

Allenamenti EGMO 2021 – 5

- A5.** Gli interi positivi a_1, a_2, \dots, a_n , con $n \geq 5$, sono disposti in senso orario lungo una circonferenza. Sia $a_0 = a_n$ e $a_{n+1} = a_1$. Per ogni $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ il rapporto

$$q_i = \frac{a_{i-1} + a_{i+1}}{a_i}$$

è un intero. Si dimostri che

$$2n \leq q_1 + q_2 + \dots + q_n < 3n.$$

- C5.** Sia $n \geq 3$ un intero. Ci sono n persone presenti ad un convegno con n conferenze, e ad ogni conferenza partecipano almeno 3 persone. Ad ogni conferenza ciascun partecipante stringe la mano a tutti gli altri partecipanti. Dopo l' n -esima conferenza, ogni coppia delle n persone partecipanti al convegno si è scambiata una stretta di mano esattamente una volta. Si dimostri che ad ogni conferenza partecipa sempre lo stesso numero di persone.
- G5.** Sia $ABCD$ un quadrilatero. Supponiamo che esista un punto P interno al quadrilatero tale che $\angle APD = \angle BPC = 90^\circ$ e $PA \cdot PD = PB \cdot PC$. Sia O il circocentro di $\triangle CPD$. Dimostrare che la retta OP passa per il punto medio di AB .
- N5.** Siano a e b due interi positivi tali che $a! + b!$ divide $a! \cdot b!$. Dimostrare che $3a \geq 2b + 2$.