Stage Senior

Eserciziario

...è difficile spiegare,
è difficile capire
se non hai capito già...

F. Guccini - *Vedi Cara*

Parte I

Esercizi di base

Di seguito sono raccolti esercizi di livello base sul syllabus olimpico che viene svolto (si spera!) durante lo Stage Senior Basic. Lo scopo di tali esercizi è duplice:

- servono per far pratica con le tecniche e i concetti appresi nelle varie lezioni, in modo da potersi esercitare su cose che poi dovranno essere automatismi per il problem-solver esperto;
- servono per verificare, per chi ha già assistito al livello basic, di aver compreso e imparato ad utilizzare i contenuti fondamentali delle lezioni.

Alcuni esercizi sono ripetitivi e meccanici, una volta che si impara "il trucco"; ovviamente non è allora necessario terminarli. Idealmente, uno studente che vuole accedere al livello Medium dovrebbe riuscire a fare la maggior parte di questi esercizi a colpo d'occhio o comunque quasi immediatamente.

1 Geometria

1.1 Trigonometria

Esercizio 1. Sapendo che $\sin 0 = 0$ e tramite le formule di bisezione, calcolare $\sin\theta$ e $\cos\theta$ per i seguenti valori di θ
$$\theta = \pi/4, \pi/8, 3\pi/8, \pi/16 \, .$$

Esercizio 2. Sapendo che $\sin\pi/6 = 1/2$, tramite le formule note e gli esercizi precedenti, calcolare $\sin\theta$ e $\cos\theta$ per i seguenti valori di θ
$$\theta = \pi/3, \pi/12, 5\pi/12, 7\pi/6, 7\pi/12 \, .$$

Esercizio 3. Esprimere in termini di $\sin\theta$ e $\cos\theta$ le seguenti funzioni trigonometriche
$$\sin(2\theta + \pi/4),\ \sin(3\theta),\ \cos 3\theta,\ \tan 4\theta \, .$$

Esercizio 4. Siano α e β due angoli tali che $\sin\alpha + \sin\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\cos\alpha + \cos\beta = \frac{\sqrt{6}}{2}$. Trovare $\cos(\alpha + \beta)$.

Esercizio 5. Provare che $1 - \cot 23 = \frac{2}{1-\cot 22}$.

Esercizio 6. Calcola $\sin 10 \sin 50 \sin 70$.

Esercizio 7. Calcolare, in termini dei lati e degli angoli del triangolo ABC, le seguenti lunghezze
$$AH,\ HH_a,\ BH_a,\ H_bH_c,\ OM_a,\ OH,\ AI,\ IA',\ IO$$
dove H è l'ortocentro, O è il circocentro, I l'incentro, H_a la proiezione di H su BC (e similmente sono definiti H_b e H_c), M_a il punto medio di BC, A' il punto medio dell'arco BC che non contiene A nella circonferenza circoscritta ad ABC.

Esercizio 8. (Prostaferesi e Werner) Dati α e β due angoli, dimostrare le seguenti formule:
$$\begin{aligned}
\sin\alpha + \sin\beta &= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \\
\cos\alpha + \cos\beta &= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \\
\sin\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)] \\
\sin\alpha\sin\beta &= \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)] \\
\cos\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]
\end{aligned}$$

Esercizio 9. (Stewart) Sia ABC un triangolo e D un punto su BC, allora vale che
$$a \cdot (CD \cdot BD + AD^2) = b^2 \cdot CD + c^2 \cdot BD$$
dove a, b, c sono le lunghezze dei tre lati del triangolo nella notazione standard.

Esercizio 10. (Erone) Sia ABC un triangolo di area A e semiperimetro p, allora vale
$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \, .$$

Esercizio 11. Dati α, β, γ angoli di un triangolo, dimostrare che
$$\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma = \tan\alpha\tan\beta\tan\gamma \, .$$

1.2 Coordinate cartesiane

Esercizio 12. Siano dati quattro punti $X = (1, 1)$, $Y = (0, 2)$, $Z = (2, 1)$, $O = (0, 0)$ nel piano cartesiano. Determinare le equazioni dei seguenti enti geometrici.

G :=Baricentro di XYZ	
r :=retta per X, Y	
Perpendicolare da O a r	
Γ :=Circonferenza di Feuerbach di OXY	
$\{P : PX = 2PY\}$	
Bisettrice di $Z\widehat{O}Y$	

Esercizio 13. Con la notazione dell'esercizio precedente, calcolare i seguenti dati.

Lunghezza di GO	
Area di OXY	
Potenza di Z rispetto a Γ	
$\tan Z\widehat{O}X$	
Raggio della circonferenza per X, Z e tangente a r	

Esercizio 14. Dati tre punti $A = (x_1, x_2)$, $B = (y_1, y_2)$, $C = (z_1, z_2)$ che si suppone formino un triangolo rispondere velocemente alle seguenti:

- Calcolare la lunghezza di AB.
- Calcolare il coefficiente angolare della retta passante per A e B.
- Scrivere in forma esplicita (ovvero esplicitando la dipendenza rispetto alla y) e in forma implicita l'equazione della retta passante per A e B.
- Scrivere l'equazione del fascio di rette passanti per A
- Scrivere l'equazione dell'asse di BC in una delle due forme.
- Scrivere l'equazione della retta parallela ad AB passante per C usando l'equazione del fascio passante per C.
- Scrivere l'equazione della retta perpendicolare a BC passante per A, sempre usando il fascio di rette passanti per A.
- Calcolare la distanza di A da BC.
- Scrivere, rispetto ai coefficienti angolari delle rette AB e AC la tangente dell'angolo in A. (Ragionare sul triangolo AXY dove X e Y sono le intersezioni delle rette AB e AC con l'asse x, e ricordare l'interpretazione geometrica del coefficiente angolare...)
- Scrivere l'equazione della bisettrice dell'angolo in A.
- Scrivere l'equazione della mediana BN dove N è il punto medio di AC.

Esercizio 15. A proposito di circonferenze, considerando i punti A, B e C dell'esercizio precedente

- Scrivere l'equazione della circonferenza di centro A e raggio r. Mostrare che è della forma $x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$ per opportuni α, β e γ.
- Mostrare, ora, che che un'equazione della forma $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ rappresenta una circonferenza, un punto o l'insieme vuoto. Nel caso rappresenti un punto si dica qual è, nel caso rappresenti una circonferenza si dica centro e raggio rispetto a a, b e c.

1.3 Numeri complessi

Esercizio 16. Mostrare che $e^{i2arg(x)} = \frac{x}{\bar{x}}$. Sia g l'applicazione $g(z) = \frac{z}{\bar{z}}$.

Esercizio 17. Usando l'esercizio precedente mostrare che $\angle ABC = \angle XYZ$ come angoli orientati se e solo se $g\left(\frac{a-b}{c-b}\right) = g\left(\frac{x-y}{x-z}\right)$.

Esercizio 18. Mostrare che se ab è una corda nella circonferenza unitaria, allora vale $\frac{a-b}{\bar{a}-\bar{b}} = -ab$.

Esercizio 19. Se c appartiene a una corda ab della circonferenza unitaria, allora $\bar{c} = \frac{a+b-c}{ab}$ (Usare la formula dell'allineamento di tre punti e ricordare che si è sulla circonferenza...)

Esercizio 20. In un sistema di riferimento centrato in o siano dati a, b, c, d tali che $ab = cd$. Ragionando sul significato geometrico del prodotto di numeri complessi mostrare che gli angoli aob e cod hanno la stessa bisettrice.

Cosa vale se $ab = c^2$?

Esercizio 21. Consideriamo, nel piano complesso, un triangolo ABC di vertici $a = i$, $b = 4+i$, $c = 3 + i(1 + \sqrt{3})$. Si trovino i numeri complessi corrispondenti ai punti indicati

Punti medi dei lati	i. ii. iii.
Baricentro	
Incentro	
Piedi delle altezze	i. ii. iii.
Ortocentro	

Simmetrici di x=(3+3i)/2 rispetto ai lati	i. ii. iii.
Excentri	i. ii. iii.
Terzi vertici dei triangoli equilateri con lato AB	i. ii.
Punti medi tra ortocentro e vertici	i. ii. iii.
Punto medio dell'arco AB che non contiene C	
Punti medi tra gli excentri	i. ii. iii.
Punto medio dell'arco AB che contiene C	
Circocentro	

Esercizio 22. Sia ABC un triangolo nel piano complesso, di vertici a, b, c, tutti di modulo 1. Si scrivano le espressioni in numeri complessi dei seguenti punti

Circocentro	
Baricentro	
Ortocentro	
Punti medi dei lati	i. ii. iii.
Simmetrici dell'ortocentro rispetto ai punti medi dei lati	i. ii. iii.
Punti medi degli archi minori	i. ii. iii.
Vertici del triangolo formato dalle tangenti alla circoscritta in A, B, C	i. ii. iii.

Esercizio 23. Siano X, Y, Z i centri di tre quadrati posti esternamente sui lati di ABC. Posto $A = 0, B = 1$ e $C = z$ in un piano complesso, calcolare i numeri complessi corrispondenti a X, Y, Z. Dimostrare che AX è congruente e perpendicolare a YZ.

1.4 Vettori

Esercizio 24. Sia ABC un triangolo e siano $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ i vettori che individuano A, B, C rispetto al circocentro O di ABC. Scrivere l'espressione dei punti elencati rispetto a questi tre vettori.

M_a :=Punto medio di AB	
H :=Ortocentro	
Baricentro	
Incentro	
Simmetrico di H rispetto a M_a	
Punto medio di AH	
Centro della circonferenza di Feuerbach	
Inverso di M_a nella circonferenza circoscritta	

Esercizio 25. Sia ABC un triangolo; calcolare le lunghezze dei seguenti segmenti in termini dei lati di ABC e dei raggi delle circonferenze inscritta e circoscritta.

GO	
IO	
AH	
GI	
Bisettrice da A	

Esercizio 26. Sia P un punto della circonferenza circoscritta ad ABC. Che condizioni deve soddisfare il triangolo affinché $PA^2 + PB^2 + PC^2$ sia indipendente dalla scelta di P?

Esercizio 27. Dati a, b e c scrivere i numeri complessi dei seguenti punti:

- Proiezione di a sulla retta passante per b e c. (Tale punto, detto k, soddisfa $ak \perp bc$ e $k \in bc$, quindi scrivendo le due condizioni...)
- Simmetrico di a rispetto alla retta passante per b e c.
- Supponiamo ora di essere ora in un sistema di riferimento centrato nel circocentro o di abc in cui il circocerchio ha raggio 1 (dunque vale...). Come si semplificano le precedenti espressioni?
- Sempre nell'assunzione precedente scrivere l'intersezione i fra la retta passante per b e c e la tangente in a alla circonferenza. (Tale punto soddisfa $i \in bc$ e $ai \perp oi$, dunque...)

1.5 Geometria sintetica

Esercizio 28. ABC è un triangolo rettangolo in B non isoscele e D è l'ulteriore intersezione del cerchio di diametro BC con l'ipotenusa; DF è la tangente al cerchio in D e F si trova su AB. Dimostrare o negare i seguenti fatti:

- $\angle BFD = 2 \cdot \angle BAC$

- $DF = FA$
- DF biseca l'angolo $\angle BDA$
- DF biseca il segmento BA
- $FD = FB$

Esercizio 29. Sia ABC un triangolo rettangolo e siano $A'B'C'$ i punti simmetrici dei vertici A, B, C rispetto ai lati opposti del triangolo. Sapendo che il triangolo ha area S è possibile determinare l'area di $A'B'C'$? Se sì, quanto vale?

Esercizio 30. Si consideri una generica stella a 5 punte. Quanto vale la somma degli angoli nelle punte?

Esercizio 31. Se P è un punto interno ad ABC triangolo acutangolo tale che i triangoli APB, APC, BPC hanno la stessa area, allora P è uno dei quattro punti notevoli? Quale?

Esercizio 32. (più difficile) Siano $ABCD$ punti allineati in quest'ordine e tali che $BC = 2 \cdot AB$ e $CD = AC$. Dimostrare che:

- la corda comune alle circonferenze che hanno per diametri AC e BD biseca AC
- la corda comune a due qualsiasi circonferenze l'una passante per A e C e l'altra passante per per B e D biseca AC.

Esercizio 33. Sia ABC un triangolo; dimostrare che il baricentro di ABC è anche baricentro del triangolo formato dai punti medi dei lati.

Esercizio 34. Sia ABC un triangolo; dimostrare che l'ortocentro di ABC è incentro del triangolo formato dai piedi delle altezze.

Esercizio 35. Sia ABC un triangolo; dimostrare che l'incentro di ABC è ortocentro del triangolo formato dagli excentri.

Esercizio 36. Siano ABC un triangolo, I il suo incentro, J_A l'excentro opposto ad A, M il punto medio dell'arco BC che non contiene A. Dimostrare che IBI_AC è ciclico e che M è il centro della circonferenza ad esso circoscritta.

Esercizio 37. Siano J_a, J_b, J_c gli excentri di ABC e sia I il suo incentro; detti M il punto medio di J_aJ_b e N il punto medio di IJ_c, dimostrare che il punto medio di MN è il circocentro di ABC.

Esercizio 38. Calcolare le potenze dei seguenti punti rispetto alle circonferenze indicate, in funzione dei lati del triangolo ABC.

Punto	Circonferenza	Potenza
M_a :=punto medio di AB	circoscritta	
L_a :=piede della bisettrice esterna da C	con diametro AB	
H_a :=proiezione di C su AB	con diametro AB	
C	con diametro AB	
simmetrico di M_a rispetto ad A	circoscritta	
A	di Feuerbach	
M_a	inscritta	

2 Teoria dei numeri

2.1 Divisibilità

Esercizio 39. Per ognuna delle seguenti affermazioni dire se è vera o falsa; p denota un numero primo, a, b generici numeri interi.

Affermazione	V o F
Se $p \mid ab$ allora $p \mid a$ o $p \mid b$	
Se $p^2 \mid ab$, allora $p^2 \mid a$ o $p^2 \mid b$	
Se $p \mid a-b$, allora $p \mid a+b$	
Se $p^2 \mid a^3$, allora $p^6 \mid a^6$	
Se $p^2 \mid b^3$, allora $p^2 \mid b$	
Se $p \mid (a,b)$, allora $p \mid (a^2, ab)$	

Esercizio 40. Risolvere negli interi le equazioni

$$x^2 - y^2 = 2000, \qquad \frac{1}{a-1} + \frac{2}{b+3} = 1\ , \qquad mn + 2m - n - 8 = 0\ .$$

Esercizio 41. Determinare per quali valori interi di n le seguenti espressioni sono intere.

$$\frac{n+3}{n+1}\,, \ \frac{3n+10}{n+2}\,, \ \frac{n+7}{2n+1}\,, \ \frac{3a+1}{2a+3}\,, \ \frac{15-3n}{2n^2+1}\ .$$

Esercizio 42. Si può scrivere 7004 come differenza di cubi perfetti?

Esercizio 43. Trovare tutti i numeri primi p tali che $5p + 49$ sia un quadrato perfetto.

2.2 Congruenze: struttura additiva

Esercizio 44. Compilare la seguente tabella, fornendo risposte comprese tra 0 e $m-1$.

Espressione	mod m	Risposta
$7+8$	mod 9	
$100 \cdot 333$	mod 12	
$5 \cdot 81 + 4 \cdot 27 + 9 + 2 \cdot 3$	mod 7	
$2^2 + 2^6 + 2^10$	mod 10	
$3^{1000} + 1000^3$	mod 13	
2211221122^{123456}	mod 11	
$2^{3^4} - 4^{3^2}$	mod 7	

Esercizio 45. Compilare la seguente tabella

x	m	$x^2 \bmod m$	$2^x \bmod m$	$3x + 2x^3 \bmod m$	$(-3)^x \bmod m$
2	5				
3	5				
2	8				
8	9				
7	13				
6	12				

Esercizio 46. Trovare le coppie (x, y) di soluzioni intere delle seguenti equazioni in cui $|x|$ sia il più piccolo possibile ($\emptyset, \emptyset$ se l'equazione non ha soluzioni intere).

$ax + by = m$	x	y
$3x + 2y = 1$		
$5x + 8y = 22$		
$21x + 12y = 15$		
$18y - 10x = 7$		
$64x + 243y = 18$		
$-19x + 7y = 5800$		

Esercizio 47. Trovare gli interi che risolvono le seguenti congruenze

Equazione	mod$m$	Soluzioni
$2x + 1 \equiv 0$	mod7	
$5x + 14 \equiv 0$	mod8	
$x^2 - 2 \equiv 0$	mod17	
$3^x \equiv 2$	mod5	
$x^2 - 3x \equiv -2$	mod11	
$x^3 - 1 \equiv 0$	mod21	

Esercizio 48. Determinare per quali valori di a le seguenti congruenze hanno almeno una soluzione in x.

$x^2 \equiv a \mod 11$	
$x^2 - a \equiv 0 \mod 20$	
$x^3 \equiv a \mod 13$	
$x^3 \equiv 2a \mod 14$	
$x^2 + x - a \equiv 0 \mod 7$	
$ax^2 \equiv 1 \mod 12$	
$x^a \equiv 1 \mod 8$	
$x^a \equiv 1 \mod 10$	
$a^x \equiv 1 \mod 8$	
$a^x \equiv 1 \mod 10$	

Esercizio 49. Dimostrare che per ogni n intero il numero $n(n^2-1)(5n+2)$ è divisibile per 24.

Esercizio 50. Risolvere negli interi l'equazione $n^2 + 5n + 16 = 169y$

Esercizio 51. Risolvere negli interi l'equazione $x^2 = y^5 + 4$.

Esercizio 52. Esiste un quadrato perfetto (cioè il quadrato di un numero naturale) la cui espressione in base 10 termini con le cifre 02? E un cubo perfetto? E in generale, esiste una potenza perfetta (cioè un numero della forma n^k dove n è un intero positivo e k è un intero maggiore di 1) la cui espressione in base 10 termini con le cifre 02?

Esercizio 53. Risolvere per x, y interi l'equazione $x^3 - y^3 = 7005$

Esercizio 54. Risolvere per x, y interi l'equazione $x^2 + 3y = 2$.

Esercizio 55. Risolvere per x, y naturali l'equazione $3^y - x^2 = 41$.

Esercizio 56. Risolvere per x, y naturali l'equazione $3^y - 2^x = 41$.

Esercizio 57. Risolvere per x, y naturali l'equazione $4^x - 2^y = 4094$.

Esercizio 58. Risolvere per x, y, z naturali l'equazione $4^x + 4^y + 4^z = 3645721801$.

Esercizio 59. Risolvere per x, y, z naturali l'equazione $4^x + 4^y + 4^z = 3645721803$.

2.3 Congruenze: struttura moltiplicativa

Esercizio 60. Dimostrare che $a + b + c$ è divisibile per 6 se e solo se $a^3 + b^3 + c^3$ lo è.

Esercizio 61. Sia $A = 5^n + 3^n + 1$. E' vero che se A è primo, allora n è divisibile per 12?

Esercizio 62. Esistono 2013 interi consecutivi, ognuno divisibile per una quinta potenza perfetta (maggiore di 1)?

Esercizio 63. Quante possibilità ci sono per le ultime due cifre di una potenza di 2 scritta in base 10? E per le ultime 3? Cosa succede invece per le ultime due cifre delle potenze di 7?

Esercizio 64. Sia n un intero tale che $n | 2^n + 1$ e p il più piccolo primo che divide n.

- Dimostrare che l'ordine di 2 modulo p divide $2n$

- Dimostrare che l'ordine di 2 modulo p è 2

Esercizio 65. Trovare un n tale che $n|2^n+1$ e che abbia almeno un fattore primo diverso da 3

Esercizio 66. Compilare la seguente tabella, esprimendo il risultato modulo m con un numero tra 0 e $m-1$.

Espressione	Modulo	Risultato
77^{40}	10	
88^{40}	10	
$4^{17}+37^{81}+169^{329}$	15	
$1^{1000}+2^{1000}+\ldots+1000^{1000}$	7	
$13^0+13^1+\ldots+13^{666}$	17	
$13^0+13^1+\ldots+13^{666}$	19	
$4^{55^{666^{7777}}}$	23	

Esercizio 67. Determinare, per ognuna delle seguenti equazioni modulo m, per *quanti* valori di a compresi tra 0 e 100 esiste almeno una soluzione all'equazione.

Equazione	Modulo	Risposta
$a^x \equiv 1$	mod 10	
$x^2 \equiv a$	mod 19	
$x^3 \equiv 2a$	mod 21	
$3^x \equiv a$	mod 30	
$x^3 \equiv 2a$	mod 14	

3 Algebra

3.1 Polinomi

Esercizio 68. Scomporre i seguenti polinomi in fattori irriducibili su $\mathbb{R}$ (si supponga $a \in \mathbb{R}$).

$$x^4 + a^2,\ x^3 - 2x^2 + 3x - 2,\ x^4 - 5x^2 + 6,\ x^6 - a^2\ .$$

Esercizio 69. Scomporre su $\mathbb{R}$ il polinomio

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{1023}$$

Esercizio 70. Qual è la somma dei coefficienti del polinomio $(x^{21} + 4x^2 - 3)^{2013} - (x^{21} + 4x^2 + 3)^{671} + x^{38} + 11x^6$?

Esercizio 71. Nella tabella seguente, α, β, γ sono le radici (reali o complesse) dei polinomi indicati a sinistra; calcolare le espressioni richieste

$x^3 + 4x - 5$	$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 =$
$x^3 - x^2 + x + 1$	$\alpha^{-2} + \beta^{-2} + \gamma^{-2} =$
$2x^3 + 5x^2 + 7x + 8$	$\alpha\beta^2 + \beta\alpha^2 + \beta\gamma^2 + \gamma\beta^2 + \gamma\alpha^2 + \alpha\gamma^2 =$
$x^3 - 2x^2 - 3x - 4$	$\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 =$
$3x^3 + 2x + 1$	$\alpha/\beta + \beta/\gamma + \gamma/\alpha + \alpha/\gamma + \gamma/\beta + \beta/\alpha =$
$5x^3 + 2x^2 - 8$	$\alpha^{-1} + \beta^{-1} + \gamma^{-1} + \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 =$

Esercizio 72. Scomporre i seguenti polinomi in fattori irriducibili su $\mathbb{R}$.

$$x^5 - 1,\ x^6 + 3x^3 - 2,\ x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 1\ .$$

Esercizio 73. Sia $p(x)$ un polinomio a coefficienti interi tale che $p(2) = a$, $p(a) = a + 2$. Determinare i valori possibili per a.

Esercizio 74. Sia α una radice reale del polinomio $x^3 - x + 1$. Quanto vale $\alpha^9 + 3\alpha^6 + 2\alpha^3$?

Esercizio 75. Se $x + y = 30$ e $x^3 + y^3 = 8100$, quanto vale $x^2 + y^2$?

Esercizio 76. Dimostrare l'identità

$$\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} + \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} = 1$$

Esercizio 77. Sia $p(x)$ il polinomio tale che $p(n)$ è la somma delle quinte potenze dei numeri da 1 a n. Quanto vale $p(-1)$? In generale, quanto vale $p(-n)$? Cosa succede se invece consideriamo le potenze quarte?

Esercizio 78. (Identità di Sophie Germain) Dimostrare che

$$x^4 + 4y^4 = (x^2 + 2y^2 + 2xy)(x^2 + 2y^2 - 2xy)\ .$$

Esercizio 79. Dati a, b, c, d interi, dimostrare che $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$ è sempre somma di due quadrati interi.

3.2 Numeri complessi

Esercizio 80. Compilare la seguente tabella

$(1+i)(2+i)$	$=$
$(1-i)/(3i-4)$	$=$
$(2-i/3)^2 - 1/(2+i/3)^2$	$=$
$(1+i)^{2013}/2^{2012}$	$=$
$(1/2+i\sqrt{3}/2)^{16} - i^{18}$	$=$
$(-1+i\sqrt{5})^3 + (1-i\sqrt{5})^3$	$=$

Esercizio 81. Compilare la seguente tabella.

Forma cartesiana	Forma polare
$1+i$	
	$(\cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3))$
$-4\sqrt{3} - 4i$	
	$2(\cos(7\pi/6) + i\sin(7\pi/6))$

Esercizio 82. Calcolare le radici terze e seste dei numeri

$$8i,\ 1+i,\ -3,\ \sqrt{3}-i,\ -9i\ .$$

Esercizio 83. Per ogni n, sia $\xi_n = \cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$. Compilare la seguente tabella

$1+\xi_3$	$=$
$1/\xi_8$	$=$
$\xi_7 + \xi_7^3 + \xi_7^5$	$=$
$\lvert\xi_7^2 + \xi_7^4 + \xi_7^6\rvert$	$=$
$\xi_6^2 - \xi_6 + 1$	$=$
$\xi_9 + \xi_9^2 + \xi_9^4 + \xi_9^5 + \xi_9^7 + \xi_9^8$	$=$
$\xi_{15}^8 - \xi_{15}^7 + \xi_{15}^5 - \xi_{15}^4 + \xi_{15}^3 - \xi_{15}$	$=$
$\xi_5\xi_5^2 + \xi_5\xi_5^3 + \xi_5\xi_5^4 + \xi_5^2\xi_5^3 + \xi_5^2\xi_5^4 + \xi_5^3\xi_5^4$	$=$

3.3 Somme cicliche e simmetriche

Esercizio 84. Scrivi le seguenti espressioni come somme cicliche e simmetriche. Se l'espressione non è simmetrica, disegna una faccina triste nella seconda colonna.

Espressione	Ciclica	Simmetrica
$ab + bc + ca$ (Esempio)	$\sum_c ab$	$\frac{1}{2}\sum_s ab$
$a^3 + b^3 + c^3$		
$ab + bc + cd + da$		
$a^2b + b^2c + c^2a$		
$a^2b + ab^2$		

Esercizio 85. Scrivi per esteso le seguenti somme cicliche/simmetriche in tre variabili a, b, c.

Espressione	per esteso
$\sum_c ab$ (Esempio)	$ab + bc + ca$
$\sum_c \frac{a^2}{a+b}$	
$\sum_c \frac{a^2}{a+c}$	
$\sum_s \frac{a^2}{a+c}$	
$\sum_c (a^3 - abc)$	
$\sum_s (a^3 - \frac{1}{2}abc)$	

Esercizio 86. Calcola le seguenti espressioni in tre variabili a, b, c. Scrivi il risultato come somma simmetrica se possibile, se no ciclica.

Espressione	risultato
$\sum_c a + \sum_c a$ (Esempio)	$\sum_s a$
$\sum_c a^2b + \sum_c a^2c$	
$(\sum_c a)(\sum_c (a^2 - ab))$	
$(\sum_c a^2b)(\sum_c a)$	
$(\sum_c a^2)(\sum_c ab)$	
$(\sum_c a^2b)(\sum_c a^2c)$	
$(\sum_s ab)(\sum_c bc)$	

3.4 Disuguaglianze

Esercizio 87. Quanto vale come minimo $a^4 + b^2 + c$, sapendo che a, b, c sono reali positivi con $abc = 1$?

Esercizio 88. Dimostrare (in almeno due modi diversi?) che se a, b, c sono reali positivi, allora $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3$.

Esercizio 89. Trovare il minimo delle espressioni riportate in tabella, sotto i vincoli indicati. Tutte le variabili sono da intendersi reali positive.

Espressione	Vincolo	Minimo
$x + 1/x$		
$x^4 + 4y^4$	$xy = 3$	
$x + 2y + 3z$	$x^3y^2z = 1$	
$x^4 + y^2 + z^4$	$xyz = 2$	
$x + 8y + 4z$	$4x^{-1} + 2y^{-1} + z = 3$	
$(x^2 + y^2 + z^2)/(x + y + z)$	$xyz = 1$	
$(x^2y + y^2z + z^2x)(xy^2 + yz^2 + zx^2)$	$xyz = 2$	
$x^2/(y + z) + y^2/(x + z) + z^2/(x + y)$	$xyz = 1/2$	
$(x_1 + \ldots + x_n)(x_1^{-1} + \ldots + x_n^{-1})$		
$xy/z + yz/x + zx/y$	$x + y + z = 7$	

3.5 Funzionali

Esercizio 90. Sia f una funzione da $\mathbb{R}$ in sé tale che $f(x + f(y)) = f(x) + y$ per ogni x, y. Quali valori può assumere $f(100)$?

Esercizio 91. Sia f una funzione da $\mathbb{R}$ in sé. Supponendo che f rispetti le seguenti equazioni, dire se si può dedurre che f è iniettiva / surgettiva:

Equazione	Iniettiva?	Surgettiva?
$f(f(x)) = x$		
$f(x + y) + f(x - y) = 2f(x) + 2f(y)$		
$f(xy) = xf(y)$		
$f(x^2) = x^2$		
$f(f(y) + yf(x)) = f(y) + xf(y)$		
$f(xf(y) + f(x)) = 2f(x) + xy$		
$(x + y)(f(x) - f(y)) = (x - y)(f(x) + f(y))$		

Esercizio 92. Trovare, per ognuna di queste equazioni funzionali, le soluzioni polinomiali.

$f(xy+f(x+y)) = xy+f(x)+f(y)$	
$(f(x + y) - f(x) - f(y))x^3y^3 = 4(x^2 + y^2)f(xy) + 6xyf(x)f(y)$	
$f(xf(x) + 2y) = f(x^2) + f(y) + x + y - 1$	
$f(x + y) + f(x)f(y) = f(xy + 1)$	

3.6 Ricorrenze

Esercizio 93. Determinare una formula chiusa per le somme di seguito riportate.

$\sum_{n=1}^{200} n$	
$\sum_{n=1}^{100} n^2$	
$\sum_{n=3}^{50} \binom{n}{2}$	
$\sum_{n=1}^{20} 4^n$	
$\sum_{n=1}^{30} n2^n$	
$\sum_{n=1}^{1000}(n^2+n)^{-1}$	
$\sum_{n=1}^{40} n^{-1}3^n$	

Esercizio 94. Sia a_n una successione tale che $a_1 = 1$ e $a_{n+1} = 7a_n + 1$. Quanto vale il minimo n tale che a_n sia divisibile per 30?

Esercizio 95. Sia $b_{n+1} = (n+1)b_n - nb_{n-1}$. Dimostrare che - per ogni k fissato - per n abbastanza grande, b_n è costante modulo k.

Esercizio 96. Trovare una formula esplicita per il termine generico delle seguenti successioni.

Ricorrenza	Dato iniziale	Formula esplicita
$a_n = 2a_{n-1}$	$a_0 = 1$	
$a_n = 2a_{n-1}$	$a_1 = 3$	
$a_n = 2a_{n-1} - 1$	$a_0 = 1$	
$a_n = 2a_{n-1} - 1$	$a_0 = 2$	
$a_n = -a_{n-1} + \frac{n}{2}$	$a_0 = 1$	
$a_n = \frac{1}{2}a_{n-1} + \frac{1}{n}$	$a_0 = 0$	

4 Combinatoria

4.1 Conteggi

Esercizio 97. Si calcoli il numero dei possibili anagrammi per ognuna delle seguenti parole: caso, casa, satiro, teleologico, pappappero, intirizzito, disossatelo.

Esercizio 98. Si calcoli il numero degli anagrammi della parola PERDENTI per ognuna delle condizioni aggiuntive date in tabella.

senza vocali adiacenti	
con esattamente una coppia di vocali adiacenti	
con P e N non adiacenti	
con R e E adiacenti	
senza consonanti isolate	

Esercizio 99. Otto amici vanno al cinema. Sono rimasti 5 posti in una fila e 3 in quella davanti.

1. In quanti modi diversi possono sedersi?
2. In quanti modi diversi possono sedersi sapendo che Alberto e Barbara non vogliono stare vicini?
3. In quanti modi diversi possono sedersi sapendo che Francesco e Ludovico vogliono stare vicini?
4. In quanti modi diversi possono sedersi sapendo che Roberto vuol stare nella fila più vicina allo schermo?
5. In quanti modi diversi possono sedersi sapendo che Massimo vuol stare nella fila più lontana dallo schermo?

Esercizio 100. Pescando 5 carte da un mazzo di 40 carte, qual è la probabilità di trovarsi in mano:

1. una coppia?
2. un tris?
3. una doppia coppia?
4. un full?
5. un poker?

Esercizio 101. Dire con quanti zeri termina l'espressione decimale di 2013!

Esercizio 102. Un millepiedi ha mille piedi, mille calzini indistinguibili e mille scarpe indistinguibili. In quanti ordini diversi può infilarsi calzini e scarpe, considerando che chiaramente un piede va infilato prima in un calzino e poi in una scarpa?

Esercizio 103. Che posizione occupa la parola *coccodrillo* nella lista di tutti i suoi anagrammi disposti in ordine alfabetico?

Esercizio 104. Quanti sono i numeri che, scritti in base 10, hanno 10 cifre e queste sono ordinate in senso (debolmente) crescente?

Esercizio 105. Quanti sono i percorsi *monotoni* che partendo da $(0,0)$ arrivano a (n,m)? E partendo da $(0,0,0)$ arrivano a (m,n,p)?

Esercizio 106. Quanti sono i percorsi *monotoni* che partendo da $(0,0)$ arrivano a $(10,10)$ senza passare per $(5,5)$?

Esercizio 107. Quanti sono i percorsi *monotoni* che partendo da $(0,0)$ arrivano a (n,m) con $n \geq m$ senza mai toccare punti (p,q) con $p < q$?

Esercizio 108. In quanti modi è possibile scrivere n-coppie di parentesi (aperta e chiusa) in modo da rispettare le chiusure nel modo consueto (alcuna parentesi può essere chiusa prima che sia aperta)?

Esercizio 109. In quanti modi è possibile triangolare un n-agono convesso?

Esercizio 110. 3 uomini e 5 donne si siedono ad un tavolo tondo in modo che non ci siano due uomini vicini. In quanti modi possono farlo?

Esercizio 111. In quanti modi un intero n può essere scritto come $a_1 + \cdots + a_k$ dove tutti gli a_i sono interi non negativi?

Esercizio 112. In quanti modi un intero n può essere scritto come somma di 3 interi non negativi (a meno dell'ordine)?

Esercizio 113. In quanti modi si possono colorare i lati di un ottagono regolare con 8 colori uno per lato? E usando solo bianco e nero? (due colorazioni vanno considerate indistinguibili se esiste una rotazione che manda una nell'altra)

Esercizio 114. Una pedina è inizialmente posta nella casella più a sinistra di uno schema 1×3. Una mossa consiste nello spostare la pedina in una casella che disti al più 1 da quella di partenza (eventualmente lasciandola ferma). Detto s_n il numero dei possibili percorsi seguiti dalla pedina che impiegano n mosse, mostrare che $s_{2n} = 2s_n^2 + 2s_{n-1}s_{n+1}$.

Esercizio 115. Una pulce saltella da un vertice all'altro di un tetraedro. Calcolare ricorsivamente il numero di modi con cui può tornare nel vertice di partenza dopo n salti. Fare lo stesso usando un cubo.

Esercizio 116. Una stringa è composta di n lettere. Quanti sono i possibili anagrammi di questa parola per cui ogni lettera dista al più 1 dalla posizione che occupava in origine?

Esercizio 117. Una stringa è composta di n lettere. Quanti sono i possibili anagrammi di questa parola per cui ogni lettera dista al più 2 dalla posizione che occupava in origine? Scrivere una ricorsione in n per il numero a_n dei possibili anagrammi.

4.2 Double Counting

Esercizio 118. Sia X un insieme di n elementi e $Y = \mathcal{P}(X)$ l'insieme delle sue parti. Calcolare le cardinalità dei seguenti insiemi:

$$\{(A,B) \in Y^2 : A \cap B = \emptyset\}$$
$$\{(A,B,C) \in Y^3 : A \cap B \cap C = \emptyset \wedge A \setminus (B \cup C) = \emptyset\}$$
$$\{(A,B) \in Y^2 : |A \cap B| < 3 \wedge |(A \cup B)^c| = 1\}$$

Esercizio 119. Sia X un insieme di n elementi e $Y = \mathcal{P}(X)$ l'insieme delle sue parti. Calcolare le seguenti somme:

$$\sum_{(A,B)\in Y^2} |A \cup B| \qquad \sum_{(A,B,C)\in Y^3} |A \cap B \cap C|$$
$$\sum_{(A,B,C)\in Y^3} |A \cap B \cup C^c| \qquad \sum_{(A,B,C)\in Y^3} |A \cap B \cap C|^2$$

Esercizio 120. Calcolare le seguenti somme:

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k^2 \qquad \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k^3$$
$$\sum_{k=0}^{r} \binom{n+k}{k} \qquad \sum_{i=1}^{n} i(n+1-i)$$

Esercizio 121. Dimostrare le seguenti identità:

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{n-s}\binom{n-1}{k} = \frac{n}{s}\binom{n-1}{k-1}$$
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$
$$\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{m}{k-i} = \binom{m+n}{k}$$
$$\sum_{k=0,k \text{ pari}}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=1,k \text{ dispari}}^{n} \binom{n}{k}$$

Esercizio 122. Dimostrare che esistono solo 5 solidi platonici.

Esercizio 123. Nella regione di Matelandia ci sono 20 città collegate da alcune linee aeree. Ciascuno dei 18 aerei di linea esistenti visita (periodicamente) 5 città distinte in modo consecutivo e fissato. Sappiamo che in ogni città esistono almeno 3 aerei che la visitano e che, per ogni coppia di città, al massimo un aereo le collega direttamente. Dimostrare che, comunque scelta una città di partenza e una di arrivo, è sempre possibile viaggiare dall'una all'altra usando gli aerei di Matelandia.

Esercizio 124. Ad uno stage prendono parte 72 stagisti. Al test iniziale ciascuno risolve almeno un esercizio. Dimostrare che esiste un insieme non vuoto di problemi tale che il numero di stagisti che li ha risolti tutti è pari.

4.3 Invarianti

Esercizio 125. Si scrivono alla lavagna gli interi da 1 a n e si effettua la seguente mossa: si scelgono 2 interi a e b, si cancellano, e al loro posto si scrive $|a-b|$. Dire per quali n, alla fine si ottiene sempre un numero dispari.

Esercizio 126. Un cavallo degli scacchi si muove lungo una scacchiera 47×47. È possibile che riesca a percorrere la scacchiera visitando tutte le caselle una e una sola volta?

Esercizio 127. Sui vertici di un 2014-agono regolare vi sono scritti alcuni numeri interi, all'inizio tutti nulli tranne sui vertici A_1 e A_3 dove c'è un 1. Una mossa consiste nell'aumentare di 1 due vertici adiacenti o due vertici opposti. Determinare se esiste una successione finita di mosse che porta ad avere tutti i vertici con lo stesso numero.

Esercizio 128. Sono dati i 3 numeri $\{10, 8, 15\}$ e ad ogni mossa si rimpiazzano 2 numeri a e b tra quelli dati con $\frac{3a-4b}{5}$ e $\frac{4a+3b}{5}$. È possibile ottenere dopo un numero finito di mosse la terna $\{12, 13, 14\}$? E ottenere dei numeri $\{x, y, z\}$ con $|x-12|, |y-13|, |z-14| < 1$?

Esercizio 129. In una scatola ci sono alcune palline di colore bianco, giallo e rosso; ad ogni mossa si possono scambiare 2 palline di un colore con una di un altro colore tra quelli dati. Partendo con 7 bianche, 9 gialle e 15 rosse quali configurazioni si possono raggiungere?

Esercizio 130. In ogni vertice di un n-agono regolare c'è una pedina e con una mossa se ne possono scegliere 2 qualsiasi e spostarne una in un senso e l'altra in quello contrario. È possibile portarle in un unico vertice?

Esercizio 131. In ogni vertice di un n-agono regolare ci sono alcune pedine. Su un vertice ce n'è una, su quello successivo 2, su quello ulteriore 3 e cosìvia fino all'ultimo dove ce ne sono n. Ancora una volta con una mossa si possono scegliere 2 qualsiasi pedine e spostarne una in un senso e l'altra in quello contrario. In quali vertici è possibile spostarle tutte?

Esercizio 132. Sono date 2014 carte ciascuna con una faccia bianca e una nera. All'inizio sono disposte in fila tutte girate dal lato bianco. Con una mossa si può scegliere un blocco da 50 con la più a sinistra girata sul bianco e capovolgerle tutte. Dimostrare che dopo un po' di mosse non si può più eseguirne alcuna.

Esercizio 133. Alberto e Barbara giocano al seguente gioco: all'inizio ci sono varie pile di monete sul tavolo e ciascuno, a turno, può effettuare una mossa a scelta tra

1. togliere una moneta da una pila
2. dividere una pila in 2 pile ciascuna con almeno una moneta.

Quando uno non può più fare una mossa, il gioco finisce. Dimostrare che il gioco termina.

Esercizio 134. Una scacchiera 8×8 è colorata in bianco e nero al solito modo. Posso applicare le seguenti trasformazioni:

- scegliere una riga e invertire il colore di tutte le sue caselle,
- scegliere una colonna e invertire il colore di tutte le sue caselle,
- scegliere un quadrato 2×2 e invertire il colore di tutte le sue caselle.

Posso ottenere la situazione in cui solo la casella in alto a sinistra è nera?

Esercizio 135. In un pentagono (convesso) sono tracciate tutte le diagonali. Ad ogni intersezione tra lati o diagonali c'è una lampadina, inizialmente accesa. Con una mossa è possibile scegliere un segmento (sia lato che diagonale) e cambiare lo stato a tutte le lampadine che si trovano su di esso. È possibile spegnerle tutte?

Esercizio 136. Inizialmente è presente un pallino sopra il punto $(0, 0)$ del piano. Se c'è un pallino sopra il punto (s, t) è possibile cancellarlo da (s, t) e aggiungerne uno in $(s+1, t)$ e uno in $(s, t+1)$ (se non c'è già in uno di questi punti). È possibile cancellare tutti i pallini dai punti (x, y) con $x + y \leq 3$?

4.4 Colorazioni

Esercizio 137. È possibile formare un rettangolo usando i 6 trimini del classico tetris?

Esercizio 138. Per quali interi positivi (n, m) è possibile tassellare un rettangolo $n \times m$ con tessere 1×6? E usando tessere $1 \times k$?

Esercizio 139. Un quadrato 7×7 è ricoperto da 16 tessere 1×3 non sovrapposte. In quali caselle può capitare l'unico buco 1×1 rimanente?

Esercizio 140. Un quadrato 6×6 è tassellato con tessere 2×1. Dimostrare che si può tagliare in 2 rettangoli senza tagliare nessuna tessera.

4.5 Principio dell'estremale

Esercizio 141. Nel piano sono dati n punti rossi e n punti verdi, a 3 a 3 non allineati. Dimostrare che esistono n segmenti che non si intersecano, ciascuno dei quali congiunge 2 punti di colore diverso.

Esercizio 142. Su tutti i punti a coordinate intere nel piano viene scritto un numero naturale in modo che ciascuno sia la media dei 4 vicini. Dimostrare che tutti i numeri sono uguali.

Esercizio 143. Un numero dispari di cowboy, tutti che giacciono su un piano, si trovano a litigare per un bottino e tutti si sparano vicendevolmente e contemporaneamente, ciascuno puntando al più vicino (non ci sono muri od ostacoli tra loro e le loro distanze a 2 a 2 sono tutte diverse). Dimostrare che almeno uno sopravvive. Dimostrare che i segmenti seguiti dai proiettili non formano alcuna spezzata chiusa.

Parte II
Problemi per le sessioni

In questa seconda parte, raccogliamo gli esercizi che hanno tradizionalmente accompagnato le sessioni dello stage dal 2002 in poi; tali problemi saranno spesso inseriti nelle lezioni come esempi oppure dati alla fine come esercizi. In coda ad ogni sessione sono segnalati problemi IMO che si possono affrontare con i contenuti di quella sessione.

Inoltre, tra i problemi segnalati di seguito (e tra i numeri A1 e B1 delle ultime 5 IMO) saranno selezionati i 4 problemi "noti" del Test Finale; lo scopo di questa scelta non è di farvi studiare a memoria delle soluzioni (e di dannarvi per trovarle, magari durante le notti dello Stage), ma di obbligarvi al confronto con problemi di un certo livello che raccolgono tecniche "tipiche" del problem-solving olimpico.

Problemi per il TF: A1-11, A2-10, A3-10, C1-10, C2-08, G1-12, G2-10, G3-12, N1-08, N2-10.

1 Induzione e Pigeonhole

1. Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha che $(\sqrt{3})^{n^2} \geq n!$.

2. Dimostrare che ogni intero positivo si può scrivere come somma di due o più numeri di Fibonacci distinti.

3. Ad uno stage partecipano 24 ragazzi. Successivamente ogni partecipante decide di scrivere a 12 altri partecipanti.

   Dimostrare che c'è una coppia di ragazzi che si scrivono reciprocamente.

4. Determinare il più piccolo intero n con questa proprietà: comunque si scelgano n interi positivi, tutti aventi solo divisori primi ≤ 30, ne esistono sicuramente almeno due il cui prodotto è un quadrato perfetto.

5. Determinare il più piccolo numero reale positivo a per cui è possibile ricoprire un triangolo equilatero di lato 12 usando 5 triangoli equilateri di lato a.

6. Dimostrare che, dati 28 punti in una sfera di raggio 2, ve ne sono almeno 2 la cui distanza è al più 2.

7. Dato un sottoinsieme non vuoto $A \subseteq \{1, \ldots, 2002\}$ si indichi con P_A il reciproco del prodotto degli elementi di A.

   Determinare la somma di tutti i P_A.

8. Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha che

$$\frac{1}{4} + \frac{2}{4^2} + \frac{3}{4^3} + \ldots + \frac{n}{4^n} < \frac{1}{2}.$$

IMO Problems: 1972/1, 1964/4, 1968/6, 1976/5, 1985/4.

2 Algebra 1

1. Calcolare $(\sqrt{3}+i)^{2002}$.

2. Determinare quante sono le radici 2002-esime di $\sqrt{3}+i$ contenute nel terzo quadrante.

3. Calcolare
$$\cos 15^\circ + \cos 35^\circ + \cos 55^\circ + \ldots + \cos 335^\circ + \cos 355^\circ.$$

4. Fattorizzare sui reali il polinomio
$$x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1.$$

5. Calcolare
$$\sum_{k=1}^{2002} k i^k.$$
Illustrare geometricamente il risultato ottenuto.

6. Sia ω una radice settima non reale di -1. Determinare il coefficiente di x^7 nel polinomio
$$\prod_{k=1}^{2002} (x - \omega^k).$$

7. Sia k un numero naturale. Determinare un polinomio $P(x)$ tale che $P(n) = 2^n$ per ogni $0 \le n \le k$ intero. Esiste $P(x)$ polinomio tale che $P(n) = 2^n$ per ogni n naturale?

8. Sia $P(x)$ un polinomio tale che $P(0) = 2$, $P(1) = 4$, $P(2) = 6$, $P(3) = 56$. Determinare il resto della divisione di $P(x)$ per
$$x(x-1)(x-2)(x-3).$$

9. Determinare i coefficienti di un polinomio monico di quarto grado in cui la somma delle radici vale 1, la somma dei quadrati delle radici vale 2, la somma dei cubi delle radici vale 3, la somma delle quarte potenze delle radici vale 4.

10. Determinare il massimo numero di radici intere che può avere un polinomio $P(x)$ a coefficienti interi tale che $P(0)$ e $P(13)$ sono interi dispari.

11. Un polinomio $P(z)$ a coefficienti complessi ha grado 2002 e ha le radici (complesse) a due a due distinte.

    Dimostrare che esistono numeri complessi $a_1, \ldots, a_{2002}$ tali che, se si definiscono i polinomi $P_n(z)$ mediante la ricorrenza
$$P_1(z) = z - a_1, \qquad P_{n+1}(z) = [P_n(z)]^2 - a_n,$$
    allora $P(z)$ divide $P_{2002}(z)$.

IMO Problems: 1974/6, 1988/4, 1963/5, 1969/2, 1976/2.

3 Algebra 2

1. Gli n numeri reali positivi $x_1, \ldots, x_n$ hanno media armonica, geometrica, aritmetica, rispettivamente, uguali a 6, 7, 8. Per ogni $i = 1, \ldots, n$ definiamo
$$X_i = \prod_{j \neq i} x_j.$$
Determinare le medie aritmetica, geometrica e armonica degli X_i.

2. Un ciclista ha percorso una strada lunga 10 km. Sapendo che al k-esimo km il ciclista ha tenuto una velocità costante di 2^k (in qualche unità di misura), determinare la velocità media sull'intero percorso. Interpretare il risultato in termini di medie.

3. Le nove cifre $1, 2, \ldots, 9$ sono scritte di seguito a formare un numero N di nove cifre. Determinare il valore massimo e minimo che può assumere la somma dei 7 numeri di tre cifre ottenuti considerando terne di tre cifre consecutive nella rappresentazione decimale di N.

4. Trovare il valore massimo di x^5yz sapendo che x, y, z sono numeri reali positivi tali che $x + y + z = 1$.

5. Siano $x_1, \ldots, x_n$ numeri reali e siano $y_1, \ldots, y_n$ numeri reali. Sapendo che
$$\frac{x_1\sqrt{y_1} + \ldots + x_n\sqrt{y_n}}{n} = 9, \qquad \frac{y_1 + \ldots + y_n}{n} = 8,$$
determinare il minimo valore possibile per la media quadratica di $x_1, \ldots, x_n$.

6. Determinare la migliore costante C tale che
$$(x - y)(2y - x) \leq Cxy$$
qualunque siano in numeri reali x, y tali che $0 \leq y \leq x \leq 2y$.

7. Determinare per quali valori del parametro a esistono numeri reali positivi x e y tali che
$$a(3x + 2y) = y + \sqrt{2a^2(4x^2 + y^2)} + \sqrt{2a^2x^2 + 2(a-1)^2y^2}.$$

8. Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni convesse nell'intervallo $[0, 1]$, con $g(x)$ positiva.

   Determinare quali delle seguenti funzioni sono sicuramente convesse nell'intervallo $[0, 1]$:
$$f(x) + g(x), \qquad f^2(x), \qquad f(x) \cdot g(x), \qquad \frac{f(x)}{g(x)}, \qquad f(g(x)).$$
Determinare come cambia la risposta al punto precedente se si assume che $f(x)$ sia anche positiva e/o crescente.

9. Siano $x_1, \ldots, x_n$ numeri reali positivi tali che $x_1 + \ldots + x_n = 1$. Dimostrare che
$$\frac{x_1}{\sqrt{1 - x_1}} + \ldots + \frac{x_n}{\sqrt{1 - x_n}} \geq \sqrt{\frac{n}{n-1}}$$
in almeno tre modi diversi, usando

- le disuguaglianze di Chebycheff e delle medie;
- l'identità $x(1-x)^{-1/2} = (1-x)^{-1/2} - (1-x)^{1/2}$ e le medie;
- le disuguaglianze di convessità.

10. Siano a, b, c numeri reali positivi. Dimostrare che

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

in almeno tre modi diversi, usando

- la sostituzione $a+b=x$, $b+c=y$, $c+a=z$;
- Cauchy Schwarz;
- le disuguaglianze di convessità.

Determinare quindi le migliori costanti C_1, C_2 tali che

$$C_1 \leq \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} \leq C_2.$$

IMO Problems: 1975/1, 1978/5, 1972/4, 1968/3, 1974/5, 1979/5, 1971/1, 1969/6.

4 Algebra 3

1. Dimostrare che non esistono funzioni $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tali che
$$f(f(n)) = n + 1$$
per ogni $n \in \mathbb{Z}$.

2. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione tale che
$$f(f(x)) = f(x) + 8$$
per ogni x reale, e $f(x) \geq 0$ per ogni $x \geq 0$.

   Determinare il minimo valore possibile per $f(2002)$.

3. Sia a un parametro reale, e sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione tale che
$$f(x^2 + axy + y^2) = x^2 + axy + y^2$$
per ogni x e y reali.

   Determinare, in funzione di a, i possibili valori di $f(1)$ e $f(-1)$.

4. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione monotona tale che
$$f(x + f(y)) = f(x) + y$$
per ogni x e y reali.

   Determinare i possibili valori di $f(100)$.

5. Una pulce salta tra i vertici di un tetraedro regolare. Ogni volta che si trova in un vertice sceglie uno dei tre spigoli che partono da quel vertice (tutti hanno la stessa probabilità di essere scelti) e salta verso l'altro estremo di quello spigolo.

   Determinare la probabilità che la pulce si ritrovi al punto di partenza dopo 2002 salti.

6. Una successione è definita per ricorrenza da
$$x_0 = 1, \qquad x_{n+1} = 6x_n - 2\sum_{i=0}^{n} x_i.$$
Determinare x_{2002}.

7. Determinare quanti sono gli interi n tali che $2000 \leq n \leq 2010$ e tali che 7 è un divisore della parte intera di
$$\frac{\sqrt{2}}{4}(1 + \sqrt{2})^n.$$

8. Determinare tutte le funzioni $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ tali che
$$f(x + y) + f(x - y) = 2f(x) + 2f(y)$$
per ogni x e y razionali.

9. Dato un numero intero a, definiamo la successione per ricorrenza

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n, \qquad x_0 = a, \; x_1 = 1.$$

Dimostrare che 4091 è un divisore di $x_{4091} - 1$ (si ricorda che 4091 è un numero primo).

10. Trovare tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che

$$f(xf(x) + f(y)) = [f(x)]^2 + y$$

per ogni x, y reali.

IMO Problems: 1979/6, 1992/2, 1986/5, 1990/4, 1994/5, 1996/3.

5 Combinatoria 1

1. Si scelgono a caso 7 interi distinti nell'insieme $\{1, 2, \ldots, 20\}$.

   Determinare la probabilità che il secondo più piccolo sia 5.

2. Determinare quanti sono i divisori positivi di

$$69^5 + 5 \cdot 69^4 + 10 \cdot 69^3 + 10 \cdot 69^2 + 5 \cdot 69 + 1.$$

3. Consideriamo una scacchiera 5×5.

   Determinare quanti sono i cammini che partono dal quadratino in alto a sinistra, arrivano nel quadratino in basso a destra, procedono sempre verso il basso o verso destra, e non passano mai per il quadratino centrale.

4. Al termine della "regular season" di un campionato, le prime 7 classificate si sfidano in incontri di spareggio secondo questa regola. La n.7 incontra la n.6: la perdente ottiene il settimo premio, la vincente sfida la n.5. Dopo questo nuovo incontro, la perdente ottiene il sesto premio e la vincente sfida la n.4, e così via.

   Determinare in quanti modi le sette squadre possono ricevere i sette premi.

5. Un laboratorio ha a disposizione una bilancia a due piatti e n pesi da, rispettivamente, 1, 3, 9, ..., 3^{n-1} grammi, i quali ovviamente possono essere posti indifferentemente su ogni piatto della bilancia.

   Determinare il numero di oggetti di peso diverso che si possono pesare con questa apparecchiatura.

   Determinare come cambia la risposta al punto precedente se i pesi sono potenze di due o potenze di quattro.

6. In un torneo, ogni giocatore incontra una ed una sola volta tutti gli altri giocatori. In ogni incontro, il vincitore guadagna 2 punti, il perdente 0 punti, mentre in caso di pareggio ogni giocatore riceve 1 punto. A torneo concluso risulta che esattamente la metà dei punti totalizzata da ciascun giocatore è stata guadagnata in partite giocate contro i 10 ultimi classificati (in particolare, ciascuno dei 10 giocatori con il punteggio più basso ha guadagnato metà dei suoi punti incontrandosi con gli altri 9 ultimi classificati).

   Determinare il numero di giocatori che hanno partecipato al torneo.

7. Sia F l'insieme di tutte le n-uple $(A_1, \ldots, A_n)$, dove ogni A_i è un sottoinsieme di $\{1, 2, \ldots, 1998\}$.

   Calcolare

$$\sum_{(A_1,\ldots,A_n)\in F} |A_1 \cap \ldots \cap A_n|, \qquad \sum_{(A_1,\ldots,A_n)\in F} |A_1 \cup \ldots \cup A_n|.$$

8. Calcolare

$$\sum_{k=1}^{100} \left[10\sqrt{k}\right] + \left[\frac{k^2}{100}\right].$$

9. Ad uno stage partecipano n ragazze $G_1, \ldots, G_n$ e $2n-1$ ragazzi $B_1, \ldots, B_{2n-1}$. Per ogni $i = 1, \ldots, n$, la ragazza G_i conosce i ragazzi $B_1, \ldots, B_{2i-1}$ e nessun'altro.

Dimostrare che il numero di modi di scegliere r coppie ragazzo-ragazza in modo che i componenti di ogni coppia si conoscano è

$$\binom{n}{r} \frac{n!}{(n-r)!}.$$

10. Ad un party prendono parte $12k$ persone. Ciascuna di esse stringe la mano ad esattamente $3k+6$ persone. Si sa che esiste un numero N tale che, per ogni coppia di persone A, B, il numero di invitati che stringe la mano sia ad A sia a B è esattamente N.

    Determinare per quali valori (interi) di k si può realizzare questa situazione.

11. n partecipanti prendono parte ad una gara a punti. Finita la gara si stila la classifica in base al punteggio ottenuto da ciascuno (cosicché possono esserci dei pari merito). Detto A_n il numero di classifiche possibili, si scriva una ricorsione per la successione A_n.

12. Dati interi positivi $n > r$, sia

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ r \end{matrix} \right\} = |\{\text{partizioni di } \{1, \dots, n\} \text{ in } r \text{ sottoinsiemi non vuoti}\}|.$$

    Dimostrare che:

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} n \\ n \end{matrix} \right\} = 1$$

$$\left\{ \begin{matrix} n+1 \\ r \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} n \\ r-1 \end{matrix} \right\} + r \left\{ \begin{matrix} n \\ r \end{matrix} \right\}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^r = \sum_{i=1}^{r} \left\{ \begin{matrix} r \\ i \end{matrix} \right\} i! \binom{n+1}{i+1}$$

13. Data una successione $a_1, \dots, a_n$ chiamiamo r-somma una qualsiasi somma di r termini successivi. Fissati degli interi (t, q), quanti termini può avere, al massimo, una successione tale che ogni t-somma sia negativa e ogni q-somma sia positiva?

IMO Problems: 1974/1, 1981/2, 1972/3, 1998/2, 1966/1.

6 Combinatoria 2

1. In una popolazione il 40% degli individui è obeso, il 30% mangia 1 Kg di cioccolato al giorno e di questi l'80% sono obesi.

   Determinare la probabilità che un obeso mangi almeno 1 Kg di cioccolato al giorno.

2. Determinare per quali n è possibile piastrellare una scacchiera $n \times n$ usando piastrelle a forma di "T" composte da quattro quadratini.

3. Consideriamo una scacchiera 11×11 privata della quarta casella della riga superiore.

   Determinare se è possibile costruire un percorso che visiti una ed una sola volta ogni casella e torni infine al punto di partenza (è possibile solo muoversi tra caselle che abbiano un lato in comune).

4. Il sacchetto A ed il sacchetto B contengono 3 palline nere e 5 bianche, il sacchetto C contiene 5 palline nere e 3 bianche. Si sceglie a caso un sacchetto, e poi da questo sacchetto vengono estratte (sempre a caso) due palline, reimbussolando la pallina tra la prima e la seconda estrazione.

   Sapendo che le due palline estratte sono nere, determinare la probabilità che si sia scelto il sacchetto A.

5. La regione di Matelandia è costituita da un numero finito di città. Per garantire gli spostamenti, sono state costruite delle strade che tuttavia, per motivi di budget, sono strette e a senso unico. In ogni caso, per ogni coppia di città, esiste sempre un tragitto (non necessariamente diretto) che le collega in almeno uno dei due versi.

   Dimostrare che esiste almeno una città dalla quale si può raggiungere qualsiasi altra città, ed esiste almeno una città che può essere raggiunta partendo da ogni altra città.

6. Su un foglio di carta quadrettata si disegna un quadrato di lato 2002. Si anneriscono poi alcuni dei lati dei quadratini interni (pensando così di costruire delle pareti) in modo però che da ogni quadratino si possa raggiungere ogni altro quadratino.

   Determinare il massimo numero di lati che possono essere anneriti.

7. Determinare se esiste una permutazione di $1, 1, 2, 2, \ldots, 2001, 2001, 2002, 2002$ tale che, per ogni k, vi siano esattamente k numeri tra le due ripetizioni di k.

8. Alberto e Barbara tracciano un grafo su di un foglio ed iniziano a giocare al seguente gioco. A turno, iniziando da Alberto, ciascun giocatore effettua una delle seguenti due mosse:

   - cancellare tre segmenti che formano un triangolo;
   - dati tre punti di cui due non collegati, ma collegati al terzo, cancellare i due collegamenti presenti e unire i due punti non collegati.

   Il giocatore che non può fare mosse valide perde la partita.

   Dimostrare che l'esito della partita non dipende da come giocano Alberto e Barbara, e determinare un criterio per stabilire chi vince in funzione della configurazione iniziale.

9. Camillo è andato per un certo periodo a Lipsia, dove vive in un condominio con 7 tedeschi. Ogni condomino ha un posto auto riservato a lui. Camillo, da buon italiano, quando torna a casa parcheggia in un posto a caso; ogni tedesco invece cerca di parcheggiare al proprio

posto, e solo se non ci riesce parcheggia pure lui a caso. Un giorno Camillo rientra quando tutti gli altri sono ancora fuori.

Determinare la probabilità che l'ultimo rientrato abbia potuto parcheggiare al proprio posto.

10. In una tranquilla vallata vivono dodici gnomi, i cui nomi coincidono con i nomi dei mesi: Gennaio, Febbraio, ..., Dicembre. Ogni gnomo abita in una casetta dipinta di azzurro o di rosa.

    Nel mese di gennaio, lo gnomo Gennaio va a trovare tutti i suoi amici. Se nota che la maggioranza stretta dei suoi amici ha la casetta di un colore diverso dalla sua, allora entro la fine del mese egli ridipinge la sua casetta, cambiando il colore per "adeguarsi alla maggioranza degli altri".

    Nel mese di febbraio, tocca allo gnomo Febbraio fare visita ai suoi amici ed eventualmente ridipingere la casetta per "adeguarsi alla maggioranza", e così via.

    Questa procedura si ripete di anno in anno. Si dimostri che, da un certo momento in poi, nessuno gnomo avrà più bisogno di ridipingere la sua casetta (si supponga l'amicizia simmetrica, e che ogni gnomo non includa se stesso nella lista dei suoi amici).

11. Un piano è suddiviso con n rette, quante regioni distinte ci sono al massimo? E se ci sono n piani per suddividere in uno spazio?

12. n interi positivi sono scritti in fila. Ad ogni passaggio, se c'è una coppia (x, y) di interi adiacenti con $x > y$ (in quest'ordine da sinistra a destra) può essere cambiata con la coppia $(y + 1, x)$ oppure $(x - 1, x)$. Mostrare che sono possibili sono un numero finito di passaggi.

13. Un grafo orientato (e finito) non contiene cicli. Sia n la massima lunghezza di un cammino lungo il grafo. Dimostrare che n è il più piccolo intero per cui si possono colorare i vertici in n colori in modo che 2 vertici dello stesso colore non siano raggiungibili l'uno a partire dall'altro.

14. Sono date n scatole contenenti ciascuna una quantità non negativa di monete. Una mossa consiste nel prelevare 2 monete da una scatola, gettarne via una e riporre l'altra in una scatola a scelta. Una configurazione di monete è detta *felice* se con un numero finito di mosse è possibile fare in modo che tutte le scatole siano non vuote. Determinare tutte le configurazioni *felici*.

15. Determinare tutti gli interi positivi n, m tali per cui è possibile tassellare un rettangolo $n \times m$ usando solo tessere ad "L" da 4 quadretti.

16. Un grafo ha almeno un arco. Dimostrare che è possibile suddividere i vertici in due sottinsiemi non vuoti A e B tali che il numero di archi che collegano un vertice di A e un vertice di B è maggiore di quello di archi che collegano vertici dello stesso sottoinsieme.

17. Una circonferenza è divisa in n parti uguali da serbatoi di carburante dove può rifornirsi un veicolo. Questo, inizialmente a secco, deve percorrere l'intero percorso lungo la circonferenza. Si sa che il carburante totale presente nei serbatoi è appena sufficiente per permettere al veicolo di compiere l'intero giro. Dimostrare che esiste un punto dal quale il veicolo può partire tale che riesca effettivamente a fare il giro.

18. Un carico di 100 lingotti (d'oro 24ct) tutti da 1kg sono disposti in 50 sacchi, nessuno dei quali contiene più di 50kg. Dimostrare che i sacchi possono essere divisi in 2 carichi dello stesso peso.

19. Dato n intero positivo, sia $P_n = \{2^n, 2^{n-1}3, \ldots, 3^n\}$. Dato un sottoinsieme $Y \subseteq P_n$ denotiamo con S_Y la somma degli elementi di Y. Per ogni reale r con $0 \leq r \leq 3^{n+1} - 2^{n+1}$ dimostrare che esiste $Y \subseteq P_n$ tale che $0 \leq r - S_Y \leq 2^n$.

IMO Problems: 1986/3, 1996/1.

7 Geometria 1

1. Calcolare
$$\sum_{n=0^\circ}^{90^\circ} \sin^2 n.$$

2. Dimostrare che, se x non è un multiplo intero di π, allora si ha che
$$1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos(2kx) = \frac{\sin((2n+1)x)}{\sin x}.$$

3. In un triangolo si ha che $\gamma = 3\alpha$, $a = 27$ e $c = 48$ (usando le notazioni standard).

   Determinare b.

4. Corde parallele di lunghezza 2, 3, 4 determinano in un cerchio angoli al centro, rispettivamente, di α, β e $\alpha + \beta$ radianti, con $\alpha + \beta < \pi$.

   Determinare il coseno di α.

5. Determinare l'area di un triangolo che ha due mediane ortogonali lunghe rispettivamente 10 e 15.

6. Sia dato un triangolo ABC rettangolo in A. L'altezza condotta da A ha lunghezza 12, mentre la bisettrice condotta da A ha lunghezza 13.

   Determinare la lunghezza della mediana condotta da A.

7. Calcolare
$$\sum_{n=0}^{2002} \tan n \cdot \tan(n+1).$$

8. Sia O il circocentro del triangolo ABC e siano D, E, F, rispettivamente, i punti intercettati sui lati opposti dalle rette AO, BO, CO.

   Dimostrare che
$$\frac{1}{AD} + \frac{1}{BE} + \frac{1}{CF} = \frac{2}{AO}.$$

9. Sia $ABCD$ un quadrilatero tale che un semicerchio con centro nel punto medio di AB e diametro sul segmento AB sia tangente agli altri tre lati BC, CD, DA.

   Dimostrare che
$$AB^2 = 4 \cdot BC \cdot AD.$$

10. Sia Γ un circonferenza e A un punto che non appartiene a Γ. Le rette che collegano A ai vertici P, Q, R di un triangolo equilatero variabile, inscritto in Γ, incontrano nuovamente Γ in U, V, W rispettivamente. Dimostrare che
$$\frac{AP}{AU} + \frac{AQ}{AV} + \frac{AR}{AW}$$
è costante, al variare del triangolo equilatero PQR.

11. Sia ABC un triangolo e siano L ed M i punti medi di BC e CA rispettivamente. Sia inoltre CF l'altezza uscente da C. La circonferenza passante per A ed M e tangente ad AL in A, incontra il prolungamento di AB in X.

    Trovare il valore minimo di BX/CF, specificando per quale triangolo ABC si ottiene tale minimo.

12. Sia dato un triangolo ABC e si fissino i punti A', B', C' sui lati opposti ai vertici A, B, C, rispettivamente, in modo che le rette AA', BB', CC' siano concorrenti in un punto P interno al triangolo. Sia d il diametro del cerchio circoscritto al triangolo ABC, e sia S' l'area del triangolo $A'B'C'$.

    Dimostrare che
$$d \cdot S' = AB' \cdot BC' \cdot CA'.$$

13. Mostrare le seguenti identità trigonometriche in un triangolo (notazione standard). R è il raggio della circonferenza circoscritta, r quello della circonferenza inscritta, S l'area, p il semiperimetro.

    - In un triangolo acutangolo $\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma = \tan\alpha\tan\beta\tan\gamma$.
    - $\sum_{cyc} \cot\alpha\cot\beta = 1$
    - $\sum_{cyc} \tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2} = 1$
    - $\sin^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\beta}{2} + \sin^2\frac{\gamma}{2} + 2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} = 1$
    - $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = 1$

14. Mostrare le seguenti identità triangolari

    - $2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma = S$
    - $2R\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma = r(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)$
    - $r = 4R\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$
    - $\sum_{cyc} a\cos\alpha = \frac{abc}{2R^2}$
    - $p = 4R\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$
    - $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 + 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} = 1 + \frac{r}{R}$
    - $\sum_{cyc} \sin 2\alpha = 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$
    - $\sum_{cyc} \cos 2\alpha = -1 - 4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$
    - $\sum_{cyc} \sin^2\alpha = 2 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$

IMO Problems: 1962/4, 1964/3, 1965/5, 1966/4, 1967/4, 1969/2, 1975/5, 1984/4.

8 Geometria 2

1. Un triangolo ha i vertici in $(1,1)$, $(10,2)$, $(3,4)$. Determinare le coordinate dell'ortocentro, del circocentro, del baricentro e dell'incentro.

2. Calcolare la distanza tra due diagonali sghembe di due facce adiacenti di un cubo di lato unitario.

3. Determinare la lunghezza dell'asse maggiore dell'ellisse che ha fuochi in $(9,20)$ e $(49,55)$ e che è tangente all'asse delle ascisse.

4. Un giardino si estende su un quadrato di 100 metri di lato, orientato secondo i punti cardinali, ed è percorso da due sentieri che seguono un andamento parabolico: il primo passa per i due estremi del lato Nord ed ha il vertice nel punto medio del lato Sud, il secondo passa per i due estremi del lato Est ed ha il vertice nel punto medio del lato Ovest.

   Determinare quanti metri quadri misura l'area del quadrilatero che ha come vertici i quattro punti d'incontro dei due sentieri.

5. Sia P un punto interno alla base AB di un triangolo isoscele ABC. Dimostrare che

   $$PC^2 = AC^2 - AP \cdot BP.$$

   Determinare come cambia tale formula se P sta sul prolungamento di AB.

6. Calcolare, usando il formalismo vettoriale, la somma dei quadrati delle mediane di un triangolo di lati a, b, c.

7. Sono dati un quadrilatero ed un punto M.

   Dimostrare che i simmetrici del punto M rispetto ai punti medi dei lati del quadrilatero sono vertici di un parallelogrammo.

8. Dimostrare che il punto di intersezione delle mediane di un quadrilatero (i segmenti che congiungono i punti medi di due lati opposti) è il punto medio del segmento che congiunge i punti medi delle diagonali.

9. In un quadrilatero $ABCD$, la retta passante per A e parallela a BC interseca la diagonale BD nel punto M, e la retta passante per B e parallela ad AD interseca la diagonale AC nel punto N.

   Dimostrare che MN è parallelo a DC.

10. Siano $ABMN$ e $BCQP$ i quadrati costruiti sui lati AB e BC di un triangolo, esternamente al triangolo stesso.

    Dimostrare che i centri di tali quadrati ed i punti medi di AC ed MP sono i vertici di un quadrato.

11. Sia $ABCD$ un quadrato, e siano P e Q punti interni al quadrato e tali che AP è parallelo a QC e $AP = PQ = QC$.

    (a) Determinare le possibili posizioni del punto P.

    (b) Determinare la minima ampiezza che può avere l'angolo $D\hat{A}P$.

12. Mostrare che, dati tre punti non allineati A, B e C, il luogo dei punti X tali che

$$\overrightarrow{XA} \cdot \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XB} \cdot \overrightarrow{XC} + \overrightarrow{XC} \cdot \overrightarrow{XA} = 0$$

è una circonferenza centrata nel baricentro di ABC. Qual è il suo raggio? (Si indichi $X = (x, y)$ e si ricordi che detta O l'origine degli assi, $\overrightarrow{OV} \cdot \overrightarrow{OW} = v_1w_1 + v_2w_2$ dove $V = (v_1, v_2)$ e $W = (w_1, w_2)$).

13. Dati tre numeri complessi a, b, c mostrare che vale $ab + bc + ca = a^2 + b^2 + c^2$ se e solo se abc è equilatero.

14. Dato ABC un triangolo e detto O_1 il simmetrico del circocentro rispetto a BC, allora A, I, O_1 sono allineati se e solo se l'angolo in A misura 60 gradi.

15. Ponendo l'origine nel vertice A di un triangolo ABC mostrare il seguente teorema (Stewart): Dato P un punto di AB, allora

$$CB^2 \cdot AP + CA^2 \cdot PB = AB \cdot (CP^2 + AP \cdot PB)$$

16. Sia $ABCD$ un quadrilatero e M, N, O, P i punti medi di AB, BC, CD, DA. Mostrare, usando i vettori, che

$$AC \perp BD \Leftrightarrow MO = NP$$

IMO Problems: 1959/5, 1971/2, 1973/1, 1977/1, 1982/5, 1992/4.

9 Geometria 3

1. Sia $ABCD$ un quadrilatero ciclico e sia P il punto di intersezione delle diagonali AC e BD. Detti O il circocentro del triangolo APB e H l'ortocentro di CPD, si dimostri che i punti O, P, H sono allineati.

2. Determinare le coordinate dei vertici del triangolo di area massima tra quelli che hanno un vertice in $(1, 1)$ e gli altri due vertici sull'ellisse di equazione $x^2 + 4y^2 = 5$.

3. Siano a, b, c, d le lunghezze dei lati di un quadrilatero (considerati in senso orario), e sia S la sua area.

   Dimostrare che $2S \leq ac + bd$.

4. Siano A, B, C, D (nell'ordine) vertici adiacenti di un ettagono regolare; mostrare che
$$\frac{1}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}.$$

5. Sia $ABCD$ un quadrilatero convesso tale che le rette DA e CB si intersechino in un punto K, le rette AB e DC in un punto L, le rette AC e KL in G, le rette DB e KL in F. Mostrare che $KF : FL = KG : GL$.

6. Sia ABC un triangolo e sia Γ la circonferenza inscritta in ABC, che tange il lato AB nel punto T; sia D il punto di Γ diametralmente opposto a T, e sia S il punto di intersezione della retta passante per C e D con il lato AB. Dimostrare che $AT = SB$.

7. Sia Γ_2 una circonferenza tangente internamente in A ad una circonferenza Γ_1. Sia BC una corda di Γ_1 tangente a Γ_2 in D. Sia E la seconda intersezione tra la retta AD e Γ_1.

   Dimostrare che E è il punto medio di uno degli archi di estremi B e C.

8. Siano AD, BE, CF tre ceviane del triangolo ABC passanti per un punto interno P.

   Dimostrare che
$$\frac{AF}{FB} + \frac{AE}{EC} = \frac{AP}{PD}.$$

9. Siano ABC un triangolo rettangolo in A, Γ il cerchio circoscritto, Γ_1 il cerchio tangente ad AB, AC e (internamente) a Γ. Sia infine Γ_2 il cerchio tangente a AB, AC e a Γ (esternamente). Siano r_1 e r_2 i raggi di Γ_1 e Γ_2.

   Dimostrare che il prodotto $r_1 \cdot r_2$ è pari a quattro volte l'area del triangolo.

10. Dato un angolo convesso ed un punto esterno ad esso, tracciare una retta passante per il punto e che stacca nell'angolo un triangolo di perimetro assegnato.

11. Siano Γ_1 e Γ_2 due circonferenze tangenti esternamente in un punto T, sia AE una corda di Γ_1 e siano B e D punti di Γ_2 tali che AB e DE siano tangenti a Γ_2. Si supponga che la retta AE incontri la retta BD in un punto P. Dimostrare che

    - $\frac{AB}{AT} = \frac{ED}{ET}$;
    - $A\widehat{T}P + E\widehat{T}P = 180°$.

12. Sia MN una retta parallela al lato BC di un triangolo ABC che interseca i lati AB e AC in M ed N rispettivamente. Sia P l'intersezione delle rette BN e CM, e si supponga che le circonferenze circoscritte ai triangoli BMP e CNP abbiano un ulteriore punto d'intersezione Q, oltre a P. Mostrare che $B\widehat{A}Q = C\widehat{A}P$.

IMO Problems: 1961/5, 1962/5, 1963/3, 1967/1, 1973/4, 1986/2, 1988/1.

10 Teoria dei Numeri 1

1. Un crittografo escogita il seguente metodo per codificare gli interi positivi. Per prima cosa tali interi vengono espressi in base 5; poi si stabilisce una corrispondenza biunivoca tra le cifre $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ e le lettere $\{V, W, X, Y, Z\}$. In tal modo risulta che VYZ, VYX, VVW sono tre interi consecutivi, presi in ordine crescente.

   Determinare l'espessione in base 10 di XYZ.

2. Determinare i valori del primo p per cui il polinomio $x^2 + px - 444p$ ha radici intere.

3. Determinare il più piccolo intero positivo a per cui $2002a + 3$ è multiplo di 59.

4. Trovare l'intero a dal valore assoluto più piccolo per cui vale il seguente criterio: "un intero positivo n è divisibile per 13 se e solo se è divisibile per 13 l'intero così costruito: si prende l'espressione di n privata della cifra delle unità e gli si somma la cifra delle unità moltiplicata per a".

5. Determinare il più piccolo intero n tale che $abc|(a + b + c)^n$ per ogni scelta di tre interi positivi a, b, c tali che $a|b^3$, $b|c^3$, $c|a^3$.

6. Trovare il MCD tra tutti gli interi della forma $p^4 - q^4$, dove p e q sono numeri primi con almeno due cifre tali che $p > q$.

7. Determinare il più grande intero positivo n con questa proprietà: "esiste una progressione aritmetica infinita di ragione 2003 i cui termini non si possono scrivere come somma di n potenze 2002-esime".

8. Per ogni intero positivo n, sia d_n il massimo comun divisore tra $100 + n^2$ e $100 + (n + 1)^2$.

   Determinare il massimo valore possibile per d_n.

9. Definiamo la funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ponendo $f(0) = f(1) = 0$ e poi per ricorrenza

   $$f(2n) = 2f(n) + 1, \qquad f(2n + 1) = 2f(n)$$

   per ogni $n \geq 1$. Per ogni intero m definiamo poi per ricorrenza una successione a_k ponendo

   $$a_0 = m, \qquad a_{k+1} = f(a_k).$$

   (a) Dimostrare che, qualunque sia il valore iniziale m, la successione a_k è nulla da un certo punto in poi.

   (b) Determinare il più piccolo valore di m per cui il primo valore di a_k ad essere nullo è il 2002-esimo.

10. Determinare le eventuali soluzioni intere dell'equazione

    $$y^2 = x^5 - 4.$$

IMO Problems: 1959/1, 1964/1, 1986/1, 1988/3, 1971/3, 1975/2.

11 Teoria dei Numeri 2

1. Calcolare il valore di 1432^{1432} modulo 1001.
2. Per ogni intero positivo n sia $\sigma(n)$ la somma di tutti i divisori di n (compresi 1 e n). Determinare se la funzione $\sigma(n)$ è moltiplicativa e/o completamente moltiplicativa.
3. Sia A il numero intero la cui rappresentazione decimale è costituita da 7777 cifre 7 consecutive. Consideriamo il numero A^A e sommiamo le sue cifre. Sommiamo quindi le cifre del numero così ottenuto e via di seguito, fino a rimanere con un numero di una cifra sola.

   Determinare di quale cifra si tratta.
4. Determinare le ultime 5 cifre del numero $5^{5^{5^{5^5}}}$.
5. Determinare (in funzione di due parametri h e k) tutte le soluzioni intere dell'equazione $2x + 4y + 5z = 3$.
6. Determinare il più piccolo intero positivo n tale che $2^n \equiv 18$ modulo 385.
7. Dimostrare che per ogni primo p esistono infiniti n tali che p divide $2^n - n$.
8. Trovare il massimo valore di $\sin x$, dove x, espresso in gradi sessagesimali, è una potenza di 2.
9. Dimostrare che, scelti comunque tre interi d, m ed n, esiste una progressione aritmetica di ragione d e lunghezza m in cui ogni termine è divisibile per una potenza n-esima.
10. Consideriamo l'insieme
$$D = \{n \in \mathbb{N} : \ n \text{ divide } 2^n + 1\}.$$
    (a) Determinare tutti i primi che appartengono a D.
    (b) Determinare tutte le potenze di primi che appartengono a D.
    (c) Determinare tutti gli elementi di D che sono prodotto di due primi.
    (d) Dimostrare che tutti gli elementi di D sono multipli di 3.
    (e) Determinare tutti gli elementi di D della forma p^2q, con p e q primi distinti.

IMO Problems: 1978/1, 1975/4, 1990/3, 2000/5.

Parte III
Problemi IMO 1-4

Raccogliamo, nelle pagine seguenti, gli esercizi A1 e B1 delle ultime IMO (i primi esercizi delle due giornate); tra gli esercizi degli ultimi 5 anni, insieme ai 10 presi dalle pagine precedenti e già segnalati, saranno scelti i 4 problemi “noti” del Test Finale.

Per ogni problema è proposto un suggerimento di soluzione, che va ovviamente sviluppato e giustificato, in cui magari mancano casi particolari (o problemi di configurazione), la cui discussione è lasciata allo studente studioso.

Facciamo ancora una volta presente che lo scopo di inserire problemi di questo livello nel Test Finale non è quello di regalare insonni notti di studio mnemonico, ma di cercare di stimolare la comprensione e lo studio “critico” delle soluzioni, in modo da poterle riprodurre sul momento, senza ricordarle completamente, ma avendo assorbito le idee e padroneggiato le tecniche che occorrono alla soluzione.

1 2013

A1 Dimostrare che, per ogni coppia di interi positivi k ed n, esistono k interi positivi $m_1, m_2, \ldots, m_k$ (non necessariamente distinti) tali che

$$1 + \frac{2^k - 1}{n} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right)\left(1 + \frac{1}{m_2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{m_k}\right)$$

B1 Sia ABC un triangolo acutangolo con ortocentro H, e sia W un punto del segmento BC, strettamente compreso tra B e C. I punti M ed N sono i piedi delle altezze condotte da B e C, rispettivamente. Indichiamo con ω_1 la circonferenza circoscritta a BWN, e con X il punto di ω_1 tale che WX sia un diametro di ω_1. Analogamente, indichiamo con ω_2 la circonferenza circoscritta a CWM, e con Y il punto di ω_2 tale che WY sia un diametro di ω_2. Dimostrare che i punti X, Y e H sono allineati.

2 2014

A1 Sia $a_0 < a_1 < a_2 < \ldots$ una successione infinita di interi positivi. Dimostrare che esiste un unico intero $n \geq 1$ tale che

$$a_n < \frac{a_0 + a_1 + \ldots + a_n}{n} \leq a_{n+1} .$$

B1 Siano P e Q punti sul lato BC del triangolo acutangolo ABC, tali che $P\widehat{A}B = B\widehat{C}A$ e $C\widehat{A}Q = A\widehat{B}C$. Siano M ed N punti su AP e AQ rispettivamente tali che P sia punto medio di AM e Q sia punto medio di AN. Dimostrare che l'intersezione tra le rette BM e CN sta sulla circonferenza circoscritta ad ABC.

3 2015

A1 Diciamo che un insieme finito $\mathcal{S}$ di punti nel piano è *equilibrato* se, per due qualsiasi punti distinti A e B in $\mathcal{S}$, esiste un punto C in $\mathcal{S}$ tale che $AC = BC$. Diciamo che $\mathcal{S}$ è *eccentrico* se, per tre qualsiasi punti distinti A, B e C in $\mathcal{S}$, non esiste alcun punto P in $\mathcal{S}$ tale che $PA = PB = PC$.

1. Mostrare che per tutti gli interi $n \geq 3$ esiste un insieme *equilibrato* costituito da esattamente n punti.

2. Determinare tutti gli interi $n \geq 3$ per i quali esiste un insieme *equilibrato* ed *eccentrico* costituito da esattamente n punti.

B1 Sia Ω la circonferenza di centro O circoscritta al triangolo ABC. Una circonferenza Γ di centro A interseca il segmento BC nei punti D ed E, in modo che B, D, E, C siano distinti e in quest'ordine su BC. Siano F e G i punti di intersezione tra Γ e Ω, scelti in modo che A, F, B, C, G siano in quest'ordine su Ω. Sia K il punto di intersezione, diverso da B, tra la circonferenza circoscritta a BDF e il segmento AB. Sia L il punto di intersezione, diverso da C, tra la circonferenza circoscritta a CGE e il segmento CA. Dimostrare che, quando le rette FK e GL sono distinte e si intersecano in X, X giace sul segmento AO.

4 2016

A1 Il triangolo BCF è rettangolo in B. Sia A il punto sulla retta CF tale che $FA = FB$ e F si trova tra A e C. Il punto D è scelto in maniera tale che $DA = DC$ e AC è la bisettrice di $\angle DAB$. Il punto E è scelto in maniera tale che $EA = ED$ e AD è la bisettrice di $\angle EAC$. Sia M il punto medio di CF. Sia X il punto tale che $AMXE$ è un parallelogrammo (con $AM \parallel EX$ e $AE \parallel MX$).

Dimostrare che le rette BD, FX e ME concorrono.

B1 Un insieme di interi positivi si dice profumato se contiene almeno due elementi e ogni suo elemento ha un fattore primo in comune con almeno uno degli altri elementi. Sia $P(n) = n^2 + n + 1$. Determinare il più piccolo intero positivo b per cui esiste un intero non-negativo a tale che l'insieme

$$\{P(a+1), P(a+2), \ldots, P(a+b)\}$$

è profumato.

5 2017

A1 Per ogni intero $a_0 > 1$ si definisce la successione $a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots$ tale che per ogni $n \geq 0$

$$a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n} & \text{se } \sqrt{a_n} \text{ è un numero intero,} \\ a_n + 3 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Determinare tutti i valori di a_0 per cui esiste un numero A tale che $a_n = A$ per infiniti valori di n.

B1 Siano R ed S punti distinti su una circonferenza Ω tali che RS non è un diametro di Ω. Sia ℓ la retta tangente ad Ω in R. Il punto T è tale che S è il punto medio del segmento RT. Il punto J è scelto sul più corto arco RS di Ω in modo tale che la circonferenza Γ circoscritta al triangolo JST intersechi ℓ in due punti distinti. Sia A il punto comune di Γ ed ℓ più vicino ad R. La retta AJ interseca nuovamente Ω in K.

Dimostrare che la retta KT è tangente a Γ.

6 2018

A1 Sia Γ la circonferenza circoscritta al triangolo acutangolo ABC. I punti D ed E stanno sui segmenti AB ed AC, rispettivamente, e sono tali che $AD = AE$. Gli assi di BD e CE intersecano gli archi minori AB e AC di Γ nei punti F e G, rispettivamente. Dimostrare che le rette DE ed FG sono parallele (o coincidenti).

B1 Una *posizione* è un qualunque punto (x, y) nel piano tale che x e y sono entrambi interi positivi minori o uguali a 20. All'inizio, ognuna delle 400 posizioni è libera. Alessandra e Bobo a turno piazzano delle pietre, iniziando da Alessandra. Quando tocca a lei, Alessandra piazza una nuova pietra rossa in una posizione libera, in modo che la distanza tra le posizioni occupate da due qualunque pietre rosse sia sempre diversa da $\sqrt{5}$. Quando tocca a lui, Bobo piazza una nuova pietra blu in una qualunque posizione libera. (Una posizione occupata da una pietra blu può essere a qualunque distanza da qualunque altra posizione occupata). Essi smettono non appena uno dei due non può più piazzare una pietra. Determinare il più grande K tale che Alessandra è certa di piazzare almeno K pietre rosse, indipendentemente da come Bobo piazza le sue pietre blu.