One Hundred Problems - Quarta Edizione

Matteo Salicandro – 05 Dicembre 2020

Istruzioni Generali

- È ammesso l'utilizzo di calcolatrici (come quelle tascabili) per l'esecuzione delle quattro operazioni (addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione). Non è ammesso l'utilizzo di calcolatrici grafiche o scientifiche. Non è ammesso l'utilizzo di programmi per la risoluzione dei problemi, né strumenti di calcolo come WolframAlpha, né app per il disegno geometrico come Geogebra. In particolare, **è proibito parlare con altri concorrenti durante la gara relativamente ad essa**.
- Per ogni problema, indicare nella propria area riservata sul problema interessato un intero compreso tra 0000 e 9999.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, dove non indicato diversamente, si indichi la sua parte intera.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se un problema ha due o più soluzioni, o la risposta vale infinito, si indichi 9999.
- **Se la quantità richiesta è un numero intero maggiore di 9999, se ne indichino le ultime quattro cifre (se non diversamente indicato).**

Scadenze Importanti

- **1440 minuti (24 ore) dall'inizio:** termine per la scelta del Jolly (dopo verrà dato d'ufficio il primo problema).
- **4320 minuti (72 ore) dall'inizio:** termine della gara.

In caso di problemi

- Nel caso in cui non dovessi riuscire ad inserire le risposte sul tuo pannello, invia una mail (entro la fine della gara e con lo stesso indirizzo usato per la registrazione) a matteosalicandro.st@majoranabrindisi.org specificando il problema e la risposta, verrà inserita nel database come se fosse stata inserita nell'ora in cui è arrivata l'e-mail e la classifica verrà ricalcolata con tale variazione.
- Per chiarimenti sul testo, si veda il regolamento completo, che è stato inviato a tutti i partecipanti.

I premi offerti da Scienza Express

- Verranno premiati **i primi 5 classificati della categoria Senior**; il primo classificato, il secondo, il terzo, il quarto e il quinto riceveranno rispettivamente 3 volumi, 3 volumi, 2 volumi, 2 volumi, 1 volume della collana UMath, a scelta del vincitore.
- Verranno premiati **i primi 3 classificati della categoria Junior**; il primo classificato, il secondo e il terzo riceveranno rispettivamente 3 volumi, 2 volumi 1 volume della collana UMath, a scelta del vincitore.
- Verrà premiato **il concorrente con il valore del jolly più alto** (1 volume), che non ha già vinto uno dei premi esposti nei due punti precedenti.

Grazie a:

- Francesco De Benedittis, Valerio Stancanelli e Gabriel Videtta (per aver contribuito al potenziamento della sostenibilità del sistema);
- Tommaso Dossi, Massimiliano Foschi e Matteo Poletto (per aver contribuito a testare alcuni dei problemi).

Dulcis in fundo...

- In bocca al lupo a tutti e date il meglio di voi, ma soprattutto, divertitevi!

Mattysal

1. Si parte!
Consideriamo un intero positivo a. Se è possibile scrivere a come somma di interi positivi dispari non necessariamente distinti, allora a viene detto *departing*. Trovare il più piccolo intero departing maggiore di 2020.

2. Resti
Sia n un intero positivo dispari. Quanti valori diversi può assumere il resto della divisione tra n e 2020?

3. Punti medi e altezze
Nel triangolo ABC si ha $AB = 62, BC = 64, CA = 66$. Sia E il piede dell'altezza uscente da C, F il piede dell'altezza uscente da B e M il punto medio di BC. Quanto vale $ME \cdot MF$?

4. Un gioco poco equo
Alberto e Barbara giocano con un dado non truccato a 6 facce, ciascuna faccia è numerata con un intero da 1 a 6. Il dado viene lanciato, se il risultato è pari, vince Barbara. Se il risultato è dispari, il dado viene lanciato di nuovo. A quel punto, se il risultato è pari, vince Barbara. Altrimenti vince Alberto. Detta p la probabilità di vittoria di Alberto, calcolare $2020p$.

5. Angoli
Dati tre punti nel piano A, B, C supponiamo che r sia la bisettrice esterna dell'angolo acuto $\widehat{BAC}$. La retta r e la retta AB formano un angolo acuto di $74°$. Qual è l'ampiezza dell'angolo $\widehat{BAC}$?

6. La croce di Alice
Alice possiede una griglia quadrata 3×3, ne ottiene una croce rimuovendo i quattro quadrati in ciascun angolo della griglia. Nella sua croce vuole disporre, in ogni casella e una sola volta, tutti e soli i numeri da 1 a 5, facendo in modo che la somma dei numeri scritti sul braccio verticale della croce sia uguale alla somma dei numeri scritti sul braccio orizzontale della croce. In quanti modi lo può fare?

7. I numeri di Roberto
Roberto ha disegnato su un foglio tre triangoli equiestesi T_1, T_2, T_3. Poi scrive 6 interi positivi, che sono in un certo ordine i valori delle basi e delle altezze dei tre triangoli; ha scritto i numeri $3, 4, 8, 12, 32, \ldots$ Qual è il numero che manca?

8. Spaziale
È dato il tetraedro $ABCD$ non degenere. Su ogni faccia del tetraedro è scritto un numero intero. Su ogni vertice del tetraedro è scritta la somma dei numeri che si trovano sulle facce a cui appartiene tale vertice. Sui vertici A, B, C, D sono scritti rispettivamente i numeri: $44, 70, 64, 53$. Qual è il numero scritto sulla faccia ABC?

9. Frazioni un po' ovunque
Consideriamo tutte le coppie di interi strettamente positivi (a, b) tali che $\dfrac{a + \frac{1}{b}}{b + \frac{1}{a}} = 2$ e $a + b > 2020$. Qual è il minimo valore che può assumere a, al variare di tutte le coppie siffatte?

10. Allontanarsi dalla retta gialla
A Matelandia c'è il *treno binario* che viaggia su una linea retta sulla quale giacciono un numero infinito di stazioni $S_0, S_1, S_2, \ldots$ poste in quest'ordine.
Il treno si dice *binario* perché viaggia sui binari e la distanza tra la stazione S_i e la stazione S_{i+1} vale 2^i km per ogni intero i. Determinare il più piccolo intero positivo $n > 2020$ tale che esista almeno una coppia di stazioni (S_a, S_b) collegate da un'unica tratta diretta lunga esattamente n chilometri.

11. Permutando
Determinare quante sono le permutazioni $(a_1, a_2, \ldots, a_{10})$ dell'insieme $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ tali che valga $|a_i - a_{i+1}| < 2$ per ogni $1 \leq i \leq 9$.

12. Campo minato
Luca il soldato si trova nel punto $(0, 0)$ del piano cartesiano che, a causa di una guerra in corso, è stato riempito di mine; ne è stata piazzata una in ogni punto del piano cartesiano che ha come coordinate solo interi positivi. Ad esempio nel punto $(3, 2)$ c'è una mina, nel punto $(\frac{5}{2}, 7)$ non ci sono mine. Luca deve raggiungere il suo accampamento, che si trova nel punto $(100, 2020)$ (dove giaceva prima una mina poi neutralizzata) e siccome è in ritardo, fa un percorso in linea retta che parte dalla sua posizione attuale e finisce fino all'accampamento. Assumendo che tutte le mine siano attive, tranne quella che stava nei pressi dell'accampamento, determinare quante mine incontrerà Luca durante il suo percorso.

13. Somma di MCD
Determinare quanti sono gli interi positivi $k \leq 2020$ tali che:
$MCD(2^0, k) + MCD(2^1, k) + MCD(2^2, k) + \ldots + MCD(2^5, k) \leq 62$.

14. Per infinite coppie
Qual è il più piccolo intero $n > 2020$ per il quale esistono infinite coppie di interi (a, b) tali che $a(a + 1) + b(b + 1) + 2ab = n$?

15. Equidistanti dai vertici
Sia $A_1A_2A_3A_4$ un quadrato di lato 12. Sia P_i il circocentro del triangolo $A_{i+1}A_{i+2}A_{i+3}$ dove gli indici sono intesi eventualmente modulo 4. Determinare il prodotto $P_1A_1 \cdot P_2A_2 \cdot P_3A_3 \cdot P_4A_4$.

16. Risolvere problemi nel sonno
La squadra del Liceo ScansaProblemi è composta da 7 persone. Di queste 7 persone, 2 vengono da AvereSonno, 2 vengono da BellaDormita, 2 vengono da ConsiglioPortaNotte, il restante capitano invece viene da DormiLandia.
Appena inizia la gara, esattamente 3 concorrenti a caso si addormentano. Qual è la probabilità percentuale che si siano addormentati due compaesani?

17. Perugia
In quanti modi si può scegliere una terna di interi non negativi $\{a, b, c\}$ non necessariamente distinti in modo che $a+b+c = 14$ e l'espressione $x^a y^b z^c$ sia non negativa per qualsiasi scelta dei numeri reali x, y, z?

18. Un po' troppi giocattoli
Appena uscito dall'asilo, Luigi si diverte a contare i suoi giocattoli, che scopre essere in grande quantità, cioè il più piccolo intero positivo $n > 120$ con almeno 5 divisori tali che i primi 3 divisori di n disposti in ordine crescente (1 è escluso) siano in progressione aritmetica. (Una progressione aritmetica è una successione in cui la differenza tra due termini consecutivi è costante).
Quanti giocattoli ha Luigi?

19. Terzo posto
Consideriamo tutti e 8 i numeri interi della forma $(-1)^a \cdot 2^{3030} + (-1)^b \cdot 2^{2020} + (-1)^c \cdot 2^{1010}$ dove a, b, c sono elementi di $\{0, 1\}$. Qual è il terzo numero, se questi otto numeri vengono disposti in ordine decrescente? Dare come risposta le ultime 2 cifre.

20. Minimo comune multiplo
Per un certo intero positivo a accade che $mcm(a, a+3) = 816$. Quanto vale a?

21. Prodotto di potenze
Siano $x_1, x_2, ..., x_{10}$ dieci interi positivi tali che $x_1 + x_2 + ... + x_{10} = 13$ $P = x_1^{x_2} x_3^{x_4} ... x_9^{x_{10}}$. Quanto può valere P al massimo?

22. Autobus
Un autobus ha n posti riservati ai passeggeri ed è pieno per il 75%.
Se si fa la differenza tra il numero dei posti occupati dai passeggeri e il numero dei posti vuoti si ottiene 48.
Quanti posti ha l'autobus?

23. Quadrilatero inscritto in un triangolo
Il triangolo ABC ha l'angolo in B retto. Detti M, N, O rispettivamente i punti medi di AB, BC e il circocentro di ABC, si ha che l'area del quadrilatero $AMNO$ è 62. Qual è l'area di ABC?

24. Numeri lunghissimi
Chiamiamo X l'insieme di tutti gli interi positivi che hanno 2020 cifre decimali, cioè l'insieme di tutti gli interi k tali che $10^{2019} \leq k < 10^{2020}$. Definiamo infine $P(n)$ il prodotto delle cifre non nulle né uguali a 1 di n. Ad esempio $P(28) = 16$ e $P(23100) = 6$, per gli interi positivi composti solo dalle cifre 1 o 0, $P(n)$ non è definito. Qual è il minimo intero positivo r tale che la quantità $\sqrt[r]{P(n)}$ sia un numero irrazionale per ogni $n \in X$ tali che $P(n)$ sia definito?

25. Rettangoli e punti medi
All'interno di un rettangolo $ABCD$ con $AB > BC$ accade che preso M punto medio di CD si ha $\widehat{AMD} = 45°$.
Se l'area di $ABCD$ è 72, quanto misura BC?

26. Winter Camp
Allo Stage Winter Camp, che si tiene ogni anno, verso gennaio e presso Pisa si accede inviando le soluzioni dei problemi di ammissione. Ogni anno, vengono proposti 12 problemi, 3 di ogni materia, e un candidato, per poter presentare domanda di ammissione, deve inviare esattamente 9 problemi, almeno 2 problemi per materia. In quanti modi Filippo, che vuole tentare il Winter Camp, può scegliere un sottoinsieme dei problemi da consegnare per tentare di essere ammesso?

27. Esasettrici
Nel triangolo ABC, chiamiamo esasettrici tutte e 5 le rette che dividono l'angolo $\widehat{BAC}$ in 6 parti uguali, che intersecano il lato BC nei punti $P_1, P_2, ..., P_5$ in quest'ordine. Si ha che $\widehat{ABC} + \widehat{AP_1C} + \widehat{AP_2C} + ... + \widehat{AP_5C} = 348°$ e che $\widehat{ABC} = 38°$. Quanto misura in gradi l'angolo $\widehat{BAC}$?

28. Tabellina
Siano a, b interi positivi. Si consideri una tabella $a \times b$ con ab caselle, si hanno a disposizione due colori: il rosso e blu.
Un *segmento* è una configurazione data da due caselle aventi un lato in comune, colorate allo stesso modo. Chiamiamo una colorazione di tale tabella *segmentosa* se essa contiene almeno un segmento e tutte le caselle sono colorate o di rosso o di blu.
Si considerino tutte le coppie ordinate di interi positivi (a, b) tali che le colorazioni segmentose di una tabella $a \times b$ siano 4094, calcolare per ogni coppia siffatta il valore di $a^2 + b^2$ e dare come risposta la loro somma.

29. Il sacchetto pieno di coriandoli

Giorgio ha un sacchetto che contiene un gran numero di coriandoli. Del suo sacchetto Giorgio ci racconta: "Nel mio sacchetto ci sono tanti coriandoli, di $4 < n < 10000$ colori diversi, chiamati $C_1, C_2, ..., C_n$. In particolare, ci sono 1 coriandolo del colore C_1, 2 coriandoli del colore C_2, ..., n coriandoli del colore C_n. Se sei al buio e vuoi essere certo di prendere 4 coriandoli di colore diverso, come minimo ne devi prelevare una certa quantità e tale quantità è un quadrato perfetto. Hey tu, proprio tu! Quanti coriandoli ci sono nel mio sacchetto al massimo? Dai come risposta le ultime 4 cifre di tale valore!

30. Punti medi e circocentri

Sia ABC un triangolo e siano L, M, N rispettivamente i punti medi di BC, CA, AB.
Detto O il circocentro di ABC, supponiamo che si abbia $\widehat{NOM} = 146°$ e $LM + LN = CA$. Quanto misura l'angolo $\widehat{ABC}$?

31. Pesi massimi simmetrici

Carlo è in palestra, e vuole sollevare 210 kg. Per questo, prepara il bilanciere utilizzando un asta da 4 kg, alle cui estremitá desidera piazzare dei dischi per far sì che la massa totale del bilanciere sia pari a 210 kg. Per questo, ha a disposizione un numero infinito di dischi da 5 kg e da 2 kg che deve piazzare alle estremità del bilanciere, ma Carlo vuole che esso sia simmetrico (ossia, se a sinistra ci sono 10 dischi da 2 kg e 3 da 5 kg, vuole gli stessi dischi nella stessa quantità anche a destra.)
In quanti modi Carlo può preparare il bilanciere, supponendo che l'ordine dei dischi sia irrilevante?

32. Tanti polinomi

Siano $c_1, c_2, ..., c_{2020}$ delle costanti reali positive. Definiamo $P_1(x) = (x-c_2)(x-c_3)...(x-c_{2020})$ e similmente per ogni i definiamo $P_i(x)$ come il polinomio monico che ha come radici tutte le costanti tranne c_i. Il polinomio $S(x) = P_1(x) + P_2(x) + P_3(x) + ... + P_{2020}(x)$ ha come coefficiente di grado 2018 esattamente -2019 ma si sa che $c_1, c_2, c_3, ..., c_{2020}$ sono in progressione aritmetica, e infine $c_{2020} = 2c_1$. Dopo aver espresso c_1 nella forma $\frac{p}{q}$ con p, q coprimi si determini $p + q$.

33. Dodici

Sia $ABCDEFGHIJKL$ un dodecagono regolare inscritto in una circonferenza γ di raggio 1. Per ogni punto $P \in \gamma$ chiamiamo $f(P) = PA^2 + PB^2 + PC^2 + ... + PJ^2 + PK^2 + PL^2$. Al variare di P sulla circonferenza γ siano $min(f(P)), max(f(P))$ rispettivamente il minimo e il massimo valore che può assumere $f(P)$. Determinare $min(f(P)) \cdot max(f(P))$.

34. Tangenti e poi secanti

Sia ABC un triangolo con $AB = 91, BC = 98, CA = 105$. Sia γ la sua circonferenza circoscritta e sia Γ la circonferenza per A tangente a BC nel suo punto medio. Le circonferenze γ e Γ si intersecano nuovamente in X. Determinare AX.

35. Argomenti strani, ad una festa

Ad una festa ci sono n persone e tra tutti i partecipanti si discute di Cese2021. Ciascuno di loro partecipa al TotoCese che consiste nell'indovinare le materie dei 6 problemi (in ordine) che verranno proposti, a scelta tra Algebra, Combinatoria, Geometria e Teoria dei Numeri.
Ciascuno di loro tenta di indovinare appunto le materie dei problemi, e ciascun tentativo non può comprendere 2 materie consecutive per lo stesso problema. (Ad esempio: GCNACA è un tentativo valido ma GCCNAN non lo è).
Si sa che esistono sicuramente due persone alla festa che hanno fatto un tentativo identico.
Quante persone ci sono alla festa come minimo?

36. Due (e non sei) persone intorno a un tavolo

Vincenzo e Giuseppe giocano al seguente gioco: sono entrambi seduti, in maniera diametralmente opposta ad un tavolo circolare avente raggio 2020 mm, per poter rispettare il distanziamento sociale (oltre 4 metri).
Essi hanno a disposizione un numero infinito di monete aventi raggio r dove $1 \leq r < 2020$ è un intero positivo che esprime la misura del raggio delle monete in millimetri.
Ad ogni mossa, un giocatore può piazzare una moneta in modo tale che sia interamente contenuta sul tavolo e che non abbia punti in comune con monete già piazzate prima. Perde chi non è più in grado di piazzare monete. Il gioco si compone di 2019 turni, e al turno i tutti i giocatori hanno a disposizione infinite monete di raggio i, inizia Vincenzo. Alla fine di ogni turno, il vincitore guadagna un punto. Quanti punti avrà Vincenzo alla fine del gioco, supponendo che entrambi i giocatori giochino in maniera ottimale?

37. Sulla mediana

Sia ABC un triangolo con $AB = 196, BC = 224, CA = 252$ e M il punto medio di BC. Il punto P sta sul segmento AM in modo tale che, dette D, E le intersezioni tra le rette BP, CP e i lati AC, AB rispettivamente, i punti A, E, P, D giacciano sulla stessa circonferenza. Determinare la lunghezza di AP.

38. Ordinati in tabella

Su una tabella $n \times n$ sono scritti gli interi da 1 a n^2, in ogni casella e senza ripetizioni.
Chiamiamo $f(n)$ il più grande intero positivo con la seguente proprietà: considerate tutte le $(n^2)!$ possibili disposizioni dei numeri all'interno della tabella, all'interno di ogni riga e colonna esistono sempre due numeri distinti a, b tali che $f(n) \mid a - b$.
Se per un certo n vale $f(n) = 100$, quanto vale n?

39. Da 1 a 5

Sia $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Determinare quante sono le funzioni $f : X \longrightarrow X$ tali che per ogni $c \in X$ si abbia $f(f(c)) = c$.

40. Numeri reali

I tre numeri reali a, b, c soddisfano $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$. Supponiamo che $abc = K$, con K intero positivo.
Calcolare la somma di tutti i valori possibili per K non maggiori di 2020 in modo che $a^n + b^n + c^n \in \mathbb{Q}$ per almeno 1010 valori interi positivi di $n \leq 2020$.

41. Cono gelato... Yum!

La gelateria *Cioccoangolo* ha sulla sua insegna il disegno di un cono gelato.
Hanno disegnato un triangolo equilatero ABC con la base AB in alto e poi, detto P il punto medio di AB hanno disegnato due semicirconferenze, esterne al triangolo, aventi diametro rispettivamente AP e BP. Poi hanno preso un punto Q sul lato AB in modo che $3BQ = AQ$ e sulla semicirconferenza di diametro BP un punto R che non è né B né P ed è più vicino a B che a P, infine si sono chiesti quanto valesse, in gradi, l'angolo $\widehat{PQR}$ sapendo che, dette S, T le intersezioni di RP, RQ col lato CA, si ha $RS = RT$. Qual è la risposta corretta?

42. Divisibilità

Siano a, b interi positivi. Consideriamo tutte le coppie (a, b) con $a > b$ tali che $\dfrac{5a + b^2 + ab}{a + b} = a$. Calcolare la somma di tutti i possibili valori per il prodotto ab.

43. Mediane e triangoli rettangoli

Nel triangolo ABC si ha $AB = 34, BC = 62, CA = 78$. La mediana uscente da A interseca il lato BC nel punto K. Siano P, Q due punti rispettivamente sui lati AB, AC tali che gli angoli $\widehat{BPK}$ e $\widehat{CQK}$ siano entrambi retti. Determinare il rapporto $\frac{KP}{KQ}$, dare come risposta somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.

44. Perpendicolare per il punto medio

Sia ABC un triangolo in cui $AB = 30, BC = 78, CA = 72$. Chiamiamo D il punto in cui la bisettrice dell'angolo $\widehat{BAC}$ interseca il lato BC. Detto E il punto medio di AD, la retta r perpendicolare ad AD passante per E interseca il lato AB nel punto X. Qual è l'area del triangolo BXD?

45. Monetine

Gianluigi ha un tabellone con 505 righe e 4 colonne per un totale di 2020 caselle. Due monete si dicono *conviventi* se giacciono sulla stessa riga (o colonna) e non c'è nessun'altra moneta in mezzo. Gianluigi vuole disporre le sue monetine, ognuna all'interno di una casella, facendo in modo che ogni monetina abbia non più di 2 conviventi. Quante monetine può piazzare al massimo all'interno della griglia?

46. 2020 complessi

Sia $p(x) = x^{2020} + x + 1$. Dette $\lambda_1, ..., \lambda_{2020}$ le sue radici si determini $|\lambda_1^{2020} + \lambda_2^{2020} + ... + \lambda_{2020}^{2020}|$.

47. Questo problema mi ricorda il 4G

Sia p un numero primo. Dato un intero positivo n si definisce $v_p(n)$ la valutazione p-adica di n ossia la più grande potenza di p che divide n. Per esempio $v_2(1024) = 10$ perché $2^{10} \mid 1024$ e $2^{11} \nmid 1024$, e $v_2(1025) = 0$ in quanto $2^0 \mid 1025$ ma $2^1 \nmid 1025$.
Poniamo $f(n) = \log_3(n) - v_3(n)$.
Consideriamo l'insieme $X = \{n \in \mathbb{N} | 3^{2020} < n < 3^{2021} \wedge \lfloor f(n) \rfloor = 42\}$. Qual è la cardinalità di X?

48. Purissimo

Una permutazione $(a_1, a_2, ..., a_n)$ dell'insieme $\{1, 2, 3, ..., n\}$ è detta *pura* se il valore di $a_i \cdot i$ è un quadrato perfetto per ogni $1 \leq i \leq n$. Ad esempio $(4, 2, 3, 1)$ è una permutazione pura di $(1, 2, 3, 4)$ ma $(2, 3, 1, 4)$ non lo è.
Sia $f(n)$ il numero di permutazioni pure dell'insieme degli interi da 1 a n, estremi inclusi. Si determini il più piccolo intero n tale che $2020 \mid f(n)$.

49. Sulla bisettrice

Nel triangolo ABC, $AB < AC$ e $AB = 30$. Sia K la proiezione di B sulla bisettrice dell'angolo $\widehat{BAC}$. Detto M il punto di BC si ha che $MK = 18$. Quanto è lungo AC?

50. Due polinomi

Siano $P(x), Q(x)$ due polinomi a coefficienti reali che verificano per ogni x reale l'uguaglianza $P(x)Q(x) = x^{2020}$, supponiamo inoltre che il grado di $P(x)$ sia sempre maggiore o uguale al grado di $Q(x)$. Il polinomio $R(x) = P(x) + Q(x)$ ha esattamente 588 radici reali contate con molteplicità, quante possono essere al massimo le radici complesse con parte immaginaria non nulla del polinomio $R(x)$?

51. Due rette e una circonferenza possono concorrere!

Sia ABC un triangolo la cui circoscritta è Γ tale che $AB = 24, AC = 15$. Detto O il suo circocentro, consideriamo la circonferenza γ con centro O e tangente al lato BC. Siano r, s rispettivamente due rette distinte che non contengono il segmento BC, passanti rispettivamente per B, C tali che r, s siano tangenti a γ. È noto che r, s e Γ concorrono in un punto Q. Quanto vale CQ^2?

52. Christmas tree

Un triangolo equilatero di area 36 è diviso in 36 triangoli equilateri equiestesi mediante 5 rette parallele alla base che hanno tra loro la stessa distanza, la stessa operazione è eseguita lungo gli altri due lati del triangolo.
Quanti triangoli equilateri di area pari ci sono ora?

53. Gorilla
L'isola *Kenoncè* ha una forma circolare e vi abitano due simpatici gorilli: *Go* e *Rilla*. Su quest'isola crescono tantissime noci di cocco, che periodicamente cadono sull'isola oppure, in casi estremi, in testa a Go, oppure a Rilla. Un aereo sorvola l'isola e scopre che, ad un certo punto, ci sono n noci di cocco disposte lungo il perimetro dell'isola e la disposizione ha la forma di un n-agono regolare inscritto in una circonferenza (cioè la forma dell'isola). Go e Rilla scendono quindi dalle loro palme e decidono di percorrere l'isola in senso orario per contare le noci di cocco, partendo da due punti diversi dell'isola.
Go: "La 10^a noce di cocco che ho contato è stata la 2020^a noce che ha contato Rilla".
Rilla: "La 10^a noce di cocco che ho contato è stata la 2020^a noce che ha contato Go".
Quante noci di cocco ci sono sul perimetro dell'isola?

54. Nel mezzo del cammin della gara
Quante sono le terne ordinate (a, b, c) di interi positivi tali che $4(ab + bc + ca) = 3abc$?

55. Nulla di meglio...
Se c'è una cosa che gli stagisti amano, è uno Sgabeo mangiato sotto la Torre dopo una sessione di 5 ore. Al Senior gli Sgabei possono essere farciti con esattamente una fetta di un salume a scelta tra m salumi diversi e esattamente una salsa a scelta tra n salse, e nient'altro.
Al Senior 2020 (cos'è?) sono stati aggiunti esattamente 2 nuovi salumi e 2 nuove salse al menu degli Sgabei che si potevano consumare al Senior 2019, è noto però che col nuovo menu esistono 2020 nuovi modi per farcire uno sgabeo.
Quanti ingredienti si avevano al Senior 2019 (in totale, considerati sia i salumi che le salse) per farcire uno Sgabeo?

56. Numero pazzo
Consideriamo $N = \sqrt{2^{188} + 2^{324} + 2^{420} + 2^{2020} + 2^{2298} + 2^{2574}}$. Determinare il prodotto delle ultime tre cifre di N che stanno prima della virgola.

57. Parallelogrammi ovunque
Sia ABC un triangolo con $AB = 105, BC = 120, CA = 135$. Detto O il suo circocentro; prendiamo due punti X, Y in modo tale che $BOAX$ e $COXY$ siano entrambi dei parallelogrammi. Determinare il valore di $\frac{AY}{BY}$. Dopo averlo espresso nella forma $\frac{p}{q}$ con p, q coprimi si determini $p^2 + q^2$.

58. Werewolf
Ad una festa ci sono 328 persone. Ciascuna di queste persone può essere un veggente oppure un lupo. Tutti i partecipanti si stanno divertendo, ma... all'improvviso, si sospetta la presenza di un lupo. Gli invitati sono stati quindi sistemati in una tabella 41×8, ogni invitato risiede su una casella. Il veggente è in grado di determinare se gli invitati che giacciono nelle caselle che condividono un lato con la sua casella sono dei veggenti oppure dei lupi. I lupi hanno lo stesso potere, ma possono minacciare uno dei veggenti a loro adiacenti. Il veggente, a tal punto, sarà così spaventato che vedrà il lupo che l'ha minacciato come un veggente normale. Si vuole determinare sempre se esiste almeno un lupo alla festa, indipendentemente dalla disposizione degli invitati sulla tabella. Quanti veggenti devono esserci, come minimo?

59. Tre lati uguali, ma uno no
Sia $ABCD$ un quadrilatero convesso e sia E l'intersezione delle diagonali AC e BD. Supponiamo che valgano le uguaglianze $AB = BC = CD, AC \neq BD$. Sapendo che $\widehat{BAD} = 58°$ e che $\widehat{ADC} = 62°$, determinare l'ampiezza di $\widehat{BCA}$.

60. Il buon Diofanto
Consideriamo tutte le coppie di interi positivi m, n che verificano l'equazione $3m^2 + m - 2n^2 - n - mn = 624$. Si determini quanto può valere al massimo mn.

61. Il prodotto delle prime
Quanti sono i numeri di 5 cifre decimali (nessuna pari a 0) tali che il prodotto delle prime 3 cifre sia 8?

62. L'esagono di Peppe
Giuseppe ha un esagono regolare e tre colori: rosso, verde e blu.
Determinare quante sono, a meno di rotazioni, le colorazioni dell'esagono tali che:
-ogni vertice sia colorato con uno e un solo colore;
-nessuna coppia di punti diametralmente opposti sia colorata allo stesso modo.

63. Il baricentro tra i vertici
Sia ABC un triangolo in cui $BC = 20$. Chiamiamo M, N i punti medi di AC, BC rispettivamente. È noto che BM e CN concorrono nel baricentro G, inoltre $BM = 18$, $CN = 24$. Si determini l'area del quadrilatero $AMGN$.

64. Le radici all'infinito
Considerato il polinomio $P(x) = 10x^2 - 7x + 1$ chiamiamo α, β le sue radici. Poniamo inoltre $S_n = \alpha^n + \beta^n$.
Determinare qual è il valore della somma infinita $S_1 + S_2 + S_3 + ...$, dare come risposta il risultato moltiplicato per 2020.

65. Il ritorno di Alpha il marziano
Alpha il marziano, non avendo calcolato correttamente la distanza a causa della sua navicella difettosa, è appena atterrato sul pianeta sbagliato: il pianeta Etram. Su tale pianeta è presente l'acqua, all'interno di un lago che ha la forma di un parallelogramma $ABCD$ tale che $BD \perp BA$, figura che rispetta $AB = CD = 25$ e $AC + BD = 100$.
Qual è l'area della parte di piano occupata dal lago?

66. Tornare bambini
Un fiore di cartoncino è appeso all'entrata di un asilo nido e ha la forma di un esagono regolare.
Teppistello, il bimbo monello prende due pennarelli colorati di rosso e di blu, e si diverte a colorare completamente a caso, ma con uno e un solo colore, tutti i lati e le diagonali dell'esagono.
Quanti sono come minimo i triangoli aventi gli stessi vertici dell'esagono, che hanno tutti i lati dello stesso colore?

67. Uguaglianze e rapporti tra lati
Sia $ABCD$ un trapezio isoscele di basi AB e DC, tale che $2DA = 2AB = 2BC = CD$. Un punto P esterno al trapezio è tale che le aree dei triangoli PDA, PAB, PBC siano rispettivamente $420, 560, 360$. Qual è l'area del trapezio?

68. Divisori (e numeri) un po' troppo grandi
Sia M il numero ottenuto concatenando 2020 volte il numero 123, cioè il numero di 6060 cifre scritto come $M = 123123...123$.
Consideriamo il minimo intero $k > M$ con $N \geq 4$ divisori chiamati
$1 = d_1 < d_2 < d_3 < ... < d_N = k$ per il quale si ha che $d_{N-3} + d_{N-2} + d_{N-1} > k$. Dare come risposta il prodotto delle cifre di k.

69. Matrioska triangolosa
Sia ABC un triangolo con $AB = 21, BC = 24, CA = 27$. Chiamiamo A_1, B_1, C_1 i piedi delle altezze uscenti rispettivamente dai vertici A, B, C. Consideriamo la circonferenza inscritta nel triangolo $A_1B_1C_1$ che è tangente ai lati B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 nei punti A_2, B_2, C_2. Siano A_3, B_3, C_3 i punti medi di B_2C_2, C_2A_2, A_2B_2 rispettivamente. Detti O_1, O_2 i circocentri di $A_2B_2C_2$ e $A_3B_3C_3$ rispettivamente la retta O_1O_2 interseca la mediana uscente da A nel punto P. Detta S l'area del triangolo BPC si determini S^2.

70. Due intersezioni
Chiamiamo D, E i piedi delle altezze uscenti dai vertici B, C triangolo ABC che soddisfa $AB = 13, BC = 14, CA = 15$. Siano inoltre P, Q le intersezioni $(P \neq Q)$ tra la retta ED e la circonferenza circoscritta al triangolo ABC. Determinare $AP \cdot AQ$.

71. Chiudiamo questa parentesi
Voglio piazzare una parentesi tonda aperta subito a sinistra di un numero e una parentesi tonda chiusa subito a destra di un numero nell'espressione $1 - 1 - 1 - ... - 1$ che contiene esattamente 10000 cifre "1" per fare in modo che il risultato di quell'espressione faccia 2020. Quante cifre "1" devono stare tra le due parentesi, come minimo?

72. Il cerchio che sta dentro
Sia ABC un triangolo in cui $AB = 38, BC = 40, CA = 42$. L'incerchio γ è tangente ai lati BC, CA rispettivamente nei punti P, Q. Le rette BI e PQ si intersecano in K, dove I è il centro di γ. Determinare KQ^2. Dopo averlo espresso nella forma $\frac{a}{b}$ dove a, b sono interi coprimi, si determini $a + b$.

73. Non vuoti
Consideriamo l'insieme degli interi da 1 a 2020 cioè $A = \{1, 2, 3, ..., 2018, 2019, 2020\}$. Scegliamo 4040 sottoinsiemi distinti non vuoti di tale insieme e chiamiamoli $A_1, A_2, ..., A_{4040}$. Per ciascuna coppia di sottoinsiemi A_i, A_{i+1} si calcola il valore di
$f(A_i, A_{i+1}) = \frac{|A_i \cap A_{i+1}|}{|A_i| \cdot |A_{i+1}|}$ per ogni $1 \leq i \leq 4040$ e si pone $A_{4041} = A_1$.
Supponiamo inoltre che la quantità $f(A_1, A_2) + f(A_2, A_3) + ... + f(A_{4040}, A_{4041})$ sia il massimo possibile. Al variare di tutti i sottoinsiemi per i quali si ha che tale quantità è massima, qual è il minimo valore che può assumere $|A_1| + |A_2| + |A_3| + ... + |A_{4040}|$?
(Come al solito, il simbolo $|X|$ indica la cardinalità dell'insieme X cioè il numero dei suoi elementi.)

74. Angoli retti dappertutto
Sia ABC un triangolo con $AB = 13, BC = 14, CA = 15$. Sia Q l'intersezione tra la retta AC e la retta per B perpendicolare ad AB. Sia P l'intersezione tra la retta AB e la retta per C perpendicolare ad AC. I punti K, L stanno sulla retta PQ in modo che K, P, Q, L siano allineati in quest'ordine da sinistra verso destra, inoltre si hanno le uguaglianze $\widehat{KAQ} = \widehat{LAP} = 90°$.
Si chiede il rapporto $\frac{QK}{PL}$, si dia come risposta somma e numeratore di denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.

75. Scomponibile
Determinare il numero di coppie (a, b) di interi con $1 \leq a \leq 50$ e $b \geq 0$ tali che il polinomio $x^2 + ax + b$ sia scomponibile come prodotto di due polinomi di primo grado a coefficienti interi.

76. Cartesio su, Cartesio giù
Siano x, y numeri reali positivi tali che $x + y \leq 2020$ e $\lceil x \rceil \cdot \lfloor y \rfloor = \lfloor x \rfloor \cdot \lceil y \rceil$. Un punto $P(x; y)$ si dice *buono* se verifica tali ipotesi.
Determinare l'area dell'insieme dei punti del piano cartesiano che sono buoni.

77. Per punti

Il polinomio $p(x)$ ha grado 2019 ed è tale che valga l'uguaglianza
$\binom{2020}{0}P(0) = \binom{2020}{1}P(1) = \binom{2020}{2}P(2) = ... = \binom{2020}{2019}P(2019) = 1.$
Determinare le ultime 4 cifre di $2^{2020} \cdot P(2020)$.

78. Ancora angoli retti

Sia $ABCD$ un quadrilatero ciclico in cui AC è il diametro della circonferenza circoscritta. La retta BD è perpendicolare alla retta AC. È noto che $AC = 24\sqrt{3}$ e che $BC = 36$. Chiamiamo M, N i punti medi di AD e BC rispettivamente. Calcolare MN^2.

79. Non mi piacciono i complessi

Determinare quanti sono gli interi k tali che esistano $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R} - \{0\}$ distinti con prodotto k tali che:
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -10 = \frac{k}{x_1} + \frac{k}{x_2} + \frac{k}{x_3} + \frac{k}{x_4}$ e $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_1x_3 + x_2x_4 + x_1x_4 = 27$.

80. Assemblea Condominiale

In *Via l'Inversione dal TI* c'è un condominio di 14 piani. In ognuno di questi piani c'è un appartamento, in ciascuno di essi vive una persona e in particolare al piano n vive la persona P_n. La persona P_n afferma: "Mi sta antipatico P_{n+1} perché sbatte i piedi sul pavimento come se fosse Hulk, ma tutti gli altri mi sono simpatici" per ogni $1 \leq n \leq 13$. La persona P_{14} invece ammette: "Non vengo disturbato da nessuno, ma P_{13} mi sta antipatico. E in generale, la relazione di antipatia e simpatia è simmetrica. Se A sta antipatico a B, B sta antipatico ad A, e la stessa cosa vale per la simpatia."
L'amministratore del condominio vuole organizzare una riunione per risolvere questo problema e vuole che sia presente almeno una (e non necessariamente solo una) coppia di inquilini che si stanno antipatici. In quanti modi si può scegliere una rappresentanza siffatta?
Ad esempio: La rappresentanza $(P_3, P_5, P_6, P_9, P_{11})$ va bene perché ci sono due inquilini che si stanno antipatici. La rappresentanza (P_1, P_{10}, P_{13}) invece non va bene.

81. Massimo il tuttofare

Massimo, matematico di professione, racconta di essere un tuttofare e di avere esattamente $n > 1$ hobby diversi. Ha appena ha avuto le ferie (per l'esattezza, solo 8 giorni). Il suo ultimo giorno di lavoro, decide quindi di programmare le sue giornate dedicando a ogni giornata di ferie un certo numero di hobby. Massimo afferma: "Mi piace essere vario, così vario che data una coppia di due miei qualsiasi hobby distinti H_i, H_j, esiste sempre un giorno in cui pratico H_i e non H_j oppure, in alternativa, pratico H_j e non H_i. E inoltre, in questo periodo di ferie, devo praticare almeno $n - 1$ hobby almeno 1 volta. Il numero dei miei hobby è inoltre un quadrato perfetto, e, fortunatamente, nonostante io abbia solo 8 giorni di ferie, riesco a organizzare le ferie rispettando le mie volontà."
Determinare, sulla base di queste informazioni, la somma di tutti i possibili valori che può assumere il numero di hobby di Massimo. Se si pensa che i valori siano infiniti, si dia come risposta 9999.

82. Incrementando

I numeri interi da 1 a 2020^2 sono disposti all'interno delle caselle di una tabella 2020×2020 in modo tale che in ogni riga e in ogni colonna i numeri siano in ordine crescente dall'alto verso il basso e da sinistra verso destra. Chiamiamo $C(i, j)$ la casella della riga i e della colonna j. Si definisce $F(C(i, j))$ il numero di interi che è possibile scrivere nella casella $C(i, j)$ rispettando le ipotesi. Determinare il valore di $\sum_{k=1}^{2020} F(C(k, k))$. Dai come risposta le prime 4 cifre.

83. 100 volte n

Dati n interi positivi $(a_1, ..., a_n)$ consideriamo l'uguaglianza seguente:

$$\prod_{i=1}^{n} a_i \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i = 100n$$

Qual è il minimo valore di n tali che non esista nessuna k-upla di interi positivi che soddisfa tale uguaglianza per ogni $k \geq n$?

84. Livorno

Sia ABC un triangolo acutangolo in cui $AB = 13, BC = 14, CA = 15$. I punti D, E stanno sui lati AB, AC rispettivamente in modo tale che, detto H l'ortocentro di ABC, i punti D, E, H siano allineati e $\widehat{BDE} = \widehat{CED}$. Qual è l'area del triangolo AED? Dare come risposta le prime 4 cifre dopo la virgola di tale valore.

85. Quattro uni

Determinare il più piccolo intero $n = \overline{abcd}$ con $a \neq 0$ tale che $1111 | \overline{abcd} + \overline{ab} \cdot \overline{cd}$.

86. Un cerchio che ci ha creduto poco

Dato un 16-agono regolare, determinare in quanti modi è possibile tracciare 8 segmenti ciascuno congiungente due punti di tale poligono in modo tale che nessuno di questi segmenti abbia intersezioni con altri segmenti tracciati.

87. Sotto va l'mcm

Si calcoli il valore della somma:

$$\frac{1}{mcm(1,2020)}+\frac{2}{mcm(2,2020)}+...+\frac{2020}{mcm(2020,2020)}.$$

Dopo aver espresso il risultato nella forma $\frac{p}{q}$ con p,q coprimi, si determini $p+q$.

88. Non esistono

Determinare la somma di tutti gli interi positivi n tali che non esista nessuna terna di interi positivi (a,b,c) con $c>b>a$ in modo che valgano le condizioni $a+b+c=n$ e, inoltre, $a \mid b$ e $b \mid c$.

89. DOH!

Homer Simpson ha disegnato un triangolo acutangolo scaleno ABC, ha segnato inoltre i piedi delle altezze D,E,F uscenti rispettivamente dai vertici A,B,C, le altezze concorrono nell'ortocentro H.

Detto O il circocentro di ABC si è reso conto che la ciambella in mano era una circonferenza passante per i vertici D,O,H e interseca AO in un punto Q tale che $\widehat{QEC}=48°$. Determinare l'ampiezza di $\widehat{ABC}$.

90. Il triangolo di Ciccio

Ciccio ha disegnato un triangolo ABC in cui $AB<AC$ e poi la circonferenza inscritta γ, tangente ai lati BC,CA,AB in D,E,F. Poi ha preso il baricentro G e il punto medio K del segmento AG. Infine si è accorto che il pentagono $DGEKF$ è ciclico e che $AB=85$. Quanto è lungo CA?

91. Retti

Diremo che un polinomio $P(x)$ è *retto* se accade che per ogni terna di numeri reali x,y,z tali che $x+y+z=0$, i punti $(x;P(x)),(y;P(y)),(z;P(z))$ sono allineati. Del polinomio retto $Q(x)$ sappiamo che vale $Q(0)=2, Q(1)=9$ e $Q(2)=28$. Si determini il valore di $Q(10)$.

92. Totocalcio senza X

Al campionato di calcio dell'isola *Kenoncè* prendono parte 8 squadre. Ogni squadra gioca una e una sola volta contro ogni altra squadra e non ci sono pareggi. Il campionato è piuttosto equilibrato: ciascuna squadra ha il 50% di probabilità di vincere una partita e il 50% di perderla.

Sia p la probabilità che ogni squadra vinca almeno una partita e che perda almeno una partita. Dopo avere espresso p nella forma $\frac{a}{b}$ dove a,b sono coprimi, si determini $a+b$.

93. A o C?

Siano x,y,z numeri reali, scelti in maniera casuale all'interno dell'intervallo $I=[0;1]$. Qual è la probabilità che $|x-y|<\frac{1}{2}$ e $|y-z|<\frac{1}{2}$? Dopo avere espresso tale probabilità nella forma $\frac{p}{q}$ con p,q coprimi determinare $100p+q$.

94. Soffitto

Sia $\lceil x \rceil$ la parte intera superiore del numero reale x ossia il più piccolo intero $\geq x$. Si definisce $\{x\}$ la parte frazionaria del numero reale x. Ad esempio $\{\frac{2021}{2}\}=\frac{1}{2}$ e $\lceil \pi \rceil = 4$.

Consideriamo la successione $a_0,a_1,...,a_{2020}$ di numeri reali positivi tali che $a_0=d>0$ e, per ogni intero positivo n vale $a_n=\lceil a_{n-1}\rceil - \lceil a_{n-1}\rceil \cdot \{a_{n-1}\}$. Sia $a_0=k$ un numero razionale tale che $\lfloor k \rfloor = 2020$ in modo che $a_0=a_1=a_2=...$, in altre parole la successione deve essere costante e tutti i termini devono essere pari a k.

Quanto vale la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini che esprime la somma di tutti i possibili valori per k?

95. Un segmento piccolo piccolo

Nel triangolo ABC in cui $AB=13, BC=14, CA=15$, Pasquale traccia le altezze AD,BE,CF e segna l'ortocentro H e il circocentro O. Chiama r la retta passante per H e parallela alla retta AO. Poi considera il punto X che è l'intersezione della retta EF con la retta AO. Poi definisce P come l'intersezione tra la retta DX e la retta r, e chiama P' il simmetrico del punto P rispetto al punto medio di DX. Poi traccia la retta EP' che interseca la retta DF nel punto Q il cui simmetrico rispetto al punto medio di DF è chiamato Q'. Si determini la lunghezza di PQ'. Dare come risposta somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini che esprime PQ'.

96. Un buco

Sia $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ una funzione lineare.

Siano inoltre x,y due numeri reali. Si definisce $buco(x,y)$ l'insieme di tutte le coppie di numeri reali (a,b) tali che si abbia $a\in(x,x+1)$ e $b\in(y,y+1)$. Per esempio, la coppia $(2020.2020; 2020.64)$ appartiene a $buco(2020,2020)$.

Sia X l'insieme di tutti i buchi del tipo $buco(m,n)$ con $0\leq m,n\leq 2020$, dove m,n sono numeri interi. Un buco si dice *f-funzionale* se per una certa f e per un numero reale λ variabile accade che la coppia $(\lambda; f(\lambda))$ appartiene a quel buco. Al variare di tutte le f, qual è il massimo valore che può assumere il numero di buchi *f-funzionali* all'interno dell'insieme X?

97. Ah, l'aria di Cesenatico

Alla gara nazionale di Cesenatico hanno partecipato n persone e ciascuna persona ha ricevuto esattamente una T-shirt. Su ogni T-shirt è stato stampato un certo numero di simboli preso da un insieme A di 12 simboli distinti. Si sa che ogni maglietta contiene almeno un simbolo, non esistono due T-shirt con lo stesso insieme di simboli e per ogni sottoinsieme X di A, diverso dall'insieme vuoto e da A, il numero di T-shirt che contengono almeno un simbolo appartenente a X è un numero pari.
Quanti sono i partecipanti alla gara nazionale di Cesenatico?

98. Il polinomio in S

Sia S l'insieme di tutti i polinomi $p(x)$ a coefficienti reali non costanti, tali che, per ogni $x \in \mathbb{R}$ valga $p(-x^2) = p(x)p(x-1)$. Si determini il massimo valore che può assumere $p(3)$ al variare di tutti i polinomi $p(x) \in S$ tali che $\deg p(x) \leq 2020$. Se si pensa che S sia un insieme vuoto, si dia come risposta 0.

99. Che razza di cerchio è mai questo?

Sia ABC un triangolo con $AB = 26, BC = 28, CA = 30$. La bisettrice dell'angolo $\widehat{BAC}$ interseca il lato BC e la circonferenza circoscritta Γ al triangolo ABC rispettivamente nei punti P, Q. L'asse di AP interseca il lato BC nel punto R; siano t_B, t_C le tangenti a Γ nei punti B, C, sia $X = t_B \cap t_C$. La retta AX interseca nuovamente Γ nel punto T; infine chiamiamo M il punto medio di PQ. Il triangolo MRT è inscritto in una circonferenza di raggio r. Si determini r^2. Dopo averlo espresso nella forma $\frac{p}{q}$ con p, q coprimi, si determini $p + q$.

100. Genera e calcola

Ieri era il compleanno di Antonio; e gli è stato regalato un gigantesco supercomputer da parte di Matteo, il computer in questione propone giochi matematici straordinari.
Antonio decide di provare il gioco più difficile, chiamato *Genera e calcola*.
Finiti i festeggiamenti, mangiata e digerita la torta, decide di accenderlo e chiede al computer di generare 2020 successioni di reali positivi che chiamiamo $S_1, S_2, S_3, ..., S_{2020}$, che Antonio non può scoprire. Egli pone quindi:
$S_1 = (a_{\{1,1\}}, a_{\{1,2\}}, ..., a_{\{1,2019\}}, a_{\{1,2020\}}), S_2 = (a_{\{2,1\}}, a_{\{2,2\}}, ..., a_{\{2,2019\}}, a_{\{2,2020\}})$ e similmente, per ogni intero positivo $1 \leq k \leq 2020$ poniamo $S_k = (a_{\{k,1\}}, a_{\{k,2\}}, ..., a_{\{k,2019\}}, a_{\{k,2020\}})$. Antonio non conosce nessuno di questi numeri ma ha la possibilità di fare una domanda al computer, che consiste nell'inserimento di un insieme di 2020 interi positivi $(b_1, b_2, b_3, ..., b_{2019}, b_{2020})$ tali che per ogni j si abbia $1 \leq b_j \leq 2020$ e il computer risponde con il risultato della seguente espressione:
$a_{\{1,b_1\}} \cdot a_{\{2,b_2\}} \cdot a_{\{3,b_3\}} \cdot ... \cdot a_{\{2018,b_{2018}\}} \cdot a_{\{2019,b_{2019}\}} \cdot a_{\{2020,b_{2020}\}}$.
Dopo n domande, Antonio è in grado di calcolare il valore dell'espressione:
$(a_{\{1,1\}}+a_{\{1,2\}}+a_{\{1,3\}}+...+a_{\{1,2018\}}+a_{\{1,2019\}}+a_{\{1,2020\}})(a_{\{2,1\}}+a_{\{2,2\}}+a_{\{2,3\}}+...+a_{\{2,2018\}}+a_{\{2,2019\}}+a_{\{2,2020\}})...(a_{\{2020,1\}}+a_{\{2020,2\}}+a_{\{2020,3\}}+...+a_{\{2020,2018\}}+a_{\{2020,2019\}}+a_{\{2020,2020\}})$.
Ma quanto vale n come minimo? Dare come risposta la somma dei cubi delle cifre del valore minimo che può assumere n.

I problemi finiscono qui, spero che tu ti sia divertito!

Alla prof. Maria Antonietta Calò
A Antonio Diviggiano
Al prof. Pierluigi Magli
A Matteo Mazzarelli
Alla prof. Anna Maria Rescio