Allenamenti EGMO 2020 – 7

A7. Sia $n \in \mathbb{N}$ un numero naturale e siano $a_1, \dots, a_n$ n numeri reali. Dimostrare che esiste un numero reale a tale che tutti i numeri $a_1 + a \dots, a_n + a$ sono tutti irrazionali.

C7. Su una griglia quadrata $(4n + 2) \times (4n + 2)$, una tartaruga può muoversi da una casella a un'altra se queste hanno un lato in comune. La tartaruga inizia a muoversi in un angolo della griglia, passa esattamente una volta in ogni altra casella e infine ritorna nella casella iniziale. In funzione di n, qual è il massimo intero k tale che deve necessariamente esserci una riga o una colonna in cui la tartaruga è entrata almeno k volte?

G7. Il triangolo $\triangle ABC$, isoscele su BC è inscritto nella circonferenza ω. Sia P un punto che varia sull'arco $\overset{\frown}{BC}$ che non contiene A, e siano I_B e I_C gli incentri dei triangoli $\triangle ABP$ e $\triangle ACP$ rispettivamente.
Si dimostri che al variare di P la circonferenza circoscritta a $\triangle PI_BI_C$ passa per un punto fisso.

N7. Un intero positivo n è detto *birichino* se può essere scritto nella forma $n = a^b + b$ dove $a, b \geq 2$ sono interi. Esiste una sequenza di 102 interi positivi consecutivi tali che esattamente 100 di questi numeri sono *birichini*?