EGMO Camp Pisa 2019 – Test Finale

Problemi a risposta rapida

1. Dimostrare che per ogni a, b, c reali positivi vale
$$\frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab} \geq \frac{2}{a} + \frac{2}{b} - \frac{2}{c}$$
e determinare i casi in cui vale l'uguaglianza.

2. Siano a, b, c reali non negativi con $c > 0$ e sia $p(x) = x^3 - ax^2 + bx - c$.
Dette x_1, x_2, x_3 le radici di $p(x)$, chiamiamo
$$f(a, b, c) = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_1}{x_3} + \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_2}{x_3} + \frac{x_3}{x_1} + \frac{x_3}{x_2}.$$
Dimostrare che $f(a, b, c)$ è un numero reale e trovare il minimo valore che può assumere $f(a, b, c)$ al variare di a, b, c.

3. Un insieme S è chiamato *zuccheroso* se ha le seguenti 2 proprietà:
   a) S ha esattamente 4 elementi;
   b) per ogni elemento x di S, almeno uno dei numeri $x - 1$ o $x + 1$ appartiene ad S.

   Trovare quanti sono tutti i possibili sottoinsiemi *zuccherosi* dell'insieme $\{1, 2, ..., n\}$.

4. Sia n un intero positivo e $f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ iniettiva tale che per ogni $m \in \{1, \ldots, n\}$ $f(m) = m + 5$ o $f(m) = m - 2$. Determinare quali sono i possibili valori di n.

5. Si considerino due circonferenze di centri A e B, raggi $3, 8$ rispettivamente e in cui $AB > 11$. Una tangente interna comune alle due circonferenze interseca quella di centro A in C e quella di centro B in D. I segmenti AB e CD si intersecano in E, e $AE = 5$.
Determinare la lunghezza di CD.

6. Sia $\triangle ABC$ un triangolo acutangolo con $\angle BAC = 60°$ e sia I il suo incentro. Siano $D = BI \cap AC$ e $E = CI \cap AB$.
Determinare $\angle DEI$.

7. Dire per quanti numeri interi $a \geq 2$ il numero $a^8 - a^7 + a^6 - a^5 + a^4 - a^3 + a^2 - a + 1$ è primo.

8. Determinare quanti valori può assumere $\mathrm{MCD}(2n^2 - 2n - 3, 3n^2 + n + 3)$ al variare di $n \in \mathbb{N}$.

Problemi dimostrativi

9. Sia $m(n)$ il più grande divisore proprio di $n \in \mathbb{N}$. Trovare tutti gli $n \in \mathbb{N}$ per cui $n + m(n)$ è una potenza di 10.

10. Sia $\triangle ABC$ un triangolo rettangolo in A e sia D il punto medio di BC. Una retta passante per D interseca AB in X e AC in Y, tali che A, C, Y sono allineati in quest'ordine e A, X, B sono allineati in quest'ordine. Si prenda P su XY tale che il punto medio M di XY coincida con il punto medio di PD. La perpendicolare a BC per P interseca BC in T.
Dimostrare che $\angle TAM = \angle MAD$.

11. La gara finale di selezione delle EGMO è composta da 8 problemi, e vi accedono 30 partecipanti. Dopo la gara i correttori realizzano che su ogni problema ciascuna ragazza ha totalizzato 0 punti oppure $30 - k$ punti, dove k è il numero di ragazze che ha risolto quello specifico problema. Veronica ha totalizzato il punteggio più basso di tutti, quanto vale al massimo il suo punteggio?

12. Dato un polinomio $q(x) \in \mathbb{R}[x]$, denotiamo $q^{(m)}(x)$ il polinomio $\underbrace{q(q(\cdots q}_{m \text{ volte}}(x)))$, ovvero la composizione di $q(x)$ con se stesso m volte.

    (a) Trovare tutti i polinomi $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ tali che $p(0) = 0$ e per cui esistono interi positivi m, n tali che
    $$p^{(m)}(x) = x^n.$$

    (b) Trovare tutti i polinomi $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ per cui esistono interi positivi m, n tali che
    $$p^{(m)}(x) = x^n.$$

EGMO Camp Pisa 2019 – Test Finale

______________________________ (Cognome) ______________________________ (Nome)

1. Dimostrare che per ogni a, b, c reali positivi vale
$$\frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab} \geq \frac{2}{a} + \frac{2}{b} - \frac{2}{c}$$
e determinare i casi in cui vale l'uguaglianza.

2. Siano a, b, c reali non negativi con $c > 0$ e sia $p(x) = x^3 - ax^2 + bx - c$.
Dette x_1, x_2, x_3 le radici di $p(x)$, chiamiamo
$$f(a, b, c) = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_1}{x_3} + \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_2}{x_3} + \frac{x_3}{x_1} + \frac{x_3}{x_2}.$$
Dimostrare che $f(a, b, c)$ è un numero reale e trovare il minimo valore che può assumere $f(a, b, c)$ al variare di a, b, c.

3. Un insieme S è chiamato *zuccheroso* se ha le seguenti 2 proprietà:

   a) S ha esattamente 4 elementi;

   b) per ogni elemento x di S, almeno uno dei numeri $x - 1$ o $x + 1$ appartiene ad S.

   Trovare quanti sono tutti i possibili sottoinsiemi *zuccherosi* dell'insieme $\{1, 2, ..., n\}$.

4. Sia n un intero positivo e $f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ iniettiva tale che per ogni $m \in \{1, \ldots, n\}$ $f(m) = m + 5$ o $f(m) = m - 2$. Determinare quali sono i possibili valori di n.

5. Si considerino due circonferenze di centri A e B, raggi $3, 8$ rispettivamente e in cui $AB > 11$. Una tangente interna comune alle due circonferenze interseca quella di centro A in C e quella di centro B in D. I segmenti AB e CD si intersecano in E, e $AE = 5$.
   Determinare la lunghezza di CD.

6. Sia $\triangle ABC$ un triangolo acutangolo con $\angle BAC = 60°$ e sia I il suo incentro. Siano $D = BI \cap AC$ e $E = CI \cap AB$.
   Determinare $\angle DEI$.

7. Dire per quanti numeri interi $a \geq 2$ il numero $a^8 - a^7 + a^6 - a^5 + a^4 - a^3 + a^2 - a + 1$ è primo.

8. Determinare quanti valori può assumere $\mathrm{MCD}(2n^2 - 2n - 3, 3n^2 + n + 3)$ al variare di $n \in \mathbb{N}$.

9. Sia $m(n)$ il più grande divisore proprio di $n \in \mathbb{N}$. Trovare tutti gli $n \in \mathbb{N}$ per cui $n + m(n)$ è una potenza di 10.

10. Sia $\triangle ABC$ un triangolo rettangolo in A e sia D il punto medio di BC. Una retta passante per D interseca AB in X e AC in Y, tali che A, C, Y sono allineati in quest'ordine e A, X, B sono allineati in quest'ordine. Si prenda P su XY tale che il punto medio M di XY coincida con il punto medio di PD. La perpendicolare a BC per P interseca BC in T.
Dimostrare che $\angle TAM = \angle MAD$.

11. La gara finale di selezione delle EGMO è composta da 8 problemi, e vi accedono 30 partecipanti. Dopo la gara i correttori realizzano che su ogni problema ciascuna ragazza ha totalizzato 0 punti oppure $30 - k$ punti, dove k è il numero di ragazze che ha risolto quello specifico problema. Veronica ha totalizzato il punteggio più basso di tutti, quanto vale al massimo il suo punteggio?

12. Dato un polinomio $q(x) \in \mathbb{R}[x]$, denotiamo $q^{(m)}(x)$ il polinomio $\underbrace{q(q(\cdots q}_{m \text{ volte}}(x)))$, ovvero la composizione di $q(x)$ con se stesso m volte.

(a) Trovare tutti i polinomi $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ tali che $p(0) = 0$ e per cui esistono interi positivi m, n tali che
$$p^{(m)}(x) = x^n.$$

(b) Trovare tutti i polinomi $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ per cui esistono interi positivi m, n tali che
$$p^{(m)}(x) = x^n.$$