Allenamenti EGMO 2021 – 4

A4. Siano $x_1, ..., x_n$ ($n \geq 2$) reali nell'intervallo $[1, 2]$. Dimostrare che

$$|x_1 - x_2| + ... + |x_n - x_1| \leq \frac{2}{3}(x_1 + ... + x_n),$$

dove l'uguaglianza vale se e solo se n è pari e la n-upla $(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n)$ è $(1, 2, ..., 1, 2)$ o $(2, 1, ..., 2, 1)$.

C4. È data una griglia 3×3 con celle di lato unitario. Un serpente di lunghezza k è un animale che occupa una k-tupla ordinata di celle di questa griglia, diciamo $(s_1, \ldots, s_k)$. Queste celle devono essere a due a due distinte, e, per $i = 1, \ldots, k-1$, s_i ed s_{i+1} avere un lato in comune.
Dopo essere stato posto in una griglia finita $n \times n$, se il serpente sta occupando le celle $(s_1, \ldots, s_k)$ ed s è una cella vuota con un lato in comune con s_1, il serpente può strisciare ad occupare $(s, s_1, \ldots, s_{k-1})$. Un serpente si è *rivoltato* se occupava inizialmente $(s_1, s_2, \ldots, s_k)$, ma dopo un numero finito di mosse occupa $(s_k, s_{k-1}, \ldots, s_1)$.

Si trovi il più grande intero k tale che si possa mettere un serpente lungo k in una griglia 3×3 che riesce a *rivoltarsi*.

G4. Sia ABC un triangolo acutangolo, D il piede dell'altezza uscente da A e M il punto medio di AC. Supponiamo che X sia un punto tale che $\measuredangle AXB = \measuredangle DXM = 90°$ (supponiamo inoltre che X e C siano da parti opposte rispetto a BM).
Dimostrare che $\measuredangle XMB = 2\measuredangle MBC$.

N4. Sia $\mathbb{Z}_+$ l'insieme degli interi positivi. Determinare tutte le funzioni $f : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$ tali che per ogni m e n il numero intero $f(m) + f(n) - mn$ è diverso da 0 e divide $mf(m) + nf(n)$.