supponiamo che ora $\omega$ sia tangente al lato $AB$ in $P$, costruiamo $X$ l'intersezione di $AD$ e $PF$, e $M$ e $N$ le proiezioni di $J$ su $PF$ e $AD$.

b) Dimostrare che $X$ è equidistante da $M$ e $N$.

# Teoria dei Numeri – Allenamenti EGMO 2020 - 1

N7. Determinare tutte le terne $(a, b, c)$ di interi positivi che soddisfano le seguenti condizioni:

$$\mathrm{MCD}(a, 20) = b$$
$$\mathrm{MCD}(b, 15) = c$$
$$\mathrm{MCD}(a, c) = 5$$

*Con* $\mathrm{MCD}(a, b)$ *si indica il massimo comune divisore tra* $a$ *e* $b$*, ovvero il più grande intero positivo che divide entrambi*

N8. Trovare tutte le terne $(m, p, q)$ che soddisfano

$$2^m p^2 + 1 = q^5$$

dove $m > 0$ è un intero e $p$ e $q$ sono numeri primi.

# Parte I

# Marking Scheme

# Soluzione del problema A1

**Testo** Siano $x, y, z$ numeri reali tali che $x \neq 1, y \neq 1$ e $x \neq y$. Dimostrare che se

$$\frac{yz - x^2}{1 - x} = \frac{zx - y^2}{1 - y},$$

allora

$$\frac{yz - x^2}{1 - x} = \frac{zx - y^2}{1 - y} = x + y + z.$$

**Soluzione** Notiamo che

$$\begin{aligned}\frac{yz - x^2}{1 - x} = \frac{zx - y^2}{1 - y} &\implies (yz - x^2)(1 - y) = (zx - y^2)(1 - x) \\ &\implies yx - y^2 z - x^2 + x^2 y = zx - zx^2 - y^2 + xy^2 \\ &\implies (x - y)(x + y + z - xy - yz - zx) = 0.\end{aligned}$$

Dato che $x \neq y$, possiamo dividere entrambi i membri per $x - y$, ottenendo che

$$\frac{yz - x^2}{1 - x} = \frac{zx - y^2}{1 - y} \implies x + y + z = xy + yz + zx.$$

Ora dimostreremo che $\frac{zx - y^2}{1 - y} = x + y + z$ se e solo se $x + y + z = xy + yz + zx$.

$$\begin{aligned}\frac{zx - y^2}{1 - y} = x + y + z &\iff zx - y^2 = (1 - y)(x + y + z) \\ &\iff zx - y^2 = x + y + z - xy - y^2 - yz \\ &\iff x + y + z = xy + yz + zx.\end{aligned}$$

Dato che sappiamo che $x + y + z = xy + yz + zx$ è vera per quanto dimostrato precedentemente, allora $\frac{zx - y^2}{1 - y} = x + y + z$, da cui la tesi.

**Marking Scheme** Ogni soluzione corretta e completa vale **7 punti**. In particolare:

- **4 punti** per la dimostrazione che $\frac{yz - x^2}{1 - x} = \frac{zx - y^2}{1 - y}$ implica $x + y + z = xy + yz + zx$. Di questi 4 punti, **1 punto** per chi moltiplica per i denominatori (facendo il conto), **2 punti** per chi fattorizza l'espressione in un modo che porti alla tesi, **1 punto** per dire che si può dividere per $x - y$ perchè $x \neq y$.

- **2 punti** per la dimostrazione che se $x + y + z = xy + yz + zx$ allora vale la tesi. Solo **1 punto** di questi 2 per dimostrare che la tesi implica $x + y + z = xy + yz + zx$ ma non viceversa e/o arrivare ad un'espressione non uguale ma equivalente.

- **1 punto** per concludere.

# Soluzione del problema A2

**Testo**

a) Dimostrare che esiste una 5-upla di numeri reali non negativi $(a, b, c, d, e)$ tali che $a+b+c+d+e = 1$ con la seguente proprietà: comunque si dispongano i 5 numeri su una circonferenza, esiste una coppia di numeri vicini il cui prodotto è $\geq \frac{1}{9}$.

b) Dimostrare che per ogni 5-upla di numeri reali non negativi $(a, b, c, d, e)$ tali che $a+b+c+d+e = 1$, esiste un modo di disporre i 5 numeri su una circonferenza in modo che per ogni coppia di numeri vicini il loro prodotto è $\leq \frac{1}{9}$.

**Soluzione** **a)** Basta considerare la quintupla $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0)$, o sue permutazioni. Infatti questi numeri sono non negativi, sommano a 1 e una volta disposti su una circonferenza si hanno due casi:

- i due 0 sono adiacenti, nel qual caso sicuramente tutti gli $\frac{1}{3}$ sono vicini e scelta una loro coppia abbiamo che la condizione è soddisfatta.
- i due 0 non sono adiacenti, in tal caso spezzano la circonferenza i due archi, uno che contiene un altro vertice e uno che ne contiene due, a cui saranno associati due $\frac{1}{3}$, e quindi scegliendo questa coppia soddisfiamo la condizione.

**b)** Senza perdità di generalità possiamo ordinare gli elementi e affermare $a \geq b \geq c \geq d \geq e \geq 0$. A questo punto disponiamo, percorrendo la circonferenza, i numeri nell'ordine $a, e, b, c, d$, come mostrato in figura I.

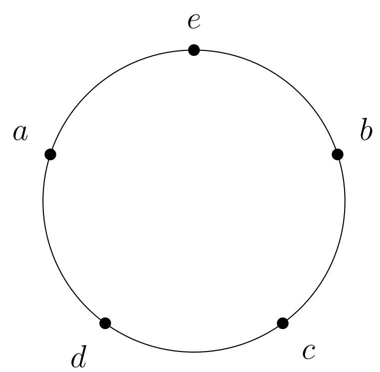



Figura 1: disposizione vincente.

Mostriamo che questa configurazione soddisfa la condizione richiesta e quindi dimostra la tesi, facendo vedere che $ad, ae, be, bc, cd \leq \frac{1}{9}$.

- *Soluzione1*: Analizziamo con pazienza tutte le coppie di numeri adiacenti:

* Supponiamo per assurdo che $ad > \frac{1}{9}$, allora abbiamo che:

$$a = a \cdot 1 = a \cdot (a+b+c+d+e) > a^2 + \frac{3}{9} + ae \geq a^2 + \frac{3}{9}$$

  dove per la prima disuguaglianza si è usata la condizione che i 5 numeri reali considerati sommano a 1 e che $a \geq b \geq c \geq d \geq e \geq 0$, da cui $ab \geq ac \geq ad > \frac{1}{9}$, mentre per la seconda osserviamo che trattiamo numeri non negativi dunque $ae \geq 0$. La disequazione che si ottiene, $a \geq a^2 + \frac{3}{9}$, può essere riarrangiata nella forma canonica $3a^2 - 3a + 1 \leq 0$, che non ha soluzioni reali in quanto $\Delta = 9 - 12 < 0 \wedge 3 > 0$, e questo porta a un assurdo dato che si è assunto $a \in \mathbb{R}^+$.

* $ae \leq ad \leq \frac{1}{9}$.
* $be \leq ae \leq \frac{1}{9}$.
* $cd \leq ad \leq \frac{1}{9}$.
* Supponiamo per assurdo che $bc > \frac{1}{9}$. Osserviamo che in ogni caso si deve avere $c \leq \frac{1}{3}$, infatti

$$1 = a+b+c+d+e \geq a+b+c \geq 3c$$

  Ora, analogamente a quanto fatto per il primo punto studiamo:

$$c = c \cdot 1 = c \cdot (a+b+c+d+e) > c^2 + \frac{2}{9}$$

  dove abbiamo usato di nuovo che $ac \geq bc > \frac{1}{9}$ e $dc \geq ec \geq 0$. La disequazione ottenuta, $9c^2 - 9c + 2 < 0$ ha come soluzioni $\frac{1}{3} < c < \frac{2}{3}$, incompatibile con la condizione $c \leq \frac{1}{3}$, e quindi abbiamo un assurdo. Questo conclude la dimostrazione.

- *Soluzione 2*: Osserviamo che $ae \leq ad \leq ac$, $be \leq bc \leq ac$, $cd \leq ad \leq ac$, quindi ci basta far vedere che $ac \leq \frac{1}{9}$, oppure che $ad, bc \leq \frac{1}{9}$. È ovvio che al più tre elementi sono $\geq \frac{1}{3}$, quindi abbiamo due casi:

  * $a, b \geq \frac{1}{3} \Rightarrow a = \frac{1}{3} + x, b = \frac{1}{3} + y$ , con $x, y \geq 0$ e troviamo $c + d + e = \frac{1}{3} - x - y$. Ma allora vale

$$ac \leq \left(\frac{1}{3} + x\right)\left(\frac{1}{3} - x - y\right) \leq \left(\frac{1}{3} + x\right)\left(\frac{1}{3} - x -\right) \leq \frac{1}{9} - x^2 \leq \frac{1}{9}$$

  * $a \geq \frac{1}{3}$ e $b \leq \frac{1}{3}$. Ma allora $1 - a = b + c + d + e \geq 3d$ da cui $d \leq \frac{1-a}{3}$, da cui troviamo

$$ad \leq \frac{a(1-a)}{3} < \frac{1}{12}$$

    perchè $\frac{a(1-a)}{3}$ è una parabola rivolta verso il basso con vertice $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{12}\right)$ (o comunque basta far vedere che $\frac{a(1-)}{3} - \frac{1}{9}$ ha $\Delta < 0$).
    D'altra parte $b, c \leq \frac{1}{3} \Rightarrow bc \leq \frac{1}{9}$.

**Marking Scheme** Ogni soluzione corretta e completa vale **7 punti**. Passando alle soluzioni parziali:

- il punto a) vale al più **2 punti**, di cui **1 punto** assegnato per la risposta e **1 punto** per la spiegazione.
- il punto b) vale al più **5 punti**. Più nel dettaglio, per chi porta avanti la *soluzione 1* si assegnino:
  - **1 punto** per la corretta configurazione.
  - **2 punti** per la trattazione completa di tutte le coppie $ae$, $ad$, $be$ o $dc$. Si assegni solo **1 punto** a chi tratta solo alcune (ma non tutte) le coppie elencate.
  - **2 punti** per la trattazione completa della coppia $bc$, di cui **0.5 punti** assegnati per l'osservazione $c \leq \frac{1}{3}$ anche nel caso in cui non venga completata la dimostrazione di $bc \leq \frac{1}{9}$.

  Per chi porta avanti la *soluzione 2* si assegnino:
  - **1 punto** per la corretta configurazione.
  - **1 punto** per chi osserva che basta dimostrare che $ac \leq \frac{1}{9}$ oppure che $ad, bc \leq \frac{1}{9}$.
  - **1.5 punti** per chi dimostra il caso $a, b \geq \frac{1}{3}$
  - **1.5 punti** per chi dimostra il caso $a \geq \frac{1}{3}, b \leq \frac{1}{3}$

# Soluzione del problema C3

**Testo** Giulia ha raccolto un mucchio di $n$ conchiglie, con $n$ intero positivo e si diletta con il gioco di seguito illustrato; ad ogni turno può scegliere tra una delle seguenti due mosse:

$\alpha$) se ci sono almeno 5 conchiglie, togliere 5 conchiglie dal mucchio;

$\beta$) se il numero di conchiglie attualmente presenti è divisibile per 7, dividerle in 7 mucchietti uguali, toglierne 4 e riunire i 3 restanti in un unico mucchio.

Giulia vince se riesce a togliere tutte le conchiglie dal mucchio iniziale, mentre perde in tutti gli altri casi:

a) per quali $n$ riesce a vincere?

Giulia cambia le regole del gioco, e questa volta vince se alla fine le rimangano esattamente 3 conchiglie.

b) per quali $n$ può vincere in questo nuova versione del gioco?

**Soluzione** **a)** Nel primo caso riesce a vincere se e soltanto se $n$ è multiplo di 5. Infatti se lo è allora basta togliere 5 conchiglie ogni volta, per un totale di $\frac{n}{5}$ volte, e arrivare a 0. Se $n$ non è multiplo di 5 invece sarà della forma $n = 5q + r$, con $0 < r < 5$. Dimostriamo che essere o meno un multiplo di 5 è un invariante per il nostro gioco. Ovviamente se $5 \mid m \iff 5 \mid m - 5$, quindi applicare la mossa $\alpha$ lascia invariata la proprietà di essere un multiplo di 5.
Applicare la mossa $\beta$ invece significa ridurre il mucchio da $m$ a $\overline{m} = \frac{3}{7}m$, e quindi $5 \mid \overline{m} \iff 5 \mid m$, perchè sia 3 che 7 sono coprimi con 5. Ma quindi se $5 \nmid n$, dopo ogni mossa il numero di conchiglie presenti sul tavolo non è multiplo di 5, ovvero Giulia non potrà mai avere 0 conchiglie sul tavolo.
**b)** Questa volta Giulia vince se $n \geq 7$ ed $n$ è congruo a 2 o 3 in modulo 5, ossia se il resto della divisione di $n$ per 5 vale 2 o 3, oppure se $n = 3$. Infatti, assumendo per ora $n \geq 7$, se $n = 5q + 3$, con $q \in \mathbb{Z}^+$ allora basta applicare la mossa $\alpha$ $q$ volte, mentre se $n \equiv 2 \pmod 5$, analogamente a prima, $n = 5 \cdot q + 2$, e applicando $q - 1$ volte la mossa $\alpha$ si rimane con 7 conchiglie, da cui si vince con la mossa $\beta$.
Chiaramente nel caso in cui $n$ sia multiplo di 5 ($n \equiv 0 \pmod 5$) qualunque mossa si attui il mucchio contiene sempre un numero di conchiglie multiplo di 5, quindi non è possibile finire con 3.
Osserviamo ora che l'inverso moltiplicativo di 7 in modulo 5 vale 3, $3 \times 7 \equiv 1 \pmod 5$, dunque applicare la mossa $\beta$ equivale a moltiplicare $n$ per $3 \times 7^{-1} \equiv 3 \times 3 \equiv -1 \pmod 5$. Ne segue che nel caso in cui $n \equiv \pm 1 \pmod 5$, applicando la mossa $\alpha$ $n$ rimane congruo a $\pm 1 \pmod 5$, mentre applicare la mossa $\beta$ equivale ad ottenere $m \equiv n \times 9 \equiv (-1) \cdot \pm 1 \not\equiv 3 \pmod 5$. Quindi per ogni combinazione di mosse $n \not\equiv 3 \pmod 5$. dunque anche in questi casi è impossibile vincere.
Infine nel caso in cui $n < 7$ chiaramente Giulia può vincere solo se $n = 3$, il che conclude.

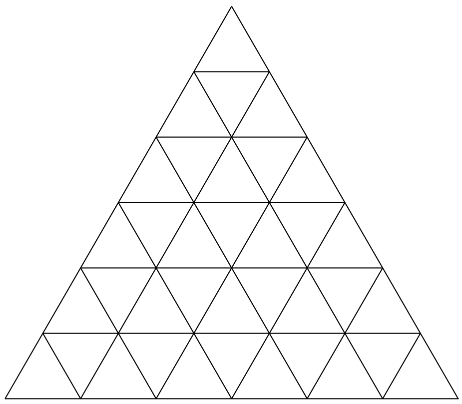
**Marking Scheme** Ogni soluzione corretta e completa vale **7 punti**. In particolare:

- Ogni soluzione completa del punto a) vale **3 punti**. Più nel dettaglio si assegnino:
  - **1 punto** per la risposta.
  - **1 punto** per la spiegazione del perchè i multipli di 5 soddisfano.
  - **1 punto** per la spiegazione del perchè i non multipli di 5 non vanno bene.
- Ogni soluzione completa del punto b) vale **4 punti**. Più nel dettaglio si assegnino:
  - **1 punto** per la risposta, ma assegnare solo **0.5 punti** nel caso l'insieme delle soluzioni sia incompleto.
  - **1.5 punti** per chi spiega perchè i congrui a 2 e 3 modulo 5 funzionano, ma solo **0.5 punti** se si spiega perchè uno solo dei due insiemi funziona.
  - **1.5 punti** per chi spiega perchè gli altri casi non soddisfano.

# Soluzione del problema C4

**Testo** I confini della pianta della città $n$-Trilandia formano un triangolo equilatero di lato $2n$ per un certo intero positivo $n \geq 2$. La città ha in tutto $6n$ strade (confini della città compresi), e ogni strada è parallela ad uno dei tre confini, ed in particolare esattamente $2n-1$ strade interne sono parallele ad uno stesso confine. Prese $2n$ strade parallele tra di loro, queste dividono i rimanenti due confini in tratti di strada lunghi 1.

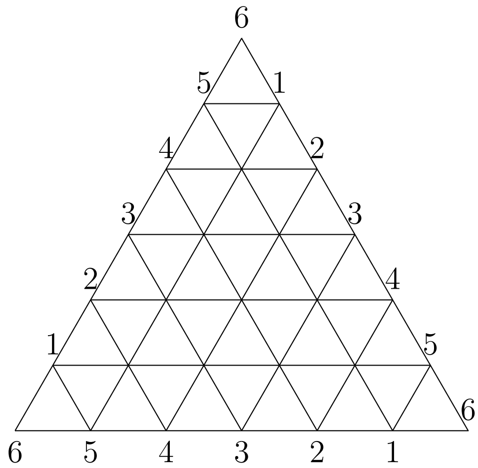
Ad esempio, 3-Trilandia è fatta così:



Il sindaco di $n$-Trilandia vuole disporre delle sentinelle agli incroci delle strade, confini compresi. Ogni sentinella riesce a difendere tutte e sole le strade che si intersecano nella sua posizione.

Quante sentinelle al minimo sono necessarie per difendere ogni strada di $n$-Trilandia?

**Soluzione** Innanzitutto numeriamo da 1 a $2n$ gli incroci su ciascuno dei tre lati, in modo che sui vertici del triangolo perimetrale si abbia sempre un $2n$ e che la numerazione cresca lungo ogni lato girando in senso orario; ad esempio gli incroci di 3-Trilandia verrebbero numerati così:



A questo punto ponendo una sentinella su tutti gli incroci etichettati con un numero $i \leq n-1$, tutte le strade tranne quelle che hanno come estremi gli incroci con le etichette $n$ sono protette: infatti con questa numerazione le etichette agli estremi di ogni strada sommano a $2n$, e quindi, scelta una qualunque strada, se questa parte da un incrocio numerato con $i < n$ è sorvegliato, mentre se parte da un incrocio con $i > n$ allora arriverà in uno con $i < n$, sorvegliato per costruzione. Le rimanenti strade che connettono gli incroci numerati con $n$ formano un triangolo, e quindi sono sufficienti 2 soldati per controllarle, ma non meno di due, dato che chiaramente un soldato solo riesce a controllare al più due lati del triangolo. Questo ci porta ad aver usato $3 \cdot (n-1) + 2 = 3n - 1$ sentinelle.
Per dimostrare che il numero minimo di sentinelle necessarie a difendere $n$-Trilandia sono effettivamente $3n - 1$, dimostriamo che servono *almeno* $3n - 1$ sentinelle per difendere la città.
Consideriamo tutte le strade che partono da un incrocio con $i \leq n-1$ e sono parallele al lato opposto al vertice più vicino: queste sono in tutto $3 \cdot (n-1) = 3n-3$ strade disgiunte e che dunque per essere tutte sorvegliate hanno bisogno di una sentinella a testa. Inoltre anche il triangolo che collega i tre incroci etichettati da $n$ è disgiunto dalle altre strade considerate, e come osservato precedentemente servono almeno altre 2 sentinelle per sorvegliarlo, dunque è necessario porre almeno $3n - 1$ sentinelle a guardia di Trilandia.

*Seconda soluzione per il lower bound:* Questa volta etichettiamo tutti gli incroci di Trilandia con una terna di numeri interi $(d_a, d_b, d_c)$, dove $a, b, c$ sono i lati esterni del triangolo che contiene Trilandia e $d_j$ è la minima distanza da percorrere lungo le strade della città per arrivare sul lato $j$. Osserviamo inannzitutto che questa è una buona definizione in quanto il minimo è unico, che l'equazione $d_j = i$ definisce la retta parallela al lato $j \in \{a, b, c\}$ e distante $d_j = i \leq 2n$ da esso e che per ogni terna che etichetti un incrocio vale $d_a + d_b + d_c = 2n$. Quest'ultima affermazione vale perchè se immaginiamo di fissare una coordinata, $d_j = i$, allora ci siamo collocati sulla parallela al lato $j$ che sarà lunga $2n - i$ per costruzione, ma dunque qualunque vertice scegliamo su questo lato evidentemente avrà $d_{j'} + d_{j''} = 2n - i$ (basta muoversi paralleli a $j \neq j', j''$ per raggiungere gli altri due lati percorrendo la minima distanza) e dunque la somma delle 3 coordinate sarà proprio $2n$.
Consideriamo ora un insieme $I$ di incroci tale per cui piazzando uan sentinella su ogni incrocio si ha la condizione richiesta: in questo insieme ciascuna coordinata $d_a, d_b, d_c \in \{0, \ldots, 2n\}$ presa singolarmente deve assumere almeno una volta ogni valore tra 0 e $2n - 1$; infatti, se non si avesse mai $d_j = k$ per qualche $j, k$ allora la strada corrispondente a quell'equazione rimarrebbe scoperta.
A questo punto calcoliamo la somma $Q$ di $d_a + d_b + d_c$ sommato su tutti i vertici e usiamo l'ultima osservazione per trovare un lower bound sul numero di sentinelle:

$$\begin{aligned} |I| \cdot 2n = Q \geq 3\sum_{i=0}^{2n-1} i &= \\ = 3 \cdot \frac{2n \cdot (2n-1)}{2} &= \\ = 3n(2n-1) & \end{aligned}$$

da cui segue che $|I| \geq \frac{3(2n-1)}{2} = 3n - 1 - \frac{1}{2}$, dove con $I$ indichiamo la cardinalità di $|I|$, ed essendo questo un intero abbiamo di nuovo $|I| \geq 3n - 1$.

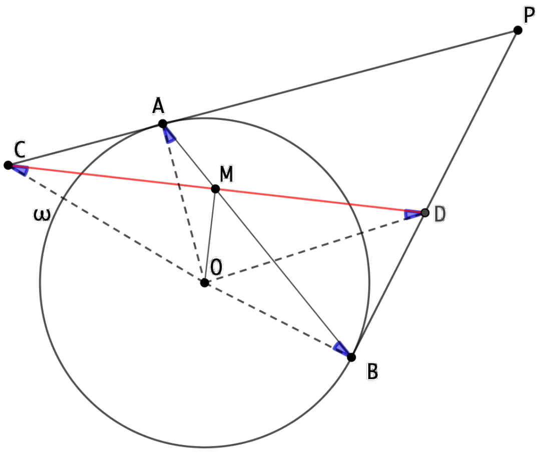
**Marking Scheme** Ogni soluzione corretta e completa vale **7 punti**. In particolare:

- La risposta corretta vale **1 punto**.
- L'esempio correttamente spiegato vale **2 punti**, in particolare se viene citato l'esempio ma non si spiega perchè funziona può essere tolto fino a **1 punto**.
- Per chi porta avanti la *soluzione 1* il lower bound vale **4 punti** in totale, di cui **1 punto** per la gestione del triangolo centrale, asseganto indipendentemente dalla completa esposizione del lower bound; si assegnino **0.5 punti** per l'osservazione che sono necessari esattamente due soldati per sorvegliare un triangolo senza poi applicarla a quello centrale, e in ogni caso questo mezzo punto non è cumulabile con quello assegnato per la gestione del triangolo centrale.
  **Precisazione:** con "gestione del triangolo centrale" si intende la trattazione completa del trangolo che ha per vertici gli incroci etichettati con $n$; questa si compone di due parti principali, ossia l'argomentazione del fatto che sono necessarie esattamente 2 sentinelle per coprirlo e che il triangolo è disgiunto da tutte le altre parallele da considerare, da cui segue che tali 2 sentinelle devono essere sommate all'ammontare totale in quanto non possono coprire nessuna delle altre strade.
- Per chi invece adotta la *soluzione 2* si assegni
  - **1 punto** per l'osservazione, correttamente motivata, che per ogni vertice vale $d_a + d_b + d_c = 2n$ (si attribuisca solo **0.5 punti** se l'osservazione viene solo enunciata);
  - **1 punto** per l'osservazione che ogni coordinata deve assumere ogni valore in $\{0, \ldots, 2n\}$;
  - **2 punti** per il double counting.

# Soluzione del problema G5

**Testo** Sia $\omega$ una circonferenza di centro $O$, e $P$ un punto esterno ad essa. Siano $A$ e $B$ i punti di intersezione fra le tangenti uscenti da $P$ e la circonferenza. Preso $M$ sul segmento $AB$, siano $C$ e $D$ i punti di intersezione della perpendicolare ad $OM$ per $M$ con $PA$ e $PB$. Dimostrare che $M$ è il punto medio di $CD$

**Soluzione** A meno di simmetria possiamo supporre che $AM < MB$.




Osserviamo che $OM$ è altezza del triangolo $\triangle COD$, quindi $M$ è il punto medio di $CD \iff \triangle COD$ è isoscele, ovvero $\iff \angle OCM = \angle MDO$.
Poiché $PA$ è tangente a $\omega$ e $P, A, C$ sono allineati, $\angle COA = 90° = \angle CMO$, quindi $OCAM$ è ciclico $\Rightarrow \angle OCM = \angle OAM$.
Analogamente, poiché $PB$ è tangente a $\omega$ e $P, D, B$ sono allineati, $\angle DBO + \angle DMO = 90° + 90° = 180°$, quindi $OMDB$ è ciclico $\Rightarrow \angle MDO = \angle MBO$.
Ma $\triangle OAB$ è chiaramente isoscele ($OA = OB$ è il raggio di $\omega$), quindi $\angle OCM = \angle OAM = \angle MBO = \angle MDO$.

**Marking Scheme** Ogni soluzione corretta e completa vale **7 punti**. In particolare:

- **1 punto** per dimostrare che la tesi è equivalente a dimostrare che il $\triangle COD$ è isoscele
- **3 punti** per le due ciclicità (di cui **2 punti** per solo una delle due)
- **2 punti** per dimostrare che ($\angle OCM = \angle OAM$ e $\angle OCM = \angle OAM$). Si assegni **1 punto** ulteriore per chi da qui conclude.
- **Non** si levino punti a chi non si accorge dei problemi di configurazione.

# Soluzione del problema G6

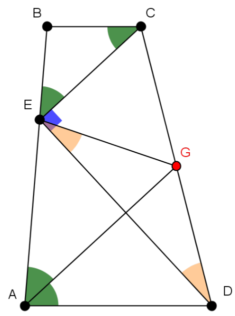
**Testo** Sia $ABCD$ un trapezio di basi $AD$ e $BC$ tale che $AB = AD + BC$. Indichiamo con $F$ il punto medio di $CD$.

a) Dimostrare che la bisettrice dell'angolo $\angle DAB$ incontra $CD$ in $F$.

Sia $\omega$ la circonferenza di diametro $CD$ e $J$ l'intersezione di $AF$ e la bisettrice di $\angle ADC$. Supponiamo che ora $\omega$ sia tangente al lato $AB$ in $P$, costruiamo $X$ l'intersezione di $AD$ e $PF$, e $M$ e $N$ le proiezioni di $J$ su $PF$ e $AD$.

b) Dimostrare che $X$ è equidistante da $M$ e $N$.

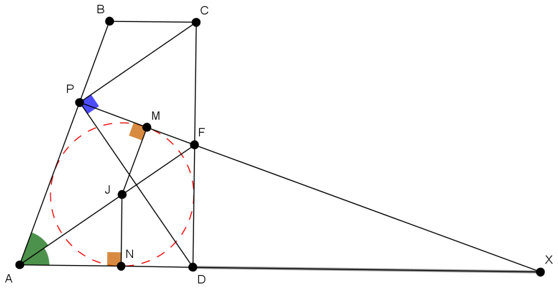
**Soluzione** **a)** Consideriamo il punto $E$ su $AB$ tale che $AE = AD$.




Essendo $AB = AD + BC$, allora $EB = BC$. Sia $G$ l'intersezione della bisettrice di $\angle DAB$ con $CD$. Dato che $\triangle ADE$ è isoscele su base $DE$ e che $AG$ è bisettrice di $\angle DAE$ allora $G$ sta sull'asse di $ED$, quindi $EG = GD$.
Sia $2\alpha = \angle DAB$, quindi $\angle AED = \frac{\pi}{2} - \alpha$. Dato che $AD||BC$, $\angle ABC = \pi - 2\alpha$ e quindi $\angle CEB = \frac{\pi-(\pi-2\alpha)}{2} = \alpha$. Da qui si conclude in (almeno) due modi:

- *Conclusione 1*: Osserviamo che $\angle CEB = \angle GAB \Rightarrow AG||EC$.
  Ma quindi vale, $\angle GCE = \angle DGA = \angle AGE = \angle GEC$, ovvero il triangolo $\triangle GCE$ è isoscele $\Rightarrow GC = GE = GD$.

- *Conclusione 2*: Dato che $A, E, B$ sono allineati, $\angle DEC = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha + \alpha\right) = \frac{\pi}{2}$. Dunque $\triangle DEC$ è rettangolo, ed essendo $EG = GD$, $EG$ è mediana relativa all'ipotenusa, da cui $CG = GD$, quindi $G$ coincide con $F$.




**b)**Notiamo che $P$ coincide con il punto $E$ definito nella parte (a). Il quadrilatero $ADFP$ è circoscrivibile in quanto $AD + FP = AP + FD$. La sua circonferenza inscritta ha centro $J$ (perchè intersezione di due bisettrici degli angoli dei quadrilatero) e ha raggio $JN = JM$. Inoltre tange $AX$ in $N$,$PX$ in $M$ e $AP$.
Dunque è l'inscritta a $\triangle AXP$, da cui $XM = XN$.

**Marking Scheme** Ogni soluzione corretta e completa vale **7 punti**. In particolare:

- La parte (a) vale al più **4 punti**. Di questi
  - **1.5 punti** per considerare il punto $E$ su $AB$ tale che $AE = AD$
  - **1 punto** per osservare che $EG = GE$
  - **1.5 punti** per mostrare che $EG = CG$. Di questi, **1 punto** per far vedere che $\angle DEC = \pi/2$ oppure che $EC||AG$ e **0.5 punti** per concludere.
- La parte (b) vale al più **3 punti**. Di questi
  - **1 punto** per accorgersi che $P$ è il punto $E$ della parte (a)
  - **1 punto** per dire che $ADFP$ è circoscrivibile
  - **1 punto** per osservare che l'inscritta a $ADPF$ è l'inscritta a $\triangle XAP$, quindi concludere.

# Soluzione del problema N7

**Testo** Determinare tutte le terne $(a, b, c)$ di interi positivi che soddisfano le seguenti condizioni:

$$\text{MCD}(a, 20) = b$$
$$\text{MCD}(b, 15) = c$$
$$\text{MCD}(a, c) = 5$$

*Con* $\text{MCD}(a, b)$ *si indica il massimo comune divisore tra a e b, ovvero il più grande intero positivo che divide entrambi*

**Soluzione** Da $\text{MCD}(a, c) = 5$ ricaviamo $5 \mid c$. Inoltre, dato che $\text{MCD}(b, 15) = c$ abbiamo $c \mid 15$. Dunque $c = 5$ oppure $c = 15$. Da $\text{MCD}(b, 15) = c$ e $\text{MCD}(a, 20) = b$ osserviamo anche che $c \mid b$ e $b \mid 20$.

Ora, se $c = 15$ non c'è nessun $b$ che soddisfa. Se $c = 5$, i valori di $b$ che soddisfano $5 \mid b$ e $b \mid 20$ sono $b = 5, b = 10, b = 20$.

Se $b = 5$ dato che $\text{MCD}(a, 20) = 5$ allora $a$ deve essere un multiplo di 5 dispari. Quindi $a = 5(2k - 1)$ con $k$ intero positivo.

Se $b = 10$, dato che $\text{MCD}(a, 20) = 10$ allora $a$ deve essere un multiplo di 10 ma non di 20, quindi $a = 10(2k - 1)$ con $k$ intero positivo.

Se $b = 20$ allora $a$ dev'essere un multiplo di 20, quindi $a = 20k$ con $k$ intero positivo.

Quindi tutte le terne di interi positivi $(a, b, c)$ che soddisfano sono $(5(2k-1), 5, 5)$, $(10(2k-1), 10, 5)$, $(20k, 20, 5)$ con $k$ intero positivo. Si può verificare facilmente che soddisfano (farlo!).

**Marking Scheme** Ogni soluzione completa vale **7 punti**. In particolare:

- **2 punti** per mostrare $c = 5$ o $c = 15$, di cui **1 punto** per osservare che $5 \mid c$ e $c \mid 15$
- **1 punto** per dire che $c \mid b$ e $c \mid 20$, quindi escludere $c = 15$
- Se non sono ancora stati assegnati punti, si assegni **1 punto** per osservazioni riguardanti la divisibilità del tipo $\text{MCD}(m, n) \mid m, \text{MCD}(m, n) \mid n$
- **3 punti** per concludere, scrivendo tutte le soluzioni. Di questi, **1 punto** per trovare i 3 valori possibili di $b$. Se in nessuno dei 3 casi vengono descritti infiniti valori di $a$ che soddisfano dare **1 punto**. Se alcune soluzioni mancano oppure se alcune soluzioni non soddisfano (ma i tre valori di $b$ sono esatti) si assegnino **2 punti**
- **1 punto** per la verifica delle soluzioni.

# Soluzione del problema N8

**Testo** Trovare tutte le terne $(m, p, q)$ che soddisfano

$$2^m p^2 + 1 = q^5$$

dove $m > 0$ è un intero e $p$ e $q$ sono numeri primi.

**Soluzione** L'unica la terna che soddisfa le ipotesi del testo è $(1, 11, 3)$.

Possiamo riscrivere l'uguaglianza del testo come:

$$2^m p^2 + 1 = q^5 \iff 2^m p^2 = q^5 - 1 = (q-1)(q^4 + q^3 + q^2 + q + 1)$$

Poiché $q$ è necessariamente dispari, anche $q^4 + q^3 + q^2 + q + 1$ lo è e quindi $2^m \mid (q-1)(q^4 + q^3 + q^2 + q + 1) \Rightarrow 2^m \mid q - 1$.

Inoltre $p$ è primo e $p^2 \mid (q-1)(q^4 + q^3 + q^2 + q + 1)$, quindi $(q-1, q^4 + q^3 + q^2 + q + 1) \in \{(2^m, p^2), (2^m p, p), (2^m p^2, 1)\}$. Osserviamo $q^4 + q^3 + q^2 + q + 1 > q > q - 1$, quindi l'unica possibilità è:

$$\begin{cases} 2^m & = q - 1 \Rightarrow q = 2^m + 1 \\ p^2 & = q^4 + q^3 + q^2 + q + 1 \end{cases} \tag{1}$$

Osserviamo che $q = 2^m + 1 \equiv (-1)^m + 1 \pmod 3$, quindi se $m$ è dispari $3 \mid q$: poiché $q$ è primo, questo ci dice che $q = 3$ o $m$ è pari.

Controlliamo se $q = 3$ fornisce una soluzione sostituendo nel sistema 1: in questo caso abbiamo

$$\begin{cases} 2^m & = 3 - 1 = 2 \Rightarrow m = 1 \\ p^2 & = 3^4 + 3^3 + 3^2 + 3 + 1 = 121 \Rightarrow p = 11 \end{cases}$$

e in effetti troviamo la terna $(1, 11.3)$.
Supponiamo ora $q > 3$: per quanto detto $m = 2M$ con $M \in \mathbb{N}$, quindi stiamo cercando tutti i primi $q$ per cui $q = 4^M + 1$ e $p^2 = q^4 + q^3 + q^2 + q + 1$ ($\Rightarrow$ quindi anche $p$ è dispari)
Osserviamo che $M > 0 \Rightarrow 8 \mid 4^M \Rightarrow q \equiv 1 \pmod 8$, da cui troviamo $p^2 \equiv 1+1+1+1+1 = 5 \pmod 8$, che è assurdo, perché i quadrati dei numeri dispari sono congrui a 1 modulo 8. Quindi non abbiamo soluzioni per $m$ pari.

**Marking Scheme** Ogni soluzione completa vale **7 punti**. In particolare:

- **3 punti** per chi dimostra $q - 1 = 2^m$ e $p^2 = q^4 + q^3 + q^2 + q + 1$ (di cui **2 punti** per dire $2^m \mid q - 1$, e **0.5 punti** per chi osserva che siccome $p$ è primo ci sono 3 modi in cui si possono disporre i fattori $p$);
- **1 punto** per il caso $q = 3$ e la terna corretta;
- **3 punti** per dimostrare che se $q > 3$ non ci sono soluzioni (di cui **1 punto** per chi esclude il caso con $m$ dispari).