

Simulazione Gara di Febbraio

- Questa simulazione consiste in 17 problemi divisi in tre gruppi, e avrai a tua disposizione esattamente **3 ore** per risolverli.
- Nei problemi da 1 a 12 ogni domanda è seguita da 5 risposte indicate con le lettere A), B), C), D), E). Una sola di queste risposte è corretta. La lettera corrispondente alla risposta corretta va indicata nel foglio risposte.
- Nei problemi 13 e 14 la risposta è un numero intero. Questo numero intero va indicato nel foglio risposte.
- Nei problemi 15, 16 e 17 è richiesta invece una dimostrazione completa. Dovrai formulare la tua soluzione in modo chiaro, e inviarla nel foglio risposte.
- Per i primi 14 problemi verranno assegnati 5 punti per risposta corretta, 0 punti per risposta sbagliata, e 1 punto per risposta lasciata in bianco. Gli ultimi tre problemi verranno invece valutati con un punteggio da 0 a 15.
- Insieme a questo testo, se sei un partecipante alla simulazione, dovresti avere ricevuto un link a un modulo di Google. Quello è il tuo foglio risposte, e dovrai inviare le tue risposte da quello. Una volta inviate le risposte, non potrai più cambiarle.
- In questa gara è vietato l'uso di calcolatrici o strumenti di comunicazione. E' proibito anche l'uso di strumenti elettronici di calcolo come WolframAlpha, Geogebra, ecc...
- Un grande ringraziamento a Tiziana Eugenio, Edoardo Balistri, Emanuele Trucchi e Cecilia Moriggi per avermi aiutato ad organizzare questa gara e scegliere i problemi. Ringrazio inoltre Daniele De Pietri per avermi aiutato a ricontrollare il testo finale.

Spero che la gara vi piaccia, e buona fortuna!

Risposta multipla - 5 punti

1. Su un'isola esistono due tipi di abitanti: i Cavalieri, che dicono sempre la verità, e i Furfanti, che mentono sempre. Cinque abitanti vengono intervistati da un giornalista: Alessio, Benedetto, Claudio, Danilo, ed Enrico. Loro fanno le seguenti dichiarazioni: Alessio: "Claudio è un furfante", Benedetto: "Almeno uno tra Alessio e Danilo è un furfante", Claudio: "Io sono l'unico cavaliere tra noi cinque", Danilo: "Siamo tutti cavalieri", Enrico: "Ci sono almeno 4 furfanti". Quanti dei cinque sono cavalieri?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

2. Sia $ABCD$ un quadrato con i lati di lunghezza 4. Sia P un punto sul lato CD e sia Q un punto sul lato BC tale che $AP = 5$ e l'angolo AQP sia retto. Trova $AQ \cdot PQ$.

A) 10 B) $9\sqrt{2}$ C) 12 D) $6\sqrt{5}$ E) $7\sqrt{5}$

3. Un gruppo di persone si trova in una stanza. Di queste, 5 persone hanno un cane, 6 persone hanno un gatto, 8 persone hanno un pesciolino, e 3 persone non hanno animali domestici. Se nessuno ha più di due animali domestici, e nessuno ne ha più di uno dello stesso tipo, qual è il minimo possibile di persone nella stanza?

A) 10 B) 13 C) 14 D) 16 E) 19

4. Sia $a_0, a_1, a_2 \dots a_{2020}, a_{2021}$ una sequenza, dove $a_0 = 1$ e ogni termine a_n della sequenza, con $1 \leq n \leq 2021$, è uguale al termine precedente a_{n-1} più 1000^n (cioè $a_n = a_{n-1} + 1000^n$). Quanti termini di questa sequenza sono divisibili per 99?

A) 0 B) 20 C) 90 D) 91 E) 112

5. Una lampadina accesa si trova 2 unità sopra una sfera di raggio 8. La sfera, che sta su un pavimento piatto, proietta un'ombra. Qual è l'area di questa ombra?

A) 100π B) 144π C) 288π D) 576π E) 1024π

6. Sia $Q(x)$ un polinomio di secondo grado con coefficiente quadratico 1, coefficienti reali, due radici reali, somma delle radici s e prodotto delle radici p . Se $s = p$, quali delle seguenti frasi sono vere?

1) Il coefficiente lineare è uguale al coefficiente costante.

2) Per ogni numero reale positivo a , esiste un polinomio $Q(x)$ che soddisfa le condizioni date e ha $p = a$.

3) Per ogni numero reale positivo d , esistono esattamente due polinomi $Q(x)$ che soddisfano le condizioni date e hanno il valore assoluto della differenza tra le due radici uguale a d .

4) Per ogni numero intero positivo k , esiste un polinomio $Q(x)$ che soddisfa le condizioni date e ha almeno una radice uguale a k .

A) Solo la 3 B) Solo la 4 C) La 1 e la 2 D) La 3 e la 4 E) La 2, la 3 e la 4

7. Due divisori distinti (d_1, d_2) di un numero n sono *belli* se la loro differenza divide il loro prodotto. Per esempio, $(4, 2)$ è una coppia di divisori belli perchè 2 divide 8. Per $n = 1296$ supponiamo che esista una coppia di divisori belli dove $d_1 = kd_2$ per un intero positivo k . Qual è la somma di tutti i valori possibili per k ?

A) 14 B) 18 C) 19 D) 20 E) 23

8. Sia ABC un triangolo di circocentro O e con l'angolo BAC di 60° . La retta BO interseca AC nel punto X , e la retta CO interseca AB nel punto Y . Se $CY = 6$ e l'angolo OXY misura 15° , qual è la lunghezza di XY ?

A) 3 B) $3\sqrt{2}$ C) $3\sqrt{3}$ D) 4 E) 6

9. In una classe di una scuola ci sono 8 studenti, e alcuni di loro sono amici.

L'amicizia è reciproca, cioè se a è amico di b , allora b è amico di a . Supponendo che tra tre studenti qualsiasi c'è un numero dispari di coppie di amici, in quanti modi gli studenti possono essere amici tra di loro?

A) 24 B) 64 C) 128 D) 256 E) 1024

10. Giuseppe compra un biglietto della lotteria, che richiede che lui scelga sei numeri compresi tra 1 e 46, estremi inclusi. Giuseppe sceglie i suoi numeri tali che la somma dei logaritmi in base 10 dei suoi numeri sia un numero intero. Per una coincidenza, accade che anche i numeri del biglietto vincente hanno la stessa proprietà, cioè che la somma dei logaritmi in base 10 dei numeri sul biglietto è un numero intero. Qual è la probabilità che il biglietto di Giuseppe sia quello vincente?

A) $1/6$ B) $1/5$ C) $1/4$ D) $1/3$ E) $1/2$

11. I centri di due cerchi identici ω_a e ω_b di raggio unitario sono distanti $4/3$. Due cerchi esternamente tangenti ω_1 e ω_2 di raggi rispettivamente r_1 e r_2 sono entrambi internamente tangenti sia a ω_a che a ω_b . Dato $r_1 + r_2 = 1/2$, trova $r_1 \cdot r_2$.

A) $9/512$ B) $5/144$ C) $1/18$ D) $1/16$ E) $25/324$

12. Un'automobile si trova in una griglia di città 5×5 connesse da strade. Ogni ora, viaggia verso una città adiacente a quella in cui si trova, e quando viaggia da una città a un'altra, sceglie una delle strade con il tempo di percorrenza minore.

L'automobile parte dalla città A, viaggia verso la città B in 3 ore, poi viaggia verso la città C in 4 ore, e infine torna nella città A in 5 ore. Quante triplette ordinate

(A, B, C) sono possibili?

A) 56 B) 96 C) 104 D) 136 E) 168

Risposta numerica - 5 punti

13. Un gruppo di 9 squadre partecipa in un torneo di calcetto tale che ogni squadra giochi contro ogni altra squadra un numero di volte pari e minore o uguale a 8.

Quanti valori distinti può assumere il numero di partite che si sono giocate in totale?

14. Un numero è definito come *crescente* se le sue cifre, lette da sinistra a destra, sono scritte in ordine strettamente crescente. Per esempio, 5 e 39 sono crescenti, ma 85 e 224 non lo sono. Trova il più piccolo intero positivo che non può essere espresso come somma di 3 o meno numeri *crescenti*.

Esercizi dimostrativi - 15 punti

15. Nella nazione di Matelandia le banconote in circolazione hanno i seguenti valori: $2^0, 2^1, 2^2 \dots 2^9, 2^{10}$. Un bancomat ha 1000 banconote di ciascun tipo a disposizione ed eroga ciascun tipo di banconota al massimo una volta per ogni prelievo. I clienti fanno un prelievo ciascuno, e il cliente n fa un prelievo del valore totale di n soldi. (Il primo del valore di 1, il secondo del valore di 2, il terzo del valore di 3, e così via)

- (a) Trova il primo cliente che non potrà ottenere il prelievo da lui richiesto.
- (b) Nel momento in cui quel cliente non potrà ottenere il prelievo da lui richiesto per mancanza di banconote, quali tipi di banconote sono finiti nel bancomat?

16. Federico ha una pedina bianca e Gaia ha una pedina nera. Entrambi muovono le loro pedine in base alle regole scritte sotto, ed entrambi muovono le loro pedine nello stesso momento. Dimostra le tue affermazioni in entrambi i casi esposti sotto.

- (a) Le due pedine si trovano alle due estremità di un tavolo da gioco rettangolare 10×1 . Ad ogni mossa, Federico e Gaia muovono la loro pedina in una delle caselle adiacenti a quella in cui si trova. E' possibile che le loro due pedine si trovino nella stessa casella allo stesso momento?
- (b) Le due pedine si trovano in un tavolo da gioco triangolare, formato da 36 triangoli equilateri congruenti tra loro formati tracciando 5 rette parallele a ciascuno dei lati del triangolo. La pedina bianca si trova nel triangolo in cima, mentre la pedina nera si trova nella fila con 7 triangoli, al centro. Ad ogni mossa, Federico e Gaia muovono la loro pedina in uno dei triangoli con un lato in comune a quello in cui si trova. E' possibile che le loro due pedine si trovino nella stessa casella allo stesso momento?

17. Le diagonali di un parallelogramma $ABCD$ si intersecano nel punto P . Le bisettrici degli angoli $\angle DAP$ ed $\angle PBC$ si intersecano nel punto Q . Sapendo che il quadrilatero $PCQD$ è un parallelogramma, determina e dimostra il rapporto $AB : AD$.