

Allenamenti EGMO 2020 – 6

A6. Trovare tutte le funzioni iniettive $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tali che

$$f(f(n)) \leq \frac{n + f(n)}{2}.$$

C6. Filippo ha 2020 pile di libri, dove sulla pila i -esima ci sono i libri $\forall i \leq 2020$ e vuole riordinarli in alcuni scaffali. Per riordinarli adotta la seguente tecnica: ad ogni mossa sceglie un numero naturale k e toglie k libri da alcune pile (che devono avere ciascuna almeno k libri). Quante mosse deve fare al minimo per liberare tutte le pile?
(**N.B.** in mosse diverse può scegliere un numero k differente e pile differenti).

G6. Siano M ed N i punti medi rispettivamente dei lati AC ed AB di un triangolo acutangolo in cui $AB \neq AC$. Siano ω_B la circonferenza di centro M passante per B e ω_C la circonferenza di centro N passante per C . Sia D il punto tale che $ABCD$ è un trapezio isoscele con AD parallelo a BC . Si assuma infine che ω_B ed ω_C si intersecano in due punti distinti P e Q . Si dimostri che D giace sulla retta PQ .

N6. Trovare tutti i numeri m con esattamente tre divisori primi p, q ed r (a due a due distinti) tali che:

$$p - 1 \mid m; \quad qr - 1 \mid m; \quad q - 1 \nmid m; \quad r - 1 \nmid m; \quad 3 \nmid q + r.$$