Allenamenti EGMO 2020 – Cesenatico Edition

1 Sia ABC un triangolo con lati $AB < AC < BC$. Sia Γ la circonferenza circoscritta al triangolo e D il punto medio dell'arco AB che non contiene C. La retta per AD interseca la retta per BC in E e la circonferenza circoscritta al triangolo BDE interseca AB in B e Z. Sia ora H l'ulteriore intersezione diversa da A della circonferenze circoscritta a ADZ con AC. Dimostrare che $BE = AH$.

2 Sono dati $n \geq 3$ numeri reali positivi distinti. Dimostrare che esistono al più $n-2$ interi distinti che sono potenze di 3 e possono essere scritti come somma di tre elementi diversi degli n numeri dati.

3 A Cesenatico vivono 2020 elfi ognuno dei quali indossa un cappello, rosso da un lato e blu da un altro. Un elfo con il cappello rosso può solo mentire, e uno con il cappello blu può solo dire la verità. Sappiamo che oggi ogni elfo ha detto ad ogni altro elfo: "Il tuo cappello è rosso all'esterno". Inoltre durante il giorno qualche elfo può aver rovesciato il proprio cappello in qualsiasi momento (anche più di una volta). Quante volte al minimo è stata compiuta questa operazione?

4 Sia n un intero positivo. Supponi che i suoi divisori positivi possano essere partizionati in coppie (cioè suddivisi in gruppi di 2), tali che in ogni coppia la somma dei due divisori è un numero primo. Dimostra che tutti questi numeri primi sono distinti e che nessuno di questi è un divisore di n.

5 Il generale Tilly e il duca di Wallenstein giocano a "Divide et impera!". Con questo fine, organizzano N soldatini in M battaglioni e gli danno un comando ad ogni turno. Ciascuno dei due deve dare un comando ed eseguirlo nel suo turno.

Ci sono solo due comandi possibili: il comando "Divide!" sceglie un battaglione e lo divide in due battaglioni, di cui il comandante può scegliere la taglia, a condizione che entrambi i battaglioni contengano almeno un soldatino. Il comando "Impera!" rimuove esattamente un soldatino da ogni battaglione.

Perde chi, al proprio turno, non può dare un comando senza perdere neanche un battaglione. Wallenstein inizia.

a) Può costringere Tilly a perdere se parte con 7 battaglioni di 7 soldatini ciascuno?

b) Chi perde se iniziano con $M \geq 1$ battaglioni di $n_1 \geq 1, n_2 \geq 1, \cdots, n_M \geq 1$ $(n_1 + n_2 + \cdots + n_M = N)$ soldatini?

6 Siano k_1, k_2 and k_3 tre circonferenze con centri rispettivamente O_1, O_2 e O_3, tale che nessuno dei tre centri è intero ad una delle altre due circonferenze. Le circonferenze k_1 e k_2 si intersecano in A e in P, le circonferenze k_1 e k_3 si intersecano in C e P, e le circonferenze k_2 e k_3 si intersecano in B e P. Sia X un punto su k_1 tale che la retta XA interseca k_2 in Y e la retta XC interseca k_3 in Z, in modo tale che Y non è interno ai cerchi k_1 e k_3 e Z non è interno a k_1 e k_2.

a) Dimostrare che $\triangle XYZ$ è simile al triangolo $\triangle O_1O_2O_3$
b) Dimostrare che l'area del triangolo $\triangle XYZ$ è minore o uguale a 4 volte l'area del triangolo $\triangle O_1O_2O_3$. È possibile che valga l'uguale?

Care ragazze,

ecco qua l'ultimo attesissimo Allenamento EGMO, per questa volta in versione Cesenatico: per riempire comunque di matematica questo weekend (e i prossimi) abbiamo pensato di proporvi 6 problemi a cui pensare nelle prossime 3 settimane. I problemi sono sullo stile della gara individuale di Cesenatico e sono ordinati per difficoltà.

Le modalità di correzione rimangono le stesse (per chi sente parlare per la prima volta degli allenamenti EGMO, ecco dove potete trovare tutte le **info**): potete caricare le vostre soluzioni sul sito **correzioni-olimpiadi** fino al **29 Maggio alle 08.59**, noi le correggeremo, assegnando ad ogni problema un punteggio da 0 a 7 e motivando il punteggio per poi mandarvi il vostro verbale.

Per spedirci le soluzioni non c'è bisogno di fare tutti i problemi: potete farne solo qualcuno o anche mandare soluzioni parziali. Speriamo però che sia un modo per farvi confrontare con problemi di matematica di un livello che proponga una sfida a tutti, e per farvi imparare qualcosa di nuovo.

Infine, dato che questi sono tempi di grande cambiamento, anche noi vogliamo migliorare sempre di più per coinvolgere sempre più ragazze o aiutarvi quanto meglio ci riesce, quindi insieme al verbale ci piacerebbe mandarvi anche un (brevissimo, promesso!) questionario, in cui possiate esprimere la vostra opinione e darci qualche consiglio. Speriamo che comprendiate la necessità di vincolare il sondaggio a una partecipazione ma se siete interessate a proseguire - o iniziare, o anche riprendere - questo percorso questa è una nuova opportunità di mettersi in gioco, e ci piacerebbe poter imparare anche noi qualcosa da voi!

Immaginiamo che purtroppo questi siano momenti difficili per molte famiglie e che ognuno di noi preferisce affrontarlo a modo suo, ma di questi problemi potete farne ciò che volete: se vi serve un sostegno vi aiuteranno a credere in voi stesse, se volete una distrazione potrebbero essere uno svago piacevole in cui rifugiarsi e se volete un abbraccio vi porteranno il nostro e quello di tutte le altre ragazze che - come voi - ci si stanno cimentando.

Speriamo che questa iniziativa vi piaccia e vi faccia sentire tutte un po' più vicine, noi non ci siamo mai dimenticate di voi e stiamo lavorando per potervi offrire le occasioni migliori da cui ripartire.

A presto!

Il team Allenamenti EGMO

P.S. Non dimenticate di guardare l'Oliforum o la pagina Instagram di ITAMO (o entrambi), potrebbe comparire qualche altra piccola... sorpresa!