

Allenamenti EGMO 2020

14 aprile 2020

Indice

1	Allenamenti EGMO 2020 – 3	1
1.1	Soluzioni	2
2	Allenamenti EGMO 2020 – 4	5
2.1	Soluzioni	6
3	Allenamenti EGMO 2020 – 5	9
3.1	Soluzioni	10
4	Allenamenti EGMO 2020 – 6	14
4.1	Soluzioni	15
5	Allenamenti EGMO 2020 – 7	19
5.1	Soluzioni	20
6	Allenamenti EGMO 2020 – 8	24
6.1	Soluzioni	25

1 Allenamenti EGMO 2020 – 3

- A3.** Siano a, b e c reali a due a due distinti e si consideri il polinomio $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Determinare tutte le terne (a, b, c) per cui $f(a) = a^3$ e $f(b) = b^3$.
- C3.** Una sequenza di parentesi è detta *equa* se ci sono esattamente tante parentesi aperte quante chiuse. Si dice *bilanciata* se è una sequenza di parentesi che può comparire in un'espressione matematica, ovvero se è *equa* ed è possibile associare biunivocamente le parentesi aperte a quelle chiuse in modo tale che ogni aperta sia prima della chiusa corrispondente e inoltre, presi due intervalli tra due coppie di parentesi associate, questi siano disgiunti o uno contenuto nell'altro. Ad esempio $(())$ e $(())(())$ sono *bilanciate*, mentre $(())($ non lo è.
Infine definiamo *rotazione* l'azione che prende la prima parentesi a sinistra (all'inizio della sequenza) e la mette in fondo a destra (alla fine della sequenza). Ad esempio $(())($ diventa $))($.
- a) Dimostrare che una qualunque sequenza *equa* è *bilanciata* se e solo se in ogni suo segmento iniziale ci sono almeno tante parentesi aperte quante chiuse.
 - b) Dimostrare che è sempre possibile passare da una qualunque sequenza *equa* a una *bilanciata* con un certo numero di rotazioni.
- G3.** Sia $\triangle ABC$ un triangolo e sia X la proiezione di A sulla bisettrice interna di $\angle ABC$, Y la sua proiezione sulla bisettrice esterna di $\angle ABC$, W la sua proiezione sulla bisettrice interna di $\angle ACB$ e Z sulla bisettrice esterna di $\angle ACB$. Dimostrare che X, Y, W, Z sono allineati.
- N3.** Determinare tutte le coppie di interi (x, y) per cui $x(y + 1) = 2(x + y)$

1.1 Soluzioni

A3 Scrivendo l'espressione $f(a) - f(b)$ nei due modi diversi dati dal testo abbiamo l'identità

$$a^3 - b^3 = a^3 + a^3 + ba + c - b^3 - ab^2 - b^2 - c$$

che si può riarrangiare nella forma:

$$(a - b)[a^2 + b(a + 1)] = 0$$

Nel caso in cui $a \neq b$ quindi, per $a \neq -1$ otteniamo $b = -\frac{a^2}{a+1}$. Sostituendo poi nell'identità

$$a^3 = f(a) = a^3 + a^3 + ab + c$$

si ha $c = -\frac{a^4}{a+1}$. Chiaramente le terne $(a, -\frac{a^2}{a+1}, -\frac{a^4}{a+1})$ sono tutte e sole quelle che verificano le identità $f(a) = a^3$ e $f(b) = b^3$, in quanto sono state derivate utilizzando solo equivalenze. Infine imponiamo che i coefficienti siano a due a due distinti:

$$b \neq c \iff a \neq \pm 1$$

$$a \neq b \iff a^2 + a(a + 1) \neq 0 \iff a \neq 0 \wedge a \neq -\frac{1}{2}$$

$$a \neq c \iff a^4 + a(a + 1) \neq 0 \iff a \neq 0 \wedge a^3 + a + 1 \neq 0$$

Riassumendo quindi le soluzioni cercate sono: $(a, -\frac{a^2}{a+1}, -\frac{a^4}{a+1})$ con a reale e $a \notin \{0, \pm 1, -\frac{1}{2}\}$ e tale che non risolva l'equazione $a^3 + a + 1 = 0$

C3 a) Innanzitutto mostriamo che una sequenza *bilanciata* sicuramente in ogni suo segmento iniziale ha almeno tante aperte quante chiuse. Infatti, supponiamo per assurdo che non sia così e consideriamo il primo segmento iniziale in cui ci sono strettamente più parentesi chiuse che aperte, d'ora in poi detto S ; in questo caso non è possibile che tutte le parentesi chiuse di S siano associate biunivocamente a quelle aperte contenute in S (perchè le parentesi chiuse sono in numero maggiore) e dunque almeno una parentesi chiusa deve essere associata a una aperta non appartenente ad S , che quindi la segue nella sequenza, contraddicendo l'ipotesi che la sequenza globale sia bilanciata.

Adesso mostriamo che una sequenza *equa* in cui in tutti i segmenti iniziali ci sono almeno tante aperte quante chiuse è *bilanciata*, e per farlo è necessario associare biunivocamente le parentesi aperte a quelle chiuse secondo quanto indicato nel testo. L'associazione che cerchiamo è quella data dal seguente algoritmo: si scorre la sequenza da sinistra a destra fino a incontrare la prima parentesi chiusa non ancora associata e la si associa alla parentesi aperta precedente più vicina non ancora associata. È necessario verificare che questo algoritmo fornisca una mappa che rispetta le condizioni indicate dal testo:

- * chiaramente ad ogni parentesi chiusa viene associata una aperta che la precede e tutte le parentesi chiuse vengono associate perchè detto S' il segmento che ha come estremi la parentesi iniziale e una qualche parentesi chiusa da associare allora questo è un segmento iniziale, dunque ci sono almeno tante aperte quante chiuse ed esisterà almeno una parentesi aperta non ancora presa, che possa essere associata all'estremo destro di S' .

- * Le associazioni vengono completate perchè ci sono un numero finito di parentesi e dunque a un certo punto l'algoritmo arriva in fondo.
- * Per mostrare che anche l'ultima condizione viene rispettata supponiamo per assurdo che l'algoritmo abbia costruito una mappa che ha associato le parentesi in modo che esistono due coppie di parentesi “[,]” e “{,}” tali che i segmenti in essi contenuti non sono nè disgiunti, nè uno contenuto nell'altro, ossia, senza perdita di generalità, sono disposte nell'ordine $[\dots \{ \dots] \dots]$. Tuttavia questo non è possibile perchè l'algoritmo considererà per prima “]”, e in quel momento la parentesi aperta più vicina precedente non associata sarà non più lontana di “{”, quindi non è possibile che “]” venga associata a “[” o a una qualunque parentesi precedente “{”. È quindi assurdo che l'algoritmo abbia creato una mappa di questo tipo, il che conclude la dimostrazione di questa prima parte.

b) Data una sequenza *equa* consideriamo ora la funzione $Q(k)$ così definita:

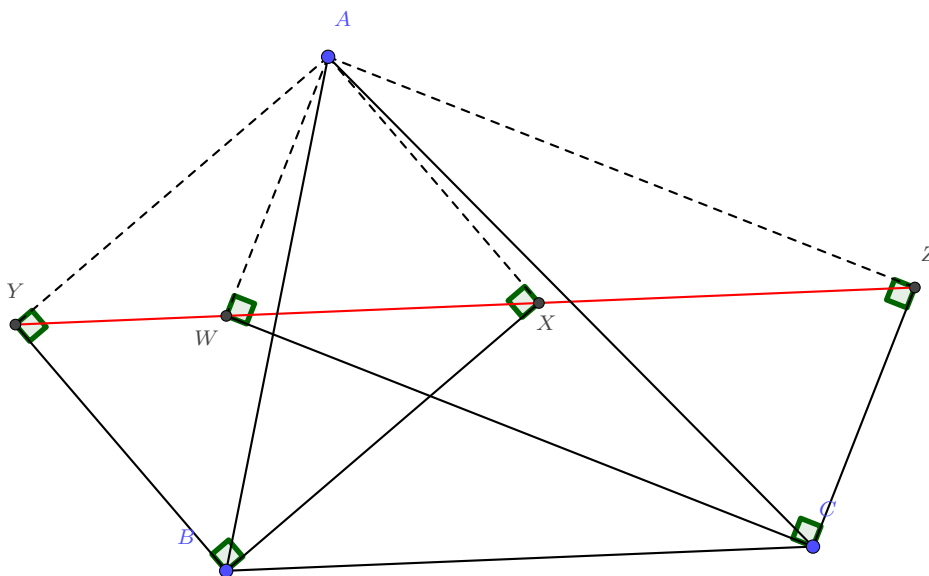
- * $Q(0) = 0$
- * $\forall k \geq 1$ se la k -esima parentesi della sequenza è aperta allora $Q(k) = Q(k - 1) + 1$, mentre se è chiusa allora $Q(k) = Q(k - 1) - 1$. (k è inteso modulo n , con n numero di parentesi della sequenza, ed è una buona definizione perchè dato che la sequenza è equa $Q(0) = Q(n) = 0$)

Q è dunque una quantità che ci dice quante parentesi aperte più di quelle chiuse ci sono fino alla k -esima; osserviamo che la condizione in cui in ogni segmento iniziale ci sono almeno tante parentesi aperte quante chiuse è equivalente a quella in cui $Q(k) \geq 0 \forall k \geq 0$, e quindi per il punto a) quest'ultima condizione è equivalente anche a quella di sequenza *bilanciata*.

Consideriamo ora una qualunque sequenza *equa* e la relativa Q associata; se vale $Q(k) \geq 0 \forall k \geq 0$ allora è *bilanciata*, altrimenti ammette almeno un punto di minimo globale, sia esso \bar{k} (e sicuramente $Q(\bar{k}) < 0$); applichiamo \bar{k} rotazioni, in modo che i primi \bar{k} elementi vengano spostati in fondo, ottenendo una nuova sequenza la cui funzione associata sarà $Q'(k) = Q(k + \bar{k}) - Q(\bar{k})$ (dove si ricordi che l'argomento di Q è sempre inteso $(\text{mod } n)$). Dato che \bar{k} è stato scelto come punto di minimo risulta evidente che ora vale $Q'(k) \geq 0 \forall k \geq 0$, e quindi la nuova sequenza ottenuta è bilanciata.

G3 Sappiamo che dato un angolo la bisettrice interna e quella esterna sono perpendicolari fra di loro, quindi $BY \perp BX$ e $CW \perp CY$.

Quindi per definizione dei punti X, Y, Z, W , $AXBY$ e $CWAZ$ sono rettangoli.



Osserviamo che XY e AB sono diagonali di un rettangolo, quindi si incontrano nel loro punto medio.

Inoltre $\angle YXB = \angle XBA = \angle XBC$ perchè BX bisettrice dell'angolo in B . Quindi $XY \parallel BC$. Quindi la retta per X e Y è la parallela a BC passante per il punto medio di AB .

Analogamente usando il rettangolo $CWAZ$ si dimostra che la retta per Z e W è la parallela a BC passante per il punto medio di AC .

Ma sappiamo che la parallela a BC passante per il punto medio di AB passa anche per il punto medio di AC , quindi le due rette trovate coincidono.

- N3** Osserviamo subito che sviluppando l'espressione la si può riscrivere nelle forme $x = y(x - 2)$ e $2y = x(y - 1)$, da cui, sostituendo una nell'altra si arriva ad esempio a $2y = y(x - 2)(y - 1)$. Osserviamo che se $y = 0$, dalla seconda riscrittura segue immediatamente che $x = 0$ e che la coppia $(0,0)$ è soluzione. Ponendo $y \neq 0$ quindi arriviamo a $(x - 2)(y - 1) = 2$, dunque ciascun fattore vale ± 1 o ± 2 e studiando le varie possibilità compatibili otteniamo $(x, y) \in \{(0, 0), (1, -1), (3, 3), (4, 2)\}$, che verificano tutte l'identità di partenza e quindi sono tutte e sole le soluzioni cercate.

2 Allenamenti EGMO 2020 – 4

A4. Trovare tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tali che

$$f(x+y) + f(y+z) + f(z+x) \geq 3f(x+2y+3z)$$

per ogni $x, y, z \in \mathbb{R}$

C4. Si considerino N punti nel piano tali che comunque scelti 3 di questi punti il triangolo che formano ha area al più 1. Dimostrare che c'è un triangolo di area non maggiore di 4 che li contiene tutti.

G4. Sia $ABCD$ un quadrilatero ciclico e siano $P = AD \cap BC$, $R = AC \cap BD$. Siano X, Y, Z i piedi delle perpendicolari condotte da D a AC, BC, PR , rispettivamente. Dimostrare che il punto medio M di CD appartiene alla circonferenza passante per X, Y, Z .

N4. Sia n un intero positivo tale che $24 \mid n+1$. Dimostrare che la somma dei divisori positivi di n è divisibile per 24.

2.1 Soluzioni

A4 Le soluzioni sono tutte e sole le costanti $f(x) \equiv k$, con $k \in \mathbb{R}$. Si verifica infatti che in tal caso $f(x+y) + f(y+z) + f(z+x) = 3k = 3f(x+2y+3z)$, dunque la disuguaglianza è sempre verificata e in particolare è sempre saturata.

Abbiamo dimostrato quindi che tutte le costanti funzionano, mostriamo ora che sono le sole soluzioni possibili. Osserviamo che

- Sostituendo nella disuguaglianza la terna $(x, y = -x, z = x)$ allora si ha $2f(0) + f(2x) \geq 3f(2x)$, da cui:

$$f(2x) \leq f(0)$$

.

- Sostituendo invece $(x, y = x, z = -x)$ si ottiene $2f(2x) + f(0) \geq 3f(0)$ da cui:

$$f(2x) \geq f(0)$$

.

Se ne deduce quindi che $\forall x \in \mathbb{R}$ deve valere $f(2x) = f(0)$, da cui f è una funzione costante, il che conclude.

C4 Sia S l'insieme di N punti del piano considerati nel testo e dividiamo il problema in due sottocasi distinti:

CASO I: i punti di S sono tutti allineati lungo una retta.

In questo caso consideriamo il segmento individuato dai due punti estremi, A e B , lungo l . Consideriamo quindi un segmento ortogonale ad AB , che contiene A e di lunghezza inferiore a $\frac{8}{l}$: il triangolo che ha per base quest'ultimo segmento e vertice in B chiaramente contiene tutti i punti e ha area al più 4, dunque in questo caso la tesi è verificata.

CASO II: esiste almeno una terna di punti non allineati.

Considero A , B e C tale che $\triangle ABC$ sia il triangolo di area maggiore tra tutti quelli che si possono formare con gli N punti dell'insieme S (è ben definito perchè i punti sono in numero finito e il triangolo individuato è non degenere perchè A , B e C non possono essere allineati). Costruiamo ora le tre rette r , s e t , parallele ai tre lati AB , AC e BC passanti rispettivamente per C , B ed A , che si intersecano a formare i punti $r \cap t = A'$, $r \cap s = B'$ e $s \cap t = C'$. Questo triangolo chiaramente ha area

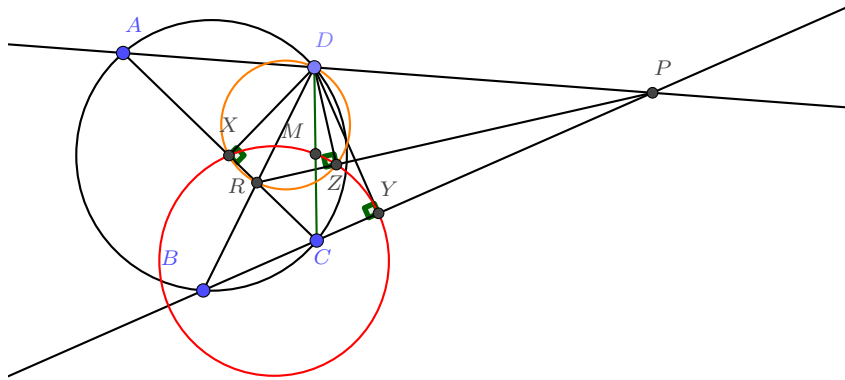
$$\mathcal{A}_{A'B'C'} = 4 \cdot \mathcal{A}_{ABC} \leq 4 \cdot 1 = 4$$

dove si è usata l'ipotesi $\mathcal{A}_{ABC} \leq 1$.

Mostriamo ora che tutti gli N punti devono essere contenuti nel triangolo $\triangle A'B'C'$; wlog consideriamo la retta $A'B'$: se esistesse un punto $P \in S$ nel semipiano definito da $A'B'$ che non contiene A e B il triangolo $\triangle ABP$ avrebbe la stessa base di $\triangle ABC$ ma altezza strettamente maggiore, dunque si avrebbe $\mathcal{A}_{ABC} < \mathcal{A}_{ABP}$, violando l'ipotesi di massimalità dell'area di $\triangle ABC$, da cui si ricava che tutti i punti di S devono stare

dalla stessa parte di A e B rispetto alla retta $A'B'$. Analogamente si mostra che i punti di \mathcal{S} devono contemporaneamente rimanere dalla stessa parte di B e C rispetto a $B'C'$ e di A e C rispetto ad $A'C'$, quindi sono tutti contenuti all'interno del triangolo $\triangle A'B'C'$, il che dà la tesi.

G4 Per dimostrare che il quadrilatero $XYMZ$ è ciclico, dimostriamo che $\angle XMY = \angle XZY$.



Calcoliamo prima $\angle XZY = \angle XZR + \angle RZY$.

Osserviamo che i quadrilateri $DZRX$ e $DZYP$ sono ciclici: infatti $\angle DZR + \angle DXR = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ e $\angle DZP = 90^\circ = \angle DYP$. Quindi $\angle XZR = \angle XDR$ e $\angle RZY = 180^\circ - \angle YZP = 180^\circ - \angle YDP = \angle ADY$.

Inoltre anche il quadrilatero $DXYC$ è ciclico ($\angle DYC + \angle DXC = 180^\circ$), quindi $\angle XDY = 180^\circ - \angle XCY = \angle RCB = \angle ADB$, dove l'ultima uguaglianza vale per la ciclicità di $ABCD$. Quindi:

$$\angle XZY = \angle XZR + \angle RZY = \angle XDR + \angle ADY = 2\angle ADR.$$

Calcoliamo adesso $\angle XMY = \angle XMC + \angle CMY$.

Osserviamo che M è il centro della circonferenza per $DXCY$, quindi $\angle XMC = 2\angle XDC$ e $\angle CMY = 2\angle CDY$, da cui

$$\angle XMY = 2(\angle XDC + \angle CDY) = 2\angle XDY = 2\angle ADB = \angle XZY$$

N4 Innanzitutto osserviamo che $n \equiv -1 \pmod{24}$, dunque in particolare $n \equiv -1 \pmod{3}$ che non è un residuo quadratico in modulo 3, dunque n non può essere un quadrato;

da questo segue che se d è un divisore positivo di n allora $\frac{n}{d}$ sarà anch'esso un divisore positivo di n diverso da d .

Mostriamo ora che $d + \frac{n}{d} \equiv 0 \pmod{24}$ per ogni divisore positivo d di n . Innanzitutto osserviamo che è ben definito l'inverso di d in modulo 24 in quanto $\text{MCD}(d, 24) \mid \text{MCD}(n, 24) = 1$, da cui $\text{MCD}(d, 24) = 1$, il che ci permette di scrivere

$$d + \frac{n}{d} \equiv 0 \pmod{24} \iff d + n \cdot d^{-1} \equiv 0 \pmod{24} \iff d^2 \equiv 1 \pmod{24}$$

dove per passare dalla seconda alla terza espressione si è moltiplicato per d da entrambe le parti e si è usato il fatto che $d \cdot d^{-1} \equiv 1 \pmod{24}$ e che $n \equiv -1 \pmod{24}$. Ora osserviamo che:

- essendo $\text{MCD}(d, 24) = 1$ allora $d \not\equiv 0 \pmod{3}$, per cui $d^2 \equiv 1 \pmod{3}$;
- sempre dal fatto che d e 24 sono coprimi si ha che d è dispari, per cui $d^2 \equiv 1 \pmod{8}$;

Per il teorema cinese del resto dunque si ha che $d^2 \equiv 1 \pmod{24}$ dunque per ogni divisore di n , $d > 0$ è verificata $d + \frac{n}{d} \equiv 0 \pmod{24}$, che immediatamente porta alla tesi.

3 Allenamenti EGMO 2020 – 5

A5. Determinare tutti i polinomi a coefficienti reali tali per cui

$$(x^2 - 6x + 8)p(x) = (x^2 + 2x)p(x - 2)$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$.

C5. Su un tavolo sono poste 2019 carte in fila, una accanto all'altra, alcune a faccia in su e altre a faccia in giù. Francesca gioca a un gioco in cui l'unica mossa possibile è scegliere una carta a faccia in su, toglierla (separando eventualmente la striscia in due segmenti che poi rimarranno disgiunti), e ribaltare le eventuali carte adiacenti. Quali e quante sono le configurazioni per cui Francesca riesce a toglierle tutte?

G5. Sia $\triangle ABC$ un triangolo acutangolo tale che $\angle ABC < \angle ACB$. La perpendicolare a BC condotta da A incontra la circonscritta ad $\triangle ABC$ in D , mentre M è il punto medio di AD . La tangente alla circonscritta ad $\triangle ABC$ in A interseca l'asse di AD in E , e la circonscritta a $\triangle MDE$ interseca la circonscritta ad $\triangle ABC$ in F (oltre che in D). Siano infine G il piede della perpendicolare a BD condotta da A e N il punto medio di AG . Si dimostri che B , N ed F sono allineati.

N5. Indichiamo con \mathbb{Z}^+ l'insieme degli interi positivi e con $d(n)$ il numero di divisori positivi di un intero n . Diciamo che una funzione $f : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$ è *interessante* se valgono le seguenti proprietà

- (a) $d(f(mn)) = d(f(m))d(f(n))$ per ogni coppia di interi positivi m e n ;
- (b) $d(f(n)) \leq d(n)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Trovare tutte le funzioni interessanti.

3.1 Soluzioni

A5 Innanzitutto riscriviamo l'ipotesi mettendo in evidenza le radici dei polinomi che vi compaiono:

$$(x-2)(x-4)p(x) = x(x+2)p(x-2)$$

Sostituendo a x i valori $-2, 0, 2$ e 4 otteniamo le condizioni $p(-2) = p(2) = p(0) = 0$ (ossia 0 e ± 2 sono radici di p), quindi p è della forma $p(x) = x(x-2)(x+2)q(x)$, con q un altro generico polinomio. Sostituendo nell'identità del testo otteniamo l'equazione

$$x(x-2)^2(x+2)(x-4)q(x) = x^2(x-2)(x+2)(x-4)q(x-2)$$

ossia, semplificando

$$(x-2)q(x) = x \cdot q(x-2).$$

Procedendo in modo esattamente analogo a prima sostituiamo a x le radici dei polinomi che compaiono esplicitamente nell'espressione (quindi 0 e 2), ottenendo che $q(0) = 0$, ossia q è della forma $q(x) = x \cdot r(x)$, con $r(x)$ un generico polinomio. Sostituendo nell'equazione per q dunque si ricava

$$x(x-2)r(x) = x(x-2)r(x)$$

quindi $r(x) = r(x-2)$; ma allora il polinomio $r(x) - r(0)$ ha infiniti 0 ($r(x) - r(0)$ si annulla sicuramente se valutato in un qualunque numero intero pari), e dunque può essere solo il polinomio nullo, vale a dire, equivalentemente, che l'unica soluzione per $r(x)$ sono le costanti, $r(x) \equiv C \in \mathbb{R}$. Ne segue quindi che le soluzioni dell'equazione originaria devono essere della forma $p(x) = C \cdot x^2(x^2 - 4)$.

È di immediata verifica anche il fatto che per ogni costante C reale i polinomi della forma $p(x) = C \cdot x^2(x^2 - 4)$ soddisfano la relazione $(x-2)(x-4)p(x) = x(x+2)p(x-2)$, dunque se ne conclude che queste sono tutte e sole le soluzioni cercate.

C5 La risposta è che tutte e sole le configurazioni con un numero di carte dispari rivolte a faccia in su sono vincenti per Francesca, e quindi sono in totale 2^{2018} , la metà di tutte le configurazioni possibili visto che a ogni configurazione vincente ne corrisponde esattamente una perdente, semplicemente ribaltando ogni singola carta.

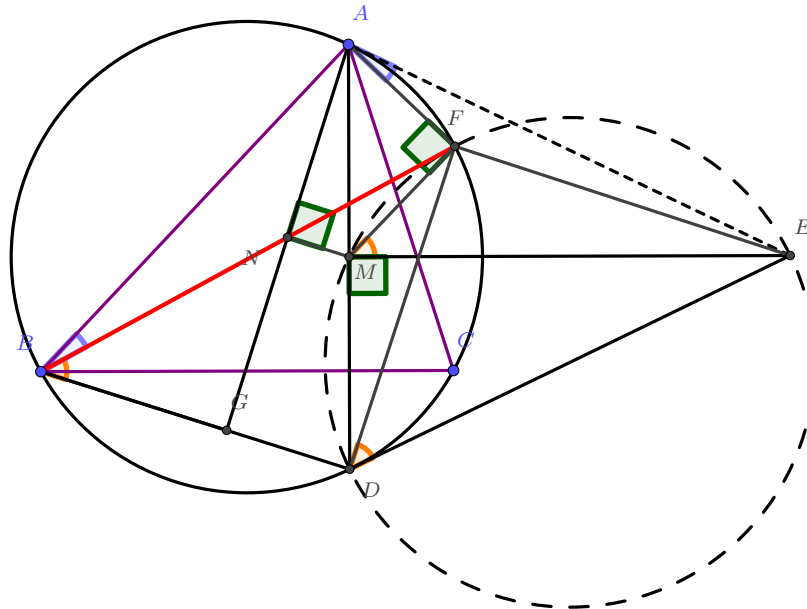
Passiamo a mostrare che tutte le configurazioni con un numero dispari di carte rivolte in su (d'ora in poi le chiamerò bianche, mentre quelle nere saranno quelle a faccia in giù) sono vincenti, e mostriamolo per induzione sul numero n di carte:

- **Passo base:** per $n = 1$ l'unico modo di avere un numero dispari di carte bianche è che l'unica carta sia rivolta in su, e quindi è possibile toglierla.
- **Passo induttivo:** supponiamo la tesi sia vera per tutte le sequenze di carte lunghe al più n e mostriamolo per le strisce lunghe $n + 1$; visto che c'è un numero dispari di carte bianche ce n'è almeno 1, e quindi, scegliendo la prima che si incontra a partire da sinistra e togliendola si separa la striscia iniziale in due segmenti disgiunti, entrambi lunghi al più n , il primo con una sola carta bianca, il secondo con un numero dispari di carte bianche per ragioni di parità, da cui si finisce per ipotesi induttiva.

Ora che abbiamo mostrato che tutte le configurazioni con un numero dispari di carte bianche é vincente ci resta da dimostrare che quelle con un numero pari non funzionano. Procediamo nuovamente per induzione sul numero di carte n ;

- **Passo base:** per $n = 1$ l'unico intero pari non negativo che sia minore uguale é 0, per cui se l'unica carta a disposizione é nera chiaramente Francesca non può vincere.
- **Passo induttivo:** supponiamo che la tesi sia vera per strisce di carte lunghe al più n e mostriamolo per strisce lunghe $n + 1$. Chiaramente se non ci sono carte bianche nella striscia Francesca non può nemmeno iniziare. Se ci sono delle carte bianche, qualunque di essa venga scelta, diciamo la k -esima, togliendola si creano due segmenti disgiunti, la cui somma delle carte bianche prima di girare le carte $k - 1$ e $k + 1$ deve essere dispari (visto che la carta k non viene contata in nessuno dei due segmenti), e girando poi le due carte adiacenti alla k entrambi i segmenti cambiano parità, dunque uno dei due ha un numero pari di carte bianche, ed essendo lungo al più n permette di concludere.

G5 Per prima cosa osserviamo che $MN \parallel BD$, quindi B, N, F allineati se e solo se $\angle DBF = \angle MNF$.



Poichè $E \in$ asse di AD e AE tangente alla circoscritta ad ABC in A , anche ED è tangente alla circoscritta ad ABC in D , e quindi $\angle EDF = \angle DBF$.

Consideriamo adesso $\angle MNF$.

Osserviamo che il quadrilatero $MNAF$ è ciclico. Poichè $MN \parallel BD$, allora $\angle MNA = \angle DGA = 90^\circ$; facciamo vedere che anche $\angle AFM = 90^\circ$. Infatti $\angle AFM = 360^\circ - \angle MFE - \angle EFA$, e

– $\angle MFE = 180^\circ - \angle MDE = 180^\circ - \angle ABD$, dove la prima uguaglianza segue dalla ciclicità di $DEFM$ e la seconda dal fatto che ED è tangente alla circoscritta ad ABC ;

– $\angle EFA = 180^\circ - \angle AEF - \angle EAF$, ma $\angle EAF = \angle ABF$ per la tangenza e

$$180^\circ - \angle AEF = 180^\circ - (\angle AED - \angle FED) = 2\angle ABD + 180^\circ - \angle FMD \quad (1)$$

$$= 2\angle ABD + 180^\circ - 90^\circ - \angle FME \quad (2)$$

$$= 2\angle ABD + 90^\circ - \angle DBF \quad (3)$$

dove l'ultima uguaglianza segue da $\angle FME = \angle EDF = \angle DBF$.

Quindi $\angle EFA = 180^\circ - \angle EAF - \angle AEF = 2\angle ABD + 90^\circ - \angle DBF - \angle ABF = 90^\circ + \angle ABD$.

Quindi

$$\angle AFM = 360^\circ - (180^\circ - \angle ABD) - (90^\circ + \angle ABD) = 90^\circ + \angle ABD - \angle ABD = 90^\circ.$$

Ma allora $MNAF$ è ciclico e

$$\angle MNF = \angle MAF = 90^\circ - \angle FMA \quad (4)$$

$$= 90^\circ - (180^\circ - \angle FMD) \quad (5)$$

$$= 90^\circ - (180^\circ - 90^\circ + \angle FME) \quad (6)$$

$$= \angle EDF = \angle DBF \quad (7)$$

N5 Dimostriamo che l'unica funzione interessante è la funzione costante $f(x) = 1$. Questa è una funzione interessante perchè soddisfa banalmente le due condizioni, dimostriamo che è l'unica.

Vediamo che per $n = 1$, dalla condizione (ii) ricaviamo che $d(f(1)) \leq d(1) = 1$, quindi necessariamente $f(1) = 1$.

Osserviamo inoltre che per ogni primo p , sempre dalla (ii) ricaviamo $d(f(p)) \leq d(p) = 2$, quindi $f(p) = 1$ o $f(p) = q$ con q primo.

Se esiste p primo tale che $f(p) = q$ primo. Allora dalla proprietà (i) troviamo:

$$d(f(q^2)) = d(f(q))d(f(q)) = 2 \times 2 = 4$$

ma, per la proprietà (ii) dovremmo avere che $4 = d(f(q^2)) \leq d(q^2) = 3$, che è assurdo.

Quindi $f(p) = 1 \forall p$ primo. Dimostriamo per induzione forte su n che $f(n) = 1 \forall n$.

- Passo base: $n = 1$, già visto.
- Passo induttivo: Supponiamo $f(m) = 1 \ \forall m < n$ e dimostriamo $f(n) = 1$.
Se n è primo, abbiamo già visto che $f(n) = 1$. Altrimenti esiste p primo tale che $n = pm$ con $m < n$ e $f(p) = f(m) = 1$ per ipotesi induttiva. Quindi per la condizione (i)

$$d(f(n)) = d(f(pm)) = d(f(p))d(f(m)) = 1 \Rightarrow f(n) = 1$$

4 Allenamenti EGMO 2020 – 6

A6. Trovare tutte le funzioni iniettive $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tali che

$$f(f(n)) \leq \frac{n + f(n)}{2}.$$

C6. Filippo ha 2020 pile di libri, dove sulla pila i -esima ci sono i libri $\forall i \leq 2020$ e vuole riordinarli in alcuni scaffali. Per riordinarli adotta la seguente tecnica: ad ogni mossa sceglie un numero naturale k e toglie k libri da alcune pile (che devono avere ciascuna almeno k libri). Quante mosse deve fare al minimo per liberare tutte le pile?

(**N.B.** in mosse diverse può scegliere un numero k differente e pile differenti).

G6. Siano M ed N i punti medi rispettivamente dei lati AC ed AB di un triangolo acutangolo in cui $AB \neq AC$. Siano ω_B la circonferenza di centro M passante per B e ω_C la circonferenza di centro N passante per C . Sia D il punto tale che $ABCD$ è un trapezio isoscele con AD parallelo a BC . Si assuma infine che ω_B ed ω_C si intersecano in due punti distinti P e Q . Si dimostri che D giace sulla retta PQ .

N6. Trovare tutti i numeri m con esattamente tre divisori primi p, q ed r (a due a due distinti) tali che:

$$p - 1 \mid m; \quad qr - 1 \mid m; \quad q - 1 \nmid m; \quad r - 1 \nmid m; \quad 3 \nmid q + r.$$

4.1 Soluzioni

A6 L'unica soluzione possibile è $f(n) = n \quad \forall n \in \mathbb{N}$. La dimostrazione che segue è articolata in alcune osservazioni.

OSSERVAZIONE 1: Dimostriamo per induzione su k che per ogni $k \in \mathbb{N}$ vale:

$$f^k(n) \leq \max\{n, f(n)\}.$$

Passo base: Nel caso $k = 1$ abbiamo per costruzione

$$f(n) \leq \max\{n, f(n)\}.$$

Nel caso $k = 2$ invece possiamo sfruttare l'ipotesi del testo:

$$f(f(n)) \leq \frac{n + f(n)}{2} \leq \max\{n, f(n)\}.$$

Passo induttivo: Supponiamo che la tesi sia vera per tutti i numeri interi fino a k (questa è quindi la nostra ipotesi induttiva) e mostriamo che la disuguaglianza è verificata anche per $k + 1$. Innanzitutto sappiamo per ipotesi che:

$$f^{(k+1)}(n) \leq \frac{f^k(n) + f^{(k-1)}(n)}{2}.$$

Usando l'ipotesi induttiva sappiamo sia $f^{(k-1)}(n) \leq \max\{n, f(n)\}$ sia $f^k(n) \leq \max\{n, f(n)\}$, quindi

$$f^{(k+1)}(n) \leq \frac{f^k(n) + f^{(k-1)}(n)}{2} \leq \max\{n, f(n)\}.$$

Questa prima osservazione ha un'importante conseguenza, infatti i numeri interi positivi minori di $\max\{n, f(n)\}$ sono finiti, per cui esistono $h, k \in \mathbb{N}$ distinti tali che $f^{(k)}(n) = f^{(h)}(n)$; ma allora valgono necessariamente entrambe le condizioni:

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(n) &= f^{(h+1)}(n) \\ f^{(k-1)}(n) &= f^{(h-1)}(n) \end{aligned}$$

(la prima vale perchè f è una funzione, la seconda perchè f è iniettiva), dunque, deve esistere m tale che $f^m(n) = n$. Se ne deduce che necessariamente ci sono dei *cicli*, e che questi sono semplici (non ci sono valori presi una volta sola prima di entrare nel *ciclo*, già n viene ritrovato infinite volte, ciascuna volta riapplicando f al massimo m volte).

OSSERVAZIONE 2: I cicli hanno al più lunghezza 1.

Infatti consideriamo gli elementi a_1, \dots, a_n , tali che

- $f(a_i) = a_{i+1}$ (e $f(a_n) = a_1$);
- $\forall i \neq j \quad a_i \neq a_j$ (quindi $\{a_1, \dots, a_n\}$ è un ciclo lungo n);

- sono ordinati in modo tale che $a_n = \max\{a_1, \dots, a_n\}$.

A questo punto per $n \geq 2$ vale

$$a_n = f(f(a_{n-2})) \leq \frac{a_{n-2} + f(a_{n-2})}{2} = \frac{a_{n-2} + a_{n-1}}{2} < a_n$$

da cui si ha un assurdo.

Dall'osservazione 1 quindi abbiamo ricavato che necessariamente per ogni n l'insieme $\{n, f(n), f(f(n)), \dots\}$ forma un ciclo (ossia riapplicando f iterativamente a un certo punto si ritorna a un valore già preso), ma l'osservazione 2 ci dice che ogni ciclo può essere al massimo lungo 1, ossia proprio $f(n) = n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

C6 La risposta é 11.

Lower bound: Osserviamo che se associamo a ogni pila una stringa, dove il j -esimo elemento é 1 se la pila é stata scelta alla j -esima mossa, e 0 altrimenti, allora se fosse possibile terminare con $n < 11$ mosse, si avrebbe che tutte le stringhe possibili sarebbero $2^n \leq 2^{10} < 2020$. Ma allora, per pigeonhole, due pile avrebbero la stessa stringa, ossia verrebbero esaurite con la stessa sequenza di mosse, cosa impossibile visto che inizialmente tutte le pile hanno altezza diversa. Ne segue che $n \geq 11$.

Upper bound: per l'upper bound generalizziamo il problema a riordinare k pile di libri dove l' i -esima pila ha i libri con $i \leq k$. Si dimostra per induzione sul numero di pile che $n \leq 1 + \lfloor \log_2(k) \rfloor$.

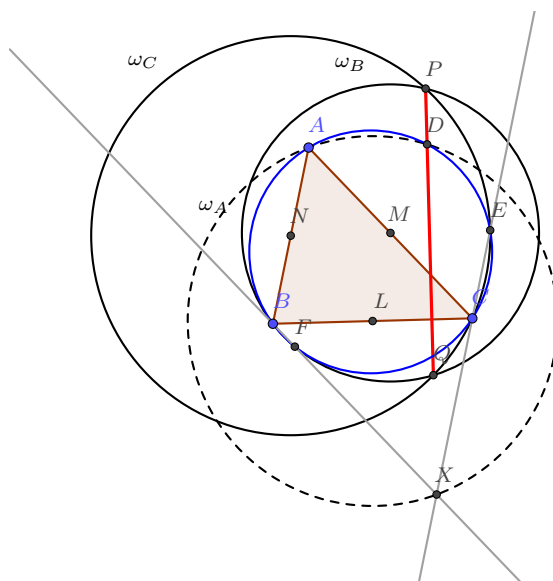
- **Passo base:** Per $k = 1$ é sufficiente una mossa per riordinare i libri, quindi $n \leq 1 = 1 + \lfloor \log_2(1) \rfloor$.
- **Passo induttivo:** supponiamo che la tesi sia vera $\forall k < 2^K$ e mostriamo che vale $\forall k < 2^{K+1}$. Infatti per $2^K \leq k < 2^{K+1}$ come prima mossa togliamo $h = 1 + \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ da tutte le pile con indice i tale che $1 + \lfloor \frac{k}{2} \rfloor \leq i \leq k$. A questo punto ci si é ricondotti a una configurazione analoga a quella con $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor < 2^K$ pile, e in particolare basta effettuare le stesse mosse utilizzate per questa configurazione, invece che sulla sola pila i anche - se non vuota - su quella $1 + \lfloor \frac{k}{2} \rfloor + i$ (con $i \leq \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$), per riordinare i libri, da cui si ha la tesi.

Soluzione alternativa per l'upper bound: invece che procedere induttivamente si può procedere con questo algoritmo: alla mossa $i \geq 1$ togliamo 2^{i-1} libri da tutte le pile indicizzate da un numero che ha un 1 come i -esima cifra binaria (contando a partire dalla meno significativa).

Questo algoritmo funziona perchè è esattamente equivalente a scrivere in binario i numeri di libri contenuti in ciascuna pila, e ad ogni mossa mettere a 0 la i -esima cifra (contando sempre dalla meno significativa) di ognuno di questi. Chiaramente ogni mossa è possibile e ben definita e in al più $1 + \lfloor \log_2(k) \rfloor$ step tutti i numeri sono stati portati a 0, ossia tutti i libri sono stati tolti.

G6 Sia L il punto medio di BC e indichiamo con ω_A la circonferenza di centro L passante per A , sia inoltre Γ la circonferenza circoscritta ad $\triangle ABC$. Osserviamo per prima cosa

che D è il secondo punto d'intersezione fra Γ e ω_A ($\angle DAL = \angle ADL$, quindi $D \in \omega_A$ e $\angle ADL = 180^\circ - \angle DCB = 180^\circ - \angle ABC$).



Definiamo allora i punti E e F in modo che $ABCE$ e $ACFB$ siano trapezi isosceli con basi rispettivamente AB ed EC , e AC e BF . Quindi E ed F sono rispettivamente le intersezione di Γ con ω_C e ω_B . Consideriamo allora le circonferenza Γ , ω_C e ω_D : i loro centri non sono allineati quindi i loro assi radicali concorrono, ovvero PQ , EC e BF si incontrano in un punto X .

Per dimostrare che D appartiene al segmento PQ , ci basta allora dimostrare che $DX \perp BC$, quindi $DX \perp MN$ (ed in questo caso coincide con PQ , perchè $PQ \perp MN$ - asse radicale e retta dei centri - e $X \in PQ$).

Ma ora $ABXC$ è un parallelogramma ($AB \parallel EX$, $AC \parallel FX$), quindi A, X, L sono allineati e X appartiene ω_A , da cui $\angle XDA = 90^\circ$ (AX diametro). Quindi $XD \perp AD$ e $AD \parallel BC$, quindi $XD \perp BC$.

N6 Non vi è nessuna soluzione. Passiamo dunque a dimostrarlo.

La prima ipotesi del testo equivale a dire che m è della forma $m = p^\alpha q^\beta r^\gamma$ con $p, q, r \in \mathbb{P}$;

OSSERVAZIONE 1: osserviamo subito che se p è dispari allora $p - 1$ è pari e, dividendo m , allora m contiene fattori 2. Ma q e r non possono essere uguali a 2, dato che 1 sicuramente divide m , quindi $p = 2$.

OSSERVAZIONE 2: dato che $MCD(qr - 1, q^a r^b) = 1 \quad \forall a, b \in \mathbb{N}$, allora

$$qr - 1 \mid m \implies qr - 1 \mid p^\alpha \implies qr = 1 + 2^c$$

dove per l'ultima implicazione si è usato che p è primo uguale a 2.

In particolare quindi:

$$qr = 1 + 2^c \equiv \begin{cases} -1 & (\text{mod } 3) \iff c \text{ è pari} \\ 0 & (\text{mod } 3) \iff c \text{ è dispari} \end{cases}$$

OSSERVAZIONE 3: Nel caso in cui c fosse dispari allora uno tra q ed r (diciamo q senza perdita di generalità) è uguale a 3, ma quindi

$$2 = q - 1 \mid m$$

In contraddizoe con le ipotesi. Dunque c deve essere pari.

OSSERVAZIONE 4: Dal momento che c è pari (dall'oss. 3), per l'osservazione 2 abbiamo che i residui modulo 3 di q, r hanno segni opposti, quindi $q \equiv 1 \pmod{3}$ ed $r \equiv -1 \pmod{3}$ (o viceversa). Evidentemente quindi $q + r \equiv 0 \pmod{3}$.

Quest'ultima deduzione è in contraddizione con l'ipotesi $3 \nmid q + r$, che ci permette di concludere che non esistono soluzioni.

5 Allenamenti EGMO 2020 – 7

- A7.** Sia $n \in \mathbb{N}$ un numero naturale e siano a_1, \dots, a_n n numeri reali. Dimostrare che esiste un numero reale a tale che tutti i numeri $a_1 + a, \dots, a_n + a$ sono tutti irrazionali.
- C7.** Su una griglia quadrata $(4n + 2) \times (4n + 2)$, una tartaruga può muoversi da una casella a un'altra se queste hanno un lato in comune. La tartaruga inizia a muoversi in un angolo della griglia, passa esattamente una volta in ogni altra casella e infine ritorna nella casella iniziale. In funzione di n , qual è il massimo intero k tale che deve necessariamente esserci una riga o una colonna in cui la tartaruga è entrata almeno k volte?
- G7.** Il triangolo $\triangle ABC$, isoscele su BC è inscritto nella circonferenza ω . Sia P un punto che varia sull'arco \widehat{BC} che non contiene A , e siano I_B e I_C gli incentri dei triangoli $\triangle ABP$ e $\triangle ACP$ rispettivamente. Si dimostri che al variare di P la circonferenza circoscritta a $\triangle PI_B I_C$ passa per un punto fisso.
- N7.** Un intero positivo n è detto *birichino* se può essere scritto nella forma $n = a^b + b$ dove $a, b \geq 2$ sono interi. Esiste una sequenza di 102 interi positivi consecutivi tali che esattamente 100 di questi numeri sono *birichini*?

5.1 Soluzioni

A7 Supponiamo per assurdo che tale numero non esista, dunque per ogni numero reale a almeno uno tra $a_1 + a, \dots, a_n + a$ è razionale.

Sia ora $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ un numero irrazionale e consideriamo la successione $r, 2r, \dots, (n+1)r$.

A questo punto costruiamo l'insieme $S = \{a^{(1)}, \dots, a^{(n+1)}\}$ come segue:

$\forall i \in \{1, \dots, n+1\}$ sia $a^{(i)}$ uno degli a_1, \dots, a_n dati dal testo tale che $a^{(i)} + i \cdot r \in \mathbb{Q}$; per ogni i tale a_i esiste perchè abbiamo supposto che la tesi sia falsa, e quindi per ogni numero reale $i \cdot r$ almeno uno tra $a_1 + i \cdot r, \dots, a_n + i \cdot r$ è razionale.

Tuttavia per Pigeonhole S contiene almeno due elementi uguali (ho scelto $n+1$ numeri da un insieme di al più n numeri distinti), per cui esistono due indici interi distinti $h \neq k \wedge h, k \in \{1, \dots, n+1\}$ tali che:

$$\begin{cases} a^{(h)} + h \cdot r \in \mathbb{Q}; \\ a^{(k)} + k \cdot r \in \mathbb{Q}; \\ a^{(h)} = a^{(k)}; \end{cases} \implies \underbrace{a^{(h)} - a^{(k)}}_0 + (h - k) \cdot r \in \mathbb{Q} \implies \underbrace{(h - k)}_{\neq 0} \cdot r \in \mathbb{Q}$$

dove la prima implicazione è stata ottenuta semplicemente sottraendo le prime due equazioni del sistema.

Questo porta però ad un assurdo perchè si era supposto r irrazionale e quindi un intero non nullo come $h - k$ moltiplicato per r non può dare un razionale, il che conclude.

C7 La risposta è $k = 2n + 2$. Supponiamo senza perdita di generalità che la tartaruga parta dalla casella in alto a sinistra e numeriamo le colonne da sinistra a destra e le righe dall'alto verso il basso con gli indici da 1 a $4n + 2$.

Lower bound: Fissato un cammino γ chiamiamo $r_i^{(\gamma)}$ il numero di ingressi nella i -esima riga e $c_i^{(\gamma)}$ il numero di ingressi nella colonna i -esima. Denominiamo infine Q la somma totale di ingressi in ogni riga e in ogni colonna della griglia ed eseguiamo un *double counting* su questa quantità.

Conteggio per caselle: la tartaruga passa una ed una sola volta per ciascuna casella, e quando ci entra cambia riga mantenendo la medesima colonna, o cambia colonna rimanendo sulla stessa riga, incrementando Q di 1 in entrambi i casi. Ne segue che $Q = (4n + 2)^2$.

Conteggio per righe e colonne: dalla definizione di r_i e c_i segue che $Q = \sum_{i=1}^{4n+2} (r_i^{(\gamma)} + c_i^{(\gamma)})$.

$$\implies \sum_{i=1}^{4n+2} (r_i^{(\gamma)} + c_i^{(\gamma)}) = (4n + 2)^2$$

Detto Γ l'insieme di tutti i possibili cammini del tipo descritto nel testo osserviamo che la quantità che stiamo cercando è:

$$k = \min_{\gamma \in \Gamma} \left\{ \max_{1 \leq i \leq 4n+2} \{r_i^{(\gamma)}, c_i^{(\gamma)}\} \right\}.$$

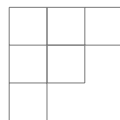


Figura 1: angolo in alto a sinistra della griglia.

Chiamiamo $h^{(\gamma)} := \max_{1 \leq i \leq 4n+2} \{r_i^{(\gamma)}, c_i^{(\gamma)}\}$ e quindi per definizione:

$$(4n+2)^2 = Q = \sum_{i=1}^{4n+2} (r_i^{(\gamma)} + c_i^{(\gamma)}) \leq 2 \cdot (4n+2)h^{(\gamma)} \implies h^{(\gamma)} \geq 2n+1$$

e quindi sicuramente:

$$k = \min_{\gamma \in \Gamma} \{h^{(\gamma)}\} \geq 2n+1.$$

Consideriamo una delle righe di bordo, diciamo la prima per fissare le idee: il numero di volte che la tartaruga entra in questa riga deve essere uguale al numero di volte che ne esce (perchè la tartaruga passa una e una sola volta in ogni casella), ma non può entrare e uscire dalla riga 1 usando una stessa casella (fissata una casella della prima riga, se la tartaruga vi entra arriva dalla casella sotto, nella quale quindi non può più rientrare: può solo andare a destra o sinistra uscendo attraverso un'altra casella). Dunque $r_1 \leq \frac{4n+2}{2} = 2n+1$, e lo stesso vale per le altre righe o colonne di bordo.

Consideriamo ora un angolo, per esempio quello in alto a sinistra come rappresentato in figura 5.1. Per entrare nella casella d'angolo la tartaruga entra in una sola tra la prima riga e la prima colonna, quindi almeno uno tra r_1 e c_1 è strettamente minore di $2n+1$; tuttavia la somma globale degli $r_i + c_i$ è fissata, quindi deve esserci una riga o una colonna in cui la tartaruga è entrata almeno $2n+2$ volte:

$$\implies \forall \gamma \in \Gamma \quad h^{(\gamma)} \geq 2n+2 \implies k \geq 2n+2.$$

Upper bound: è sufficiente trovare un esempio di percorso in cui la tartaruga non entra $2n+3$ volte in nessuna riga nè in nessuna colonna.

Un esempio di questo tipo può essere costruito nel modo che segue:

dividiamo la griglia in 4 sottogriglie quadrate, ciascuna $(2n+1) \times (2n+1)$ e chiamiamole A, B, C, D in senso orario.

Partendo dalla casella in alto a sinistra della griglia A la tartaruga si sposta a destra di 1, poi percorre la seconda colonna fino al bordo della griglia A ; a questo punto si sposta a destra sulla casella adiacente e risale fino al bordo superiore e prosegue *a serpente*, riempiendo la griglia A (tranne la prima colonna).

Dato che il numero di colonne di A è dispari, quando finisce di riempirla si trova nella casella in alto a destra: da qui procede verso destra fino al bordo, scende alla riga inferiore e torna indietro fino al bordo, andando avanti a serpeggiare fino a riempire B .

Di nuovo, quando finisce, essendo il numero di righe di B dispari, si trova nella casella nell'angolo in basso a sinistra di B , da cui può scendere fino al bordo inferiore della griglia (riempiendo l'ultima colonna di C), spostarsi nella colonna a sinistra e risalirla

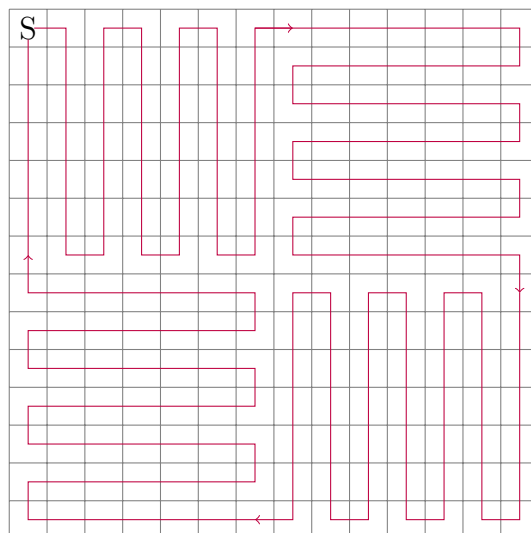


Figura 2: percorso che dimostra l'upper bound nel caso $n = 3$.

tutta, riempiendo C in modo simile a quanto fatto per A .

Quando finisce di riempire C si trova nel suo angolo in basso a sinistra: da lì procede verso sinistra fino al bordo, sale alla riga superiore e prosegue *a serpente* come fatto con B fino all'angolo superiore sinistro di D .

Da qui può tornare alla casella di partenza risalendo la prima colonna di A , rimasta libera. Un esempio di tale percorso per $n = 3$ si trova in figura 5.1.

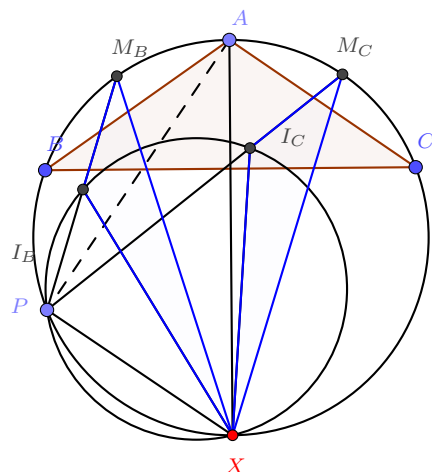
È chiaro che la tartaruga passa esattamente una volta in ogni casella e fissata una qualunque riga che passi per A e B , ci si entra al più $2n + 1$ volte in A e una volta in B ; analogo discorso vale per le altre righe e colonne, e quindi in ognuna di queste la tartaruga entra al più $2n + 2$ volte.

G7 Ricordiamo il seguente lemma (provate a dimostrarlo!)

Lemma [Incenter/Excenter Lemma]: Dato un triangolo $\triangle ABC$, siano I l'incentro del triangolo, I_A l'excentro relativo ad A . Allora IBI_AC è ciclico e il centro della circonferenza è M punto medio dell'arco \widehat{BC} , e inoltre A, I, M, I_A sono allineati.

Osserviamo inoltre che dato $\triangle ABC$ con M punto medio di BC e X sull'asse di BC tale che $AX \perp AM$, allora X appartiene alla circoscritta a ABC : infatti sia M' il punto diametralmente opposto a M nella circoscritta ad ABC , allora MM' diametro, quindi $\angle M'AM = 90^\circ$ e M, O, M' è asse di BC , perché sappiamo dall'Incenter-Excenter Lemma che M è equidistante da B e C , quindi $M' = X$.

Sia X il punto medio dell'arco BC : dico che X è il punto fisso cercato. Chiamiamo $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \angle ACB = \beta$. Sia inoltre ω la circonferenza per PI_BI_C .



Per prima cosa osserviamo che poichè il triangolo è isoscele $\angle XPA = 90^\circ$ e che inoltre $\angle I_BPA = \frac{\angle BPA}{2} = \frac{\beta}{2} \angle API_C$: quindi AP è bisettrice dell'angolo I_BPI_C . Per l'osservazione fatta prima basta mostrare che X sta sull'asse di I_BI_C per far vedere che $X \in \omega$.

Ora consideriamo M_B e M_C rispettivamente i punti d'intersezione di Γ con PI_B e con PI_C . Diciamo che i triangoli $\triangle XM_BI_B$ e $\triangle XM_CI_C$ sono congruenti.

- Incenter-Excenter Lemma $\implies M_BI_B = M_BA, M_CI_C = M_CA$ e $M_CA = M_BA$ perchè $\angle I_BPA = \angle API_C$, quindi $M_BI_B = M_CI_C$.
- Siccome AX è diametro e $M_CA = M_BA$, allora $XM_B = XM_C$ ($\triangle XM_BA, \triangle XM_CA$ sono triangoli rettangoli con due lati uguali)
- $\angle PM_BX = \angle PM_CX$, quindi $\angle I_BM_BX = \angle I_CM_CX$

N7 Osserviamo che è facile costruire una sequenza arbitraria di numeri birichini consecutivi, infatti scelto $M = k!$, i numeri $a^M + i$ sono tutti birichini per $i = 1, \dots, k$, infatti

$$a^M + i = (a^{\frac{M}{i}})^i + i.$$

Consideriamo la funzione $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tale che $f(n) = \#\{m \text{ birichini} \mid n \leq m \leq n+101\}$, che conta il numero di numeri birichini fra n e $n+101$: risolvere il problema equivale a dimostrare che esiste n tale che $f(n) = 100$. Osserviamo che $1, 2$ non sono numeri birichini, quindi $f(1) \leq 100$.

Inoltre per la costruzione fatta prima $f(2^{102!} + 1) = 102$.

Osserviamo inoltre che $f(n+1) - f(n) \in \{-1, 0, 1\}$, cioè ad ogni passo la funzione può solo rimanere uguale, o aumentare o diminuire di 1. Ma quindi esisterà sicuramente $1 \leq n \leq 2^{102!} + 1$ per cui $f(n) = 100$.

6 Allenamenti EGMO 2020 – 8

- A8.** Sia $n \geq 3$ un intero, e siano a_2, \dots, a_n alcuni numeri reali positivi tali che $a_2 \cdots a_n = 1$. Si dimostri che

$$(1 + a_2)^2(1 + a_3)^3 \cdots (1 + a_n)^n > n^n.$$

- C8.** Giacomo sfida Nikita a questo gioco: prende una tavoletta di cioccolato rettangolare e fa $n - 1$ tagli orizzontali ed $n - 1$ tagli verticali (con $n \geq 2$), dividendola in n^2 caselle. Ad ogni mossa Nikita dice a Giacomo le coordinate di una casella e Giacomo gli risponde con l'area della casella individuata. Di quante mosse ha bisogno Nikita al minimo per arrivare a conoscere le aree di tutte le caselle?

- G8.** Sia ABC un triangolo e O il suo circocentro. Indichiamo con T l'intersezione fra la circonferenza per A e C e tangente a AB e la circonferenza circoscritta a BOC . Detta K l'intersezione fra TO e BC , dimostrare che KA è tangente alla circonferenza circoscritta ad ABC .

- N8.** Dimostrare che $\forall n \in \mathbb{N}$, con $n > 1$, l'equazione:

$$\sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k!} + 1 = 0$$

non ha soluzioni razionali.

6.1 Soluzioni

A8 Osserviamo che per ogni $k \in \mathbb{N}$ vale che:

$$(1 + a^k)^k = \left(\underbrace{\frac{1}{k-1} + \dots + \frac{1}{k-1}}_{k-1 \text{ volte}} + a_k \right)^k$$

e per $AM - GM$

$$\left(\underbrace{\frac{1}{k-1} + \dots + \frac{1}{k-1}}_{k-1 \text{ volte}} + a_k \right)^k \geq a_k \cdot \frac{k^k}{(k-1)^{k-1}}$$

e quindi, rimoltiplicando per k da 2 ad n :

$$\prod_{k=2}^n (a_k + 1)^k \geq n^n \cdot a_2 a_3 \dots a_n = n^n.$$

L'uguaglianza vale se e solo se $\forall k \quad a_k = \frac{1}{k-1}$, ma in tal caso, avendo $n \geq 3$, $a_2 \dots a_n < 1$, che è vietato per ipotesi.

C8 La risposta è $2n - 1$. La dimostrazione è divisa in due parti.

Upper Bound: scegliendo tutte le caselle della prima riga e tutte le caselle della prima colonna Nikita può ricavare l'area di una qualunque altra casella; infatti detta $A_{i,j}$ l'area della casella all'incrocio tra la i -esima riga e la j -esima colonna per costruzione vale:

$$A_{i,j} = \frac{A_{i,1} \cdot A_{1,j}}{A_{1,1}}$$

dove $A_{i,1}$, $A_{1,j}$ e $A_{1,1}$ sono tutte note perchè sono tra le caselle di cui Nikita chiede a Giacomo l'area.

Poichè il numero di caselle sulla prima riga o sulla prima colonna è $2n - 1$ Nikita, con al più $2n - 1$ mosse riesce a ricavare l'area di tutte quelle nella griglia.

Lower Bound: consideriamo il grafo bipartito così costruito: da una parte vi sono i vertici r_i ($1 \leq i \leq n$), ciascuno associato a esattamente una riga della tabella, mentre dall'altra ci sono i vertici c_j in corrispondenza biunivoca con le colonne. Inoltre vi è un arco che connette r_i a c_j se e solo se Nikita ha chiesto a Giacomo l'area della casella all'incrocio tra la riga i e la colonna j . Mostriamo che se il grafo non è connesso¹ Nikita non può ricavare le aree di tutte le caselle.

Supponiamo che il grafo non sia connesso, e consideriamo una componente connessa²

¹Un grafo si dice connesso se, scelti due vertici qualunque v_i e v_j è possibile passare da uno all'altro *camminando* solo sugli archi presenti.

²Si definisce componente connessa di un grafo un sottoinsieme massimale di vertici tali che il sottografo associato sia connesso, ossia se si verificano le seguenti due condizioni:

- (*connessione*) per una qualunque coppia di vertici di questo sottoinsieme è possibile *camminare* da uno all'altro usando solo gli archi presenti;
- (*massimalità*) aggiungendo al sottoinsieme un qualunque altro vertice il sottografo diventa sconnesso.

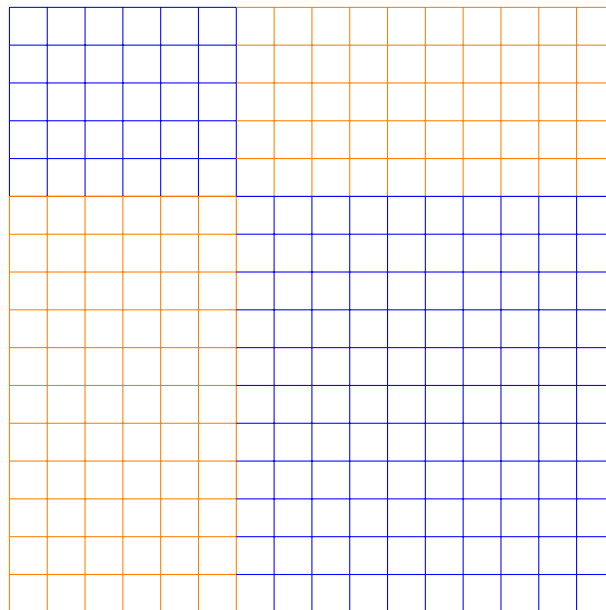


Figura 3: esempio con $n = 15$.

A e il suo complementare B . Senza perdita di generalità possiamo rinominare gli indici dei vertici in modo che esistano h e k tali che

$$\begin{cases} \forall i \leq h & r_i \in A; \\ \forall i > h & r_i \in B; \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \forall j \leq k & c_j \in A \\ \forall j > k & c_j \in B \end{cases}$$

In termini del problema originario questo equivale a dire che Nikita ha fatto domande a Giacomo solo riguardo a caselle nel sotto-rettangolo $k \times h$ in alto a sinistra o nel suo opposto al vertice, come quelli evidenziati in blu nella figura 6.1.

Chiamiamo A , C , B e D in ordine orario a partire da quello in alto a sinistra i sotto-rettangoli definiti dal k -esimo taglio verticale e dall' h -esimo taglio orizzontale. Eseguiamo questa sequenza di mosse:

- dilatiamo la distanza tra i primi k tagli verticali in modo da raddoppiare il lato orizzontale delle caselle nei sottoquadrati A e D .
- Dimezziamo il lato verticale delle caselle nei sottorettangoli A e C contraendo la distanza tra i primi h tagli verticali.
- Raddoppiamo il lato verticale dei sottoquadrati B e D dilatando la distanza tra gli ultimi $n - h - 1$ tagli orizzontali.
- Dimezziamo il lato orizzontale dei sottoquadrati C e B contraendo la distanza tra gli ultimi $n - k - 1$ tagli verticali.

Alla fine di queste mosse abbiamo ottenuto una nuova tavoletta di cioccolato, in cui le aree delle caselle nei sotto-rettangoli A e B sono le stesse della precedente mentre le caselle nel sotto-rettangolo D hanno area quadruplicata, e le caselle di C hanno area divisa per 4 rispetto alla situazione precedente (le dimensioni globali di questa nuova

È un lemma noto (molto semplice, provate a dimostrarlo!) che un grafo connesso di N vertici ha almeno $N - 1$ archi, quindi nel nostro caso (in cui abbiamo $N = n$ (righe) + n (colonne) = $2n$) ci sono almeno $2n - 1$ archi, ossia Nikita fa almeno $2n - 1$ domande.

- la circonferenza per A, T, C è tangente ad AB in A , quindi $\angle ATC = 180^\circ - \angle BAC = 180^\circ - \alpha$
- $\angle CTO = \angle CBO = 90^\circ - \alpha$

- l'asse radicale delle circonferenze circonscritte a A, B, C e O, B, C è la retta BC ;
- l'asse radicale delle circonferenze circonscritte a A, T, O e O, B, C è la retta OT ;
- quindi l'asse radicale delle circonferenze circonscritte a A, B, C e A, T, O passa per K : osserviamo A e i centri delle due circonferenze sono allineati, quindi le

due circonferenze sono tangenti in A e il loro asse radicale è la tangente in A alla circonferenza circoscritta ad ABC . Poichè questo asse radicale passa per K , abbiamo che AK è tangente alla circonferenza circoscritta ad ABC .

N8 Nota: Nel corso dell'esposizione della soluzione di fa uso della convenzione $0! = 1$.

Dimostriamo innanzitutto un lemma che sarà utile nello svolgersi della dimostrazione.

Lemma: Si definisce valutazione p -adica di un intero k e si indica $v_p(k)$ la massima potenza di p che divide k , ossia $p^{v_p(k)} \mid k \wedge p^{1+v_p(k)} \nmid k$.

Dimostriamo che $v_p(k!) < k$ per ogni $p \in \mathbb{P}$.

Possiamo scrivere k in modo unico come $k = a_0 + a_1p + \dots + a_hp^h$, dove i coefficienti a_0, \dots, a_h sono le (uniche) cifre della scrittura in base p di k , e in particolare $\forall i \in \{1, \dots, h\} \ 0 \leq a_i < p$. Ora osserviamo che la valutazione p -adica di $k!$ è data semplicemente da:

$$v_p(k!) = \left[\frac{k}{p} \right] + \left[\frac{k}{p^2} \right] + \dots + \left[\frac{k}{p^h} \right]$$

(dove con $\left[\dots \right]$ si è indicata la parte intera) quindi in particolare, usando lo sviluppo di k in potenze di p si ha:

$$v_p(k!) = a_0 \cdot 0 + a_1 + a_2 \cdot \frac{1-p^2}{1-p} + \dots + a_h \cdot \frac{1-p^h}{1-p}$$

ma essendo $p > 1$ è chiaro che $\forall j \in \{1, \dots, h\}$ vale $\frac{1-p^j}{1-p} < p^j$, dunque $v_p(k!) < k$ che è la tesi del lemma.

OSSERVAZIONE 1: Osserviamo che se c'è una soluzione razionale all'equazione nel testo, allora questa deve essere intera. Siano infatti $a, b \in \mathbb{Z}$, tali che $MCD(a, b) = 1$ e che:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \cdot \frac{a^k}{b^k} + 1 = 0.$$

Ma allora, moltiplicando ambo i membri per $n! \cdot b^n$ abbiamo:

$$a^n + n \cdot a^{n-1}b + n(n-1) \cdot a^{n-2}b^2 + \dots + n! \cdot b^n = 0$$

e siccome b divide il membro di destra dell'equazione e tutti gli addendi a sinistra eccetto il primo, si deve avere anche $b \mid a^n$, da cui, siccome $MCD(a, b) = 1$, si conclude che $b = \pm 1$.

L'osservazione appena dimostrata quindi riduce la tesi a dimostrare che non esistono soluzioni intere all'equazione del testo. Supponiamo per assurdo che esista $m \in \mathbb{Z}$ tale che

$$\sum_{k=1}^n \frac{m^k}{k!} + 1 = 0$$

ossia, moltiplicando tutto per $n!$

$$\sum_{k=1}^n \frac{n!}{k!} \cdot m^k + n! = 0$$

dove l'ultima è quindi una somma di soli addendi interi.

OSSERVAZIONE 2: m deve essere diverso da ± 1 .

Infatti se $m = 1$ sicuramente $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} + 1 > 0$ perchè somma di soli addendi positivi, mentre se $m = -1$ possiamo distinguere i due casi in cui n è pari oppure dispari. Nel caso di n dispari, $n = 2a + 1$ allora si ha

$$\sum_{k=1}^n \frac{m^k}{k!} + 1 = \sum_{k=0}^a \left(\frac{1}{(2k)!} - \frac{1}{(2k+1)!} \right) > 0$$

(dove serve $a > 0$, che è assicurata dall'ipotesi $n > 1$) mentre se n è pari allora

$$\sum_{k=1}^n \frac{m^k}{k!} + 1 = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!} + \frac{1}{n!} > 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!} > 0$$

dove si è usato il fatto che $n-1$ è dispari e quindi la somma troncata ad $n-1$ è positiva per il caso trattato prima.

Sia ora $p \in \mathbb{P}$ un primo che divide m e $h = v_p(n!)$ la valutazione p -adica di $n!$. Tale primo p esiste perchè abbiamo appena mostrato che $m \neq \pm 1$. Osserviamo che ogni addendo della somma $\sum_{k=1}^n \frac{n!}{k!} \cdot m^k$ ha una valutazione p -adica:

$$v_p \left(\frac{n!}{k!} \cdot m^k \right) = v_p(m^k) + v_p(n!) - v_p(k!) > k + h - k = h$$

dove si è fatto uso del lemma dimostrato inizialmente e del fatto che $p \mid m$. Ma allora $p^{h+1} \mid \sum_{k=1}^n \frac{n!}{k!} \cdot m^k$ ma $p^{h+1} \nmid n!$ (per definizione di h) e dunque è assurdo che si abbia

$$\sum_{k=1}^n \frac{n!}{k!} \cdot m^k + n! = 0.$$

il che conclude la dimostrazione per merito dell'osservazione 1.