Giornalino del gruppo Tutor
Numero 18

Potete inviarci le vostre soluzioni entro il **30 settembre 2005** all'indirizzo di posta elettronica `soluzioni@olimpiadi.ing.unipi.it`. I nomi dei solutori compariranno insieme alle soluzioni con il prossimo numero del giornalino. *Le soluzioni devono essere motivate da un'accurata dimostrazione, anche quando la domanda chiede solo una risposta numerica.*
Per favore spedite un messaggio diverso per ogni soluzione, indicando chiaramente nel soggetto il numero del problema e quello del giornalino corrente (18 in questo caso). Se ne avete bisogno per meglio scrivere le formule, potete inviare allegati in qualunque formato umanamente leggibile (I migliori sono `.ps`, `.pdf`, `.tex`. Il `.doc` va bene ma potrebbe dare qualche problema con i simboli matematici, se riusciste a convertirlo in uno dei precedenti ve ne saremmo grati).

Problema 1

Sia T un triangolo di lati 12, 35, 37. Determinare quanto misura l'altezza più lunga di T.

Problema 2

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ numero naturale, definiamo $\tilde{n}$ il numero ottenuto scrivendo n in base 3, e sostituendo ad le cifre 1 con le cifre 2 e viceversa.
Per quali coppie di naturali a, b è vero che $\tilde{a}\tilde{b} = \widetilde{ab}$?

Problema 3

Sia ABC un triangolo e sia P un punto su AB. Siano Q su BC tale che $BQ = BP$, R su AC tale che $CQ = CR$, P' su AB tale che $AP' = AR$, Q' su BC tale che $BP' = BQ'$, R' su AC tale che $CQ' = CR'$. Dimostrare che P, Q, R, P', Q', R' giacciono su una stessa circonferenza centrata nell'incentro di ABC.

Problema 4

Un albero è un grafo privo di cicli.
Supponiamo di scrivere su ogni vertice di un albero il numero di archi che partono da quel vertice.
Calcolate la somma di tutti i numeri scritti sui vertici e dimostrate che il numero di foglie dell'albero è maggiore o uguale del più grande numero scritto sui vertici.

Problema 5

Dimostrare che se n è un intero positivo, il numero $n^2 + 3n + 5$ non è mai divisibile per 121.

Problema 6

Dimostrare che prendendo 53 interi compresi tra 1 e 100 (estremi inclusi) ne esiste almeno una coppia la cui differenza è pari a 10 e una la cui differenza è pari a 12. Cosa si può dire per una differenza di 11?

Problema 7

In una tabella 2000x2000, nella casella sulla i-esima riga e j-esima colonna è scritto un numero reale a_{ij} in modo tale che per ogni $i \neq j \neq k$ si abbia $a_{ij}a_{jk}a_{ki} = 1$.
Dimostrare che esistono 2000 numeri reali $c_1, c_2, \ldots c_2 000$ tali che $a_{ij} = \frac{c_i}{c_j}$ per ogni i e j.

Problema 8

Data una circonferenza Γ ed un punto A interno ad essa e diverso dal centro; si consideri una corda passante per A e diversa dal diametro, e sia P il punto di incontro delle due tangenti a Γ condotte dagli estremi della corda. Qual è il luogo descritto dal punto P al variare della corda tra tutte le corde passanti per A e diverse dal diametro?

Problema 9

Sia n un intero positivo fissato, e s_k una successione di stringhe di 0 e 1 di lunghezza n definita per ricorrenza nel modo seguente:
$s_1 = 0 \ldots 01$
s_{k+1} si ottiene da s_k cancellando il primo carattere e scrivendo 1 in fondo, a meno che la stringa così ottenuta non sia già comparsa nella successione, nel qual caso scriviamo 0 in fondo.
Dimostrate che i primi 2^n elementi della successione sono tutti distinti.

Problema 10

Siano a, b, c le lunghezze dei lati di un triangolo; dimostrare che

$$a^2(b + c - a) + b^2(c + a - b) + c^2(a + b - c) \leq 3abc.$$

Problema 11

Trovare tutte le funzioni $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ tali che per ogni x, y razionali valga

$$f(x + f(y)) = y + f(x).$$

Problema 12

Sia S un insieme di n punti nel piano (con $n \geq 3$) tale che, comunque presi A, B punti di S, l'asse del segmento AB è asse di simmetria di S.
Dare una caratterizzazione degli insiemi con tale proprietà.