Allenamenti EGMO 2020 – 3

A3. Siano a, b e c reali a due a due distinti e si consideri il polinomio $f(x) = x^3+ax^2+bx+c$. Determinare tutte le terne (a, b, c) per cui $f(a) = a^3$ e $f(b) = b^3$.

C3. Una sequenza di parentesi è detta *equa* se ci sono esattamente tante parentesi aperte quante chiuse. Si dice *bilanciata* se è una sequenza di parentesi che può comparire in un'espressione matematica, ovvero se è *equa* ed è possibile associare biunivocamente le parentesi aperte a quelle chiuse in modo tale che ogni aperta sia prima della chiusa corrispondente e inoltre, presi due intervalli tra due coppie di parentesi associate, questi siano disgiunti o uno contenuto nell'altro. Ad esempio (()) e (()(())) sono *bilanciate*, mentre ())(non lo è.
Infine definiamo *rotazione* l'azione che prende la prima parentesi a sinistra (all'inizio della sequenza) e la mette in fondo a destra (alla fine della sequenza). Ad esempio ())(diventa))((.

a) Dimostrare che una qualunque sequenza *equa* è *bilanciata* se e solo se in ogni suo segmento iniziale ci sono almeno tante parentesi aperte quante chiuse.

b) Dimostrare che è sempre possibile passare da una qualunque sequenza *equa* a una *bilanciata* con un certo numero di rotazioni.

G3. Sia $\triangle ABC$ un triangolo e sia X la proiezione di A sulla bisettrice interna di $\angle ABC$, Y la sua proiezione sulla bisettrice esterna di $\angle ABC$, W la sua proiezione sulla bisettrice interna di $\angle ACB$ e Z sulla bisettrice esterna di $\angle ACB$.
Dimostrare che X, Y, W, Z sono allineati.

N3. Determinare tutte le coppie di interi (x, y) per cui $x(y + 1) = 2(x + y)$