

Allenamenti EGMO 2021 – 3

A3. Trovare tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tali che:

$$f(xy - 1) + f(x)f(y) = 2xy - 1$$

per ogni $x, y \in \mathbb{R}$.

C3. Un mago ha 100 carte numerate da 1 a 100. Le distribuisce in tre scatole, una rossa, una bianca ed una blu, tale che ogni scatola contiene almeno una carta. Un membro del pubblico pesca una carta da due di queste scatole e annuncia la somma dei numeri che legge sulle carte. Con questa sola informazione il mago riesce a indovinare la scatola da cui non è stata pescata nessuna carta. Quanti modi ci sono di distribuire le carte nelle tre scatole in modo che il trucco funzioni?

G3. Siano ω_1 e ω_2 due circonferenze che si intersecano nei punti X and Y . La retta ℓ_1 passa per il centro di ω_1 e interseca ω_2 nei punti P e Q , e la retta ℓ_2 passa per il centro di ω_2 e interseca ω_1 nei punti R e S . Dimostrare che se i punti P, Q, R e S giacciono su una circonferenza ω allora il centro di ω appartiene al segmento XY .

N3. Risolvere l'equazione:

$$3^a + 2^b + 2015 = 3c!$$

con a, b, c interi non negativi.