Ammissione EGMO Camp 2021

1. N persone sono sedute attorno ad un tavolo, e ognuno di loro è un furfante o un cavaliere. I furfanti mentono sempre, i cavalieri dicono sempre la verità. Ognuno di loro dichiara che la persona seduta due posti più a sinistra (quindi la persona seduta alla sinistra della persona seduta alla sua sinistra) è un cavaliere. Sapendo che ci sono almeno un furfante e almeno un cavaliere e che $N < 2020$, quali sono i possibili valori di N?

Soluzione: La risposta è che funzionano solo gli N pari.
Per prima cosa mostriamo che con N pari c'è un esempio che funziona: numeriamo i posti da 1 a N, con un furfante seduto in ogni posto pari e un cavaliere in un posto dispari. Naturalmente c'è almeno un furfante e almeno un cavaliere, e ogni cavaliere dirà (dicendo il vero) che due posti più in là siede un cavaliere, così come lo dirà (mentendo) ogni furfante.
Dimostriamo quindi che gli N dispari *non* funzionano [parte anche questa fondamentale per la dimostrazione]. Per ipotesi esiste almeno un cavaliere: numeriamo con 1 il suo posto e progressivamente quelli a seguire in senso orario. Dato che i cavalieri dicono il vero, al posto 3 siede un cavaliere, così come al posto 5 e così via, si mostra per induzione che in ogni posto dispari siede un cavaliere.
Ma dato che N è dispari al posto N siede un cavaliere, che dicendo la verità dirà che al posto 2 siede un cavaliere, e in modo analogo a prima si mostra che in ogni posto pari siede un cavaliere.
Tuttavia in questo modo tutti i posti sono occupati da cavalieri, il che dà un assurdo con l'ipotesi che ci sia almeno un furfante.

2. Sia $\triangle ABC$ un triangolo acutangolo con $|AC| > |BC|$. Sia CD l'altezza: un cerchio con diametro CD interseca il lato AC in E, e il segmento BE in F.
Calcolare $\angle ABE + \angle FCD$ in funzione degli angoli del triangolo.

Soluzione: Poiché $DECF$ è un quadrilatero ciclico, $\angle FCD = \angle FED$ implica

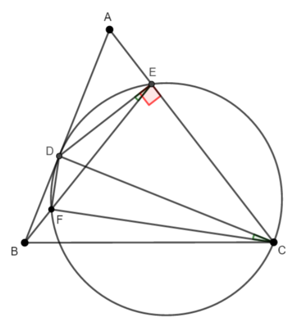
$$\angle ABE + \angle FCD = \angle ABE + \angle FED = \angle DBE + \angle BED = \angle ADE$$

dove l'ultima uguaglianza discende dall'essere $\angle ADE$ angolo esterno nel triangolo $\triangle BDE$.

Inoltre $\angle DEA = \angle CED = 90°$ perché $\angle CED$ è opposto al diametro nella circoferenza per D, E, C, F. Quindi, considerando il triangolo $\triangle AED$ si ha

$\angle ADE = 180° - \angle DEA - \angle EAD = 90° - \angle CAB.$

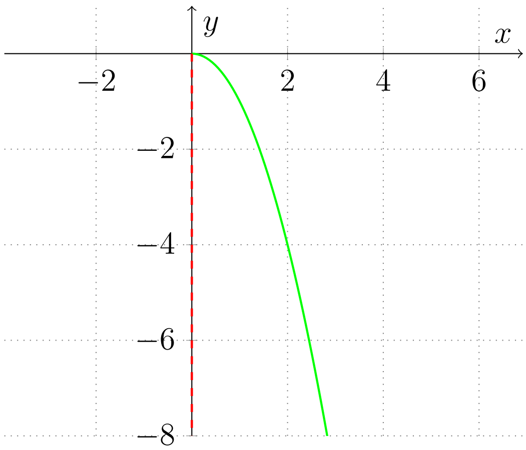
In conclusione $\angle ABE + \angle FCD = 90° - \angle CAB.$



3. Trovare tutti i sottoinsiemi non vuoti $A \subset \mathbb{R}$ con la proprietà che per ogni coppia $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tale che $x + y \in A$, anche $xy \in A$.

Nota: L'implicazione $x+y \in A \Rightarrow xy \in A$ deve valere per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ e non solo per quelli in A. Quindi, ad esempio, l'insieme $A = \{0, 1\}$ non va bene, perché è vero che prendendo $x = 0$ e $y = 1$ allora si ha $xy = 0 \in A$; tuttavia possiamo anche prendere $x = -1$ e $y = 2$ e in questo caso avremmo $x + y = 1 \in A$ ma $xy = -2 \notin A$.

Soluzione: Dato che A deve essere non vuoto, esiste un $a \in A$. Allora, prendendo $x = 0$ e $y = a$, abbiamo che $x + y = a \in A$ e quindi dobbiamo anche avere $xy = 0 \in A$. Abbiamo quindi dimostrato che lo 0 è per forza contenuto in A. Consideriamo ora tutte le coppie del tipo $x = b$ e $y = -b$, con $b \in \mathbb{R}_+$. Per tutte queste avremo $x + y = 0 \in A$ e quindi anche $xy = -b^2$ deve stare in A per ogni $b > 0$. Ma, al variare di $b \in \mathbb{R}_+$, il valore $-b^2$ copre tutti i valori reali negativi.



Otteniamo quindi che tutti i valori reali negativi sono contenuti in A.
Sia ora $a \in \mathbb{R}_+$. Allora il numero $-a - 1$ è negativo, e quindi appartiene ad A. Ma, dato che $-a - 1 \in A$, anche $(-a) \cdot (-1) = a$ deve appartenere ad A. Abbiamo quindi dimostrato che anche tutto $\mathbb{R}_+$ è contenuto in A e quindi, considerando anche i risultati precedenti, $A = \mathbb{R}$.

4. Dimostrare che non esiste nessun intero positivo n per cui $(n+1)2^n$ e $(n+3)2^{n+2}$ sono entrambi quadrati.

Soluzione: Supponiamo per assurdo che esista n intero positivo tale che $(n+1) \cdot 2^n$ e $(n + 3) \cdot 2^{n+2}$ siano entrambi quadrati perfetti. Studiamo separatamente il caso in cui n è pari e poi quello in cui n è dispari.

Se n è pari, allora $n = 2k$ con k intero positivo. Notiamo che $2^n = 2^{2k}$ e $2^{n+2} = 2^{2k+2}$ sono entrambi quadrati perfetti. Quindi, sia $(n + 1) = (2k + 1)$ che $(n + 3) = (2k + 3)$ devono essere quadrati perfetti. Poiché $2k + 1 > 0$ e $2k + 3 > 0$, esistono a e b interi positivi tali che $2k + 1 = a^2$ e $2k + 3 = b^2$:

$$(b - a)(b + a) = b^2 - a^2 = (2k + 3) - (2k + 1) = 2$$

Notiamo che $b+a>0$ e che quindi anche $b-a>0$. Inoltre, i due fattori sono entrambi interi e, dal fatto che $a>0$, deriva che $b+a>b-a$. C'è quindi una sola possibilità per i valori di $b-a$ e $b+a$:

$$\begin{cases} b-a=1 \\ b+a=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=\frac{3}{2} \\ a=\frac{1}{2} \end{cases}$$

che è assurdo dato che a e b dovrebbero essere interi. Di conseguenza, non esistono n pari tali che $(n+1)\cdot 2^n$ e $(n+3)\cdot 2^{n+2}$ siano entrambi quadrati perfetti.

Se invece n è dispari, allora $n=2k+1$ con k intero positivo o nullo. Notiamo che $2^{n-1}=2^{2k}$ e $2^{n+1}=2^{2k+2}$ sono entrambi quadrati perfetti. Quindi, sia $2(n+1)=2(2k+2)=4(k+1)$ che $2(n+3)=2(2k+4)=4(k+2)$ devono essere quadrati perfetti e ciò vale $\Leftrightarrow$ sia $(k+1)$ sia $(k+2)$ sono quadrati perfetti. Poiché $k+1>0$ e $k+2>0$, esistono c e d interi positivi tali che $k+1=c^2$ e $k+2=d^2$:

$$(d-c)(d+c)=d^2-c^2=(k+2)-(k+1)=1$$

Notiamo che $d+c>0$ e che quindi anche $d-c>0$. Inoltre, i due fattori sono entrambi interi e c'è quindi una sola possibilità per i valori di $d-c$ e $d+c$:

$$\begin{cases} d-c=1 \\ d+c=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d=1 \\ c=0 \end{cases}$$

che è assurdo dato che c dovrebbe essere positivo. Quindi non esistono n dispari tali che $(n+1)\cdot 2^n$ e $(n+3)\cdot 2^{n+2}$ siano entrambi quadrati perfetti.

Abbiamo escluso sia il caso di n pari che quello di n dispari, dunque abbiamo dimostrato la tesi.

5. Sia $d(n)$ il numero di divisori positivi di n. Determinare tutti gli interi positivi n tali per cui per ogni divisore positivo t di n si ha $d(t)|d(n)$.

Soluzione: Ricordiamo che se n si fattorizza come $n=p_1^{\alpha_1}\cdots p_k^{\alpha_k}$ dove i p_i primi e gli $\alpha_i>0$, allora $d(n)=(\alpha_1+1)\cdots(\alpha_k+1)$. Inoltre ogni divisore t di n sarà della forma $t=p_1^{\beta_1}\cdots p_k^{\beta_k}$ con $0\le\beta_i\le\alpha_i$ per ogni i.
Per ogni p_i fattore primo di n consideriamo il divisore $t_i=\frac{n}{p_i}$: da $d(t)\mid d(n)$ segue che

$$(\alpha_1+1)\cdots(\alpha_i-1+1)\cdots(\alpha_k+1)\mid(\alpha_1+1)\cdots(\alpha_k+1) \implies \alpha_i\mid(\alpha_i+1);$$

e questo è possibile solo se $\alpha_i=1$.
Quindi se n soddisfa l'ipotesi nella fattorizzazione compaiono solo primi con esponente 1 (si dice che il numero è *square-free*).

Vediamo che in effetti tutti gli square-free verificano l'ipotesi *(e va verificato! È vero che i passaggi della prima parte sono invertibili, ma non abbiamo dimostrato ancora che $d(t)\mid d(n)$ per ogni $t\mid n$).*

Se $n = p_1 \dots p_k$, allora $d(n) = 2^k$. Dato $t \mid n$ supponiamo che nella fattorizzazione di t compaiano x dei k primi che dividono n, allora $d(t) = 2^x \mid 2^k$.

Gli interi n per cui per ogni $t \mid n$, $d(t) \mid d(n)$ sono esattamente gli interi square-free.

6. In un torneo di scacchi si affrontano 12 partecipanti, ciascuno dei quali sfida esattamente una volta ciascuno degli altri partecipanti. In ogni partita una vittoria vale 2 punti, una sconfitta 0 e un pareggio vale 1. Sommando i punteggi delle singole partite si ottiene il punteggio totalizzato da ciascuno scacchista.
Alla fine del torneo si nota che i punteggi totalizzati da tutti i giocatori sono a due a due differenti, e che la somma dei punteggi degli ultimi 5 classificati è pari al punteggio del secondo classificato. Chi ha vinto la partita tra il quarto e l'ottavo classificato?

Soluzione: La risposta è che il quarto classificato vince contro l'ottavo.
Chiamiamo $a_1 > \ldots > a_{12}$ i punteggi dal primo al dodicesimo classificato.
Osservazione 1: ogni giocatore totalizza al più 22 punti. Infatti ogni giocatore gioca esattamente 11 partite, in ciascuna delle quali può totalizzare al massimo 2 punti. In particolare quindi $a_1 \leq 22$.
Osservazione 2: Le partite che coinvolgono gli ultimi 5 classificati sono esattamente (*perchè?*)

$$\binom{5}{2} = 10$$

e, dato che ogni partita aumenta di 2 la somma dei punteggi dei due giocatori, indipendentemente dall'esito delle partite si avrà

$$a_8 + \ldots + a_{12} \geq 2 \cdot \#\text{partite giocate tra gli ultimi } 5 = 20.$$

Ma allora per ipotesi

$$20 \leq a_8 + \ldots + a_{12} = a_2 < a_1 \leq 22.$$

Si prospettano due casi.
Caso 1: $a_2 = 21$. In questo caso il secondo classificato ha vinto 10 partite e pareggiato una partita, in particolare con il primo classificato ha almeno pareggiato. Ma se il primo non ha vinto tutte le partite abbiamo

$$21 \geq a_1 > a_2 = 21$$

che è assurdo. Ricadiamo dunque nel
caso 2: $a_2 = 20$. Se il secondo classificato ha totalizzato 20 punti, allora

$$a_8 + \ldots + a_{12} = 20 = 2 \cdot \#\text{partite giocate tra gli ultimi } 5$$

quindi le partite che vedono fronteggiarsi uno degli ultimi 5 classificati con uno dei primi 7 non possono contribuire alla somma $a_8 + \ldots + a_{12}$, in altre parole gli ultimi 5 hanno perso tutte le partite con i primi 7.
Questo significa che il quarto ha vinto contro l'ottavo.

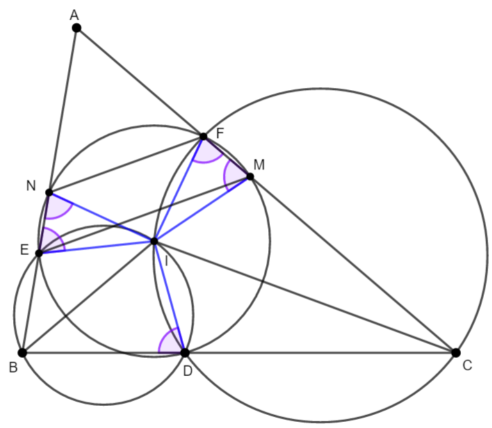
Osservazione: molte soluzioni pervenute seguivano la seguente strada. Si parte esibendo una possibile classifica che rispetta le ipotesi: il primo vince contro tutti, il secondo vince contro tutti tranne il primo, il terzo vince contro tutti tranne i primi due, ..., fino al 12° che perde contro tutti (i punteggi sono dunque 22, 20 , 18 ... 2, 0 punti); in questa situazione il 4° batte l'8°.

È l'unica configurazione possibile? Ora c'è il passaggio delicato: non è sufficiente osservare che, se si cambia l'esito di una partita, il punteggio degli ultimi 5 può solo rimanere uguale o diminuire. Infatti, a priori si potrebbe raggiungere un'altra configurazione ammissibile facendo molti "scambi"; non è detto che il punteggio degli ultimi 5 diminuisca sempre, o che debbano per forza perdere contro i primi classificati, o addirittura che rimangano sempre nelle ultime 5 posizioni.

Bisogna quindi notare e risolvere questi problemi per avere una soluzione completa.

7. Sia ABC un triangolo non equilatero e sia I il suo incentro. Fissato un punto D sul segmento BC, la circonferenza per B, I, D interseca AB in E e la circonferenza per C, I, D interseca AC in F. La circonferenza per D, E, F interseca nuovamente AB, AC in N, M rispettivamente.
Dimostrare che $EM||FN$.

Soluzione: I incentro di $\triangle ABC \Rightarrow \angle EBI = \angle IBD \Rightarrow EI = ID$, in quanto corde opposte ad angoli congruenti nella circonferenza per B, E, I, D. Analogamente $\angle DCI = \angle ICM \Rightarrow ID = IM$.



Quindi $EI = ID = IM \Rightarrow I$ centro della circonferenza per E, D, M da cui $EI = IN = IF = IM$ ovvero i triangoli $\triangle IEN, \triangle IFM, \triangle IEM$ sono isosceli.
Da $BEID$ ciclico, segue

$$\angle BDI = 180° - \angle IEB = \angle NEI.$$

Analogamente, da $CDIF$ ciclico, segue

$$\angle MFI = \angle CFI = 180° - \angle IDC = \angle BDI.$$

Di conseguenza $\angle NEI = \angle MFI$, ma poiché $\triangle IEN$ e $\triangle IFM$ sono isosceli su basi rispettivamente EN ed FM si ottiene $\angle INE = \angle NEI = \angle MFI = \angle IMF$.

Inoltre $\triangle IEM$ è isoscele su base $EM \Rightarrow \angle MEI = \angle IME \Rightarrow \angle NEM = \angle EMF$ perché differenza di angoli congruenti.
Infine, da $NFME$ ciclico, segue $\angle ANF = 180° - \angle FNE = \angle EMF \Rightarrow$
$\angle ANF = \angle EMF = \angle NEM \Rightarrow EM||FN$.

8. Sia $p(x)$ un polinomio a coefficienti reali positivi. Dimostrare che se

$$p\left(\frac{1}{x}\right) \geq \frac{1}{p(x)}$$

è vera per $x = 1$, allora è vera per ogni $x > 0$.

Soluzione: Sia

$$p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0,$$

con gli a_i reali positivi e $a_n \neq 0$. Dato che, per ipotesi, la condizione

$$p\left(\frac{1}{x}\right) \geq \frac{1}{p(x)}$$

è vera per $x = 1$, abbiamo che

$$p(1) \geq \frac{1}{p(1)} \Rightarrow p(1)^2 \geq 1$$

e, essendo $p(1) = a_n + \ldots + a_0$, la possiamo riscrivere come

$$(a_n + \ldots + a_0)^2 \geq 1. \tag{1}$$

Consideriamo ora un $x > 0$. Dato che anche i coefficienti sono positivi, sicuramente avremo che $p(x) > 0$, quindi possiamo riscrivere la proprietà da dimostrare come

$$p\left(\frac{1}{x}\right) p(x) \geq 1$$

e, sostitutendo l'espressione del polinomio,

$$\left(a_n \frac{1}{x^n} + \ldots + a_1 \frac{1}{x} + a_0\right)(a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0) \geq 1.$$

Presentiamo ora due diversi modi di procedere.

Soluzione 1 Consideriamo le due $(n+1)$-uple

$$\left(\sqrt{\frac{a_n}{x^n}}, \ldots, \sqrt{\frac{a_1}{x}}, \sqrt{a_0}\right) \qquad \text{e} \qquad \left(\sqrt{a_n x^n}, \ldots, \sqrt{a_1 x}, \sqrt{a_0}\right).$$

Osserviamo che, essendo i coefficienti positivi e $x > 0$, queste sono ben definite. Possiamo quindi applicare la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz per ottenere

$$\left(\left(\sqrt{\frac{a_n}{x^n}}\right)^2 + \ldots + \left(\sqrt{\frac{a_1}{x}}\right)^2 + \left(\sqrt{a_0}\right)^2\right)\left(\left(\sqrt{a_n x^n}\right)^2 + \ldots + \left(\sqrt{a_1 x}\right)^2 + \left(\sqrt{a_0}\right)^2\right) \geq$$

$$\geq \left(\left(\sqrt{\frac{a_n}{x^n}}\right)\left(\sqrt{a_n x^n}\right) + \ldots + \left(\sqrt{\frac{a_1}{x}}\right)\left(\sqrt{a_1 x}\right) + \left(\sqrt{a_0}\right)\left(\sqrt{a_0}\right)\right)^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{a_n}{x^n} + \ldots + \frac{a_1}{x} + a_0\right)(a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0) \geq (a_n + \ldots + a_0)^2 \geq 1,$$

dove l'ultima disuguaglianza deriva dalla (1). Questo dimostra quindi che

$$p\left(\frac{1}{x}\right) \geq \frac{1}{p(x)}$$

è vera per ogni $x > 0$.

Soluzione 2 Riscriviamo la condizione ottenuta utilizzando le sommatorie:

$$\left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^{-i}\right)\left(\sum_{j=0}^{n} a_j x^{j}\right) \geq 1.$$

Sviluppando il prodotto otteniamo

$$\left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^{-i}\right)\left(\sum_{j=0}^{n} a_j x^{j}\right) = \sum_{i,j=0}^{n} a_i a_j x^{j-i} = a_0^2 + \ldots + a_n^2 + \sum_{\substack{i,j=0 \\ i\neq j}}^{n} a_i a_j x^{j-i}.$$

Dato che, scambiando i e j, il coefficiente $a_i a_j$ rimane uguale, possiamo riscrivere l'ultima sommatoria ottenendo

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^{-i}\right)\left(\sum_{j=0}^{n} a_j x^{j}\right) &= a_0^2 + \ldots + a_n^2 + \sum_{\substack{i,j=0 \\ i\neq j}}^{n} a_i a_j x^{j-i} = \\ &= a_0^2 + \ldots + a_n^2 + \sum_{0\leq i<j\leq n} a_i a_j (x^{j-i} + x^{i-j}).\end{aligned}$$

Cerchiamo di ottenere una stima dell'espressione $x^{j-i}+x^{i-j}$. Ponendo $j-i=k$, questa può essere riscritta come

$$x^k + \frac{1}{x^k}.$$

Dato che $x > 0$, possiamo utilizzare la disuguaglianza tra media aritmetica e media geometrica:

$$\frac{x^k + \frac{1}{x^k}}{2} \geq \sqrt{x^k \cdot \frac{1}{x^k}} = 1,$$

$$\Rightarrow x^k + \frac{1}{x^k} \geq 2.$$

Quindi, essendo tutti i coefficienti positivi, otteniamo la disuguaglianza

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^{-i}\right)\left(\sum_{j=0}^{n} a_j x^{j}\right) &= a_0^2 + \ldots + a_n^2 + \sum_{0\leq i<j\leq n} a_i a_j (x^{j-i} + x^{i-j}) \geq \\ &\geq a_0^2 + \ldots + a_n^2 + 2\sum_{0\leq i<j\leq n} a_i a_j = (a_0 + \ldots + a_n)^2 \geq 1,\end{aligned}$$

dove l'ultima deriva dalla (1). Questo dimostra quindi che

$$p\left(\frac{1}{x}\right) \geq \frac{1}{p(x)}$$

è vera per ogni $x > 0$.