

Commenti alla simulazione di Cesenatico

Massimiliano Foschi

3 maggio 2020

1 Problema 1

Problema risultato piuttosto facile, con un punteggio medio di 5,545. L'idea chiave era semplice: Lello può fare in modo di lasciare a Max sempre un numero pari di cioccolatini, costringendolo a lasciarne un numero dispari, quindi diverso da zero. Non ci sono stati approcci (corretti) sostanzialmente diversi da questo. Molte soluzioni errate non tenevano in considerazione una delle due ipotesi, generalmente il fatto che k e n debbano essere coprimi. Non ci sono neanche stati molti punteggi parziali: alcune soluzioni erano in regime di 7– perché non erano giustificati tutti i passaggi. Le pochissime soluzioni in regime di 0+ che hanno ottenuto un punteggio diverso da 0 contenevano generalmente, osservazioni realmente utili alla soluzione o una corretta congettura.

2 Problema 2

Problema risultato inaspettatamente (e tristemente) difficile, con un punteggio medio di soli 2,441 punti. Poteva essere risolto con un unico conto d'angoli per concludere che $AX = AY$. Ci sono stati alcuni approcci diversi, tuttavia, basati sulla similitudine tra AED e ABC e sul fatto che in un triangolo, ortocentro e circocentro sono coniugati isogonali.

Alcuni concorrenti, con soluzioni in regime di 0+, hanno ottenuto punti con osservazioni come la ciclicità di $BCED$. Le soluzioni parziali, a ogni modo, sono state poche. Non sono stati dati punti, d'altra parte, per osservazioni banali come la necessità di mostrare $AX = AY$ o per la costruzione di punti la cui utilità non viene veramente dimostrata.

Ci sono state alcune soluzioni apparentemente esatte ma totalmente errate: esse, generalmente, erano basate su conti d'angoli tautologici o semplicemente sbagliati (come l'asserzione che due "angoli alla circonferenza" sono uguali quando uno di essi non è un angolo alla circonferenza).

3 Problema 3

Problema risultato mediamente difficile, con un punteggio medio di 1,608. Sono stati ottenuti molti punteggi parziali. Il marking scheme con il quale essi sono

stati dati è il seguente:

- **1 punto** per l'osservazione che $x_{n+1} = -2x_n + 3$ (che poteva essere agevolmente trovata con le formule di Viète, nonostante molti di voi abbiano utilizzato la formula risolutiva delle equazioni di secondo grado)
- **2 punti** (non cumulativi) a chi ha ricavato una formula chiusa per x_n
- **3 punti** a chi ha trovato $x_n = (-2)^n(x_0 - 1) + 1$
- **5 punti** a chi ha risolto il punto a)
- **7 punti** a chi ha risolto il punto b) (e dunque entrambi i punti)

L'approccio della soluzione "ufficiale" è basato sulla scomposizione di $y^k - 1 = (-2)^n(x_0 - 1)$ e su osservazioni riguardanti la valutazione 2-adica dei fattori al primo membro. In particolare, per $k = 2$, si nota che 4 non può dividere sia $y - 1$ sia $y + 1$. Per k dispari, si osserva che $\frac{y^k - 1}{y - 1}$ è dispari. Alcuni di voi hanno usato LTE, ma molti hanno perso punti per il suo errato utilizzo o la mancata verifica delle ipotesi.

4 Problema 4

Punteggio medio: 0,734. Nella norma. Non c'è molto da dire sulla soluzione (per quanto non sia facile giungervi): basta guardare modulo 3 e osservare che la parità del numero di multipli di 3 è invariante. Infine, è sufficiente osservare che l'ultimo numero scritto non è multiplo di 9 (ma di 3 sì) è ciò impedisce che ci sia un quadrato.

Non ci sono stati molti parziali: un 5 a una soluzione corretta ma priva di molte giustificazioni e due 1 a osservazioni parziali riguardanti i multipli di 3.

5 Problema 5

Punteggio medio: 0,140. Il problema è risultato piuttosto difficile, ma la cosa non è particolarmente sorprendente.

La nostra soluzione originale si è basata sui seguenti passaggi:

- P, K, H, M e A' sono allineati.
- Q , la seconda intersezione di (PFB) e (PGC) , giace su FG .
- La tesi è equivalente a mostrare che FG è bisettrice di \widehat{PQS} .
- Detto S' il simmetrico di S rispetto a FG , $A, P, D = AH \cap BC, M, S, S'$ giacciono sulla circonferenza di diametro AM .
- Q, P e S' sono allineati.

La prima osservazione non dava diritto a punteggio, la seconda valeva 1 punto e la seconda 2 (non cumulativi).

Una soluzione alternativa di un concorrente era basata sull'osservazione che (QPS) passa per il punto medio di AM .

Un'altra soluzione era basata sull'osservazione che P e Q sono allineati con il simmetrico di A rispetto all'asse di BC .

Piccola sfida per i più esperti: questa configurazione vi ricorda quella di quale problema (estremamente difficile)?

6 Problema 6

Neanche un punto. Una vera e propria strage. Non c'è da sorprendersi: il problema era molto difficile. Non c'è molto da commentare sulle soluzioni, molte delle quali contenevano osservazioni totalmente errate. In particolare, fissato m , la soluzione è polinomiale e non esponenziale, come molti hanno asserito. Lascio una breve traccia di dimostrazione.

- Si sostituisce il numero k con il k -esimo termine della successione di Fibonacci definita con $F_1 = 1$ e $F_2 = 2$.
- Si osserva che ogni intero non negativo può essere scritto come somma di Fibonacci: in particolare, può essere scritto in un solo modo come somma di Fibonacci non consecutivi. Tale modo è anche quello che permette di utilizzare il minor numero di addendi.
- Si osserva che la somma dei numeri scritti in ogni momento sulla lavagna è la somma di al più $m - 1$ Fibonacci.
- Si osserva che tali somme possono essere ottenute tutte (non è affatto banale).
- Si conclude contando quanti numeri minori o uguali a F_n possono essere scritti come somma di al più $m - 1$ Fibonacci.