

Soluzioni Simulazione Gara di Febbraio

Risposta multipla - 5 punti

1. Se Danilo fosse un cavaliere, per quanto egli afferma anche Claudio sarebbe un cavaliere, ma l'affermazione di Danilo non è compatibile con quella di Claudio. Dunque Danilo è un furfante. L'affermazione di Benedetto allora è vera, quindi Benedetto è un cavaliere. L'affermazione di Claudio non è compatibile con quella di Benedetto quindi Claudio è un furfante. Allora Alessio afferma il vero, e quindi è un cavaliere. Infine Enrico è un furfante, perchè ci sono due cavalieri tra gli altri quattro. Quindi, in totale, il numero di Cavalieri tra quelli intervistati è $\boxed{B) 2}$.

2. Per il teorema di Pitagora, $DP = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$, quindi $CP = 4 - 3 = 1$. Inoltre, l'angolo BAQ è congruente all'angolo CQD , implicando che i triangoli QBA e QPC sono simili. Sia $QB = x$. Per la similitudine, $\frac{1}{4-x} = \frac{x}{4}$, quindi $x = 2$. Allora, $QC = 4 - x = 2$, e sempre per il teorema di Pitagora, $DQ = 2\sqrt{5}$, e $AQ = \sqrt{5}$. La risposta è semplicemente $2\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = \boxed{A) 10}$.

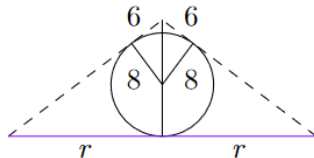
3. Per minimizzare il numero di persone presenti nella stanza, dobbiamo massimizzare il numero di persone che hanno 2 animali domestici. Sia x il numero di persone che hanno un cane e un gatto, sia y il numero di persone che hanno un gatto e un pesciolino, e sia z il numero di persone che hanno un cane e un pesciolino. Il numero totale di animali è 19, che è dispari, quindi una di queste persone dovrebbe avere solo un animale domestico, e per questo sottraiamo 1 dal termine noto di una delle equazioni (in questo caso $y + z$). Così otteniamo il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ y + z = 7 \\ x + z = 5 \end{cases}$$

che risolto dà $x = 2$, $y = 4$, $z = 3$. Contando anche la persona con solo un pesciolino, e le 3 persone senza animali domestici, le persone presenti nella stanza sono $\boxed{B) 13}$.

4. Notiamo che a_n ha esattamente $n + 1$ cifre 1, e tutte le altre cifre sono 0. Per la regola di divisibilità per 9, la somma delle cifre deve essere un multiplo di 9, che succede solo per n che sono uno meno di un multiplo di 9. Invece, per la divisibilità per 11, notiamo che 1001 è divisibile per 11, e che a_n per n dispari ha sempre lo stesso numero di cifre 1 in posizioni dispari e in posizioni pari, e quindi sono multipli di 11. Visto che a_n con n pari ha un numero dispari di 1, non può avere lo stesso numero di cifre 1 in posizioni dispari e in posizioni pari, quindi non è divisibile per 11. Combinando, otteniamo che $n + 1$ deve essere divisibile per 18, e la risposta è il numero di n che sono uno meno di un multiplo di 18, cioè $\boxed{E) 112}$.

5. Consideriamo la sezione trasversale della sfera raffigurata sotto. La direzione della luce è indicata dalle linee tratteggiate, e l'ombra è indicata dal segmento viola. Il centro della sfera, uno dei punti tangenti alla sfera, e la lampadina formano un triangolo di lati 6, 8, e 10. Questo è un triangolo rettangolo, che è simile a uno dei triangoli rettangoli più grandi nella sezione trasversale con i cateti di lunghezza rispettivamente r e 18. Segue che $\frac{8}{6} = \frac{r}{18}$, con cui otteniamo $r = 24$. Quindi l'ombra proiettata è un cerchio di raggio 24, e la sua area è $\boxed{D) 576\pi}$.



6. Dalle condizioni date, possiamo capire che il polinomio $Q(x)$ è $x^2 - sx + s$. Visto che entrambe le radici sono reali, il discriminante deve essere positivo, quindi $s > 4$ oppure $s < 0$. Ora eliminiamo le frasi che sono ovviamente sbagliate, la 1 e la 2. Ora, notiamo che per la 3, il valore assoluto della differenza è esattamente la radice quadrata del discriminante $s^2 - 4s$. E' chiaro che $s^2 - 4s$ può essere qualsiasi numero reale positivo, quindi esiste sempre un numero s tale che $d = \sqrt{s^2 - 4s}$ e quindi la 3 è effettivamente vera. Infine, per la 4, notiamo che $Q(1) = 1$ in ogni caso, quindi $k = 1$ non funziona e la 4 è falsa. Alla fine, abbiamo trovato che la frase vera è $\boxed{A) \text{ Solo la 3 }}$.

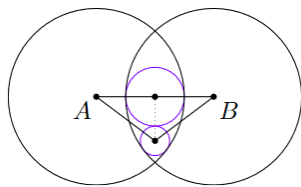
7. Osserviamo che se $d_1 - d_2$ divide $d_1 \cdot d_2$, allora $(k - 1)d_2$ deve dividere $k(d_2)^2$, e da questo possiamo ottenere che $k - 1 \mid kd_2$ (dove $\mid$ significa "divide"). Sappiamo che il minimo comune multiplo di k e $k - 1$ è 1, e per questo $k - 1$ deve dividere d_2 stesso. Sappiamo inoltre che d_2 è un divisore di 1296, e per questo anche $k - 1$ lo deve essere. In più, $k - 1$ non può essere multiplo di 6, perchè in questo modo k non sarebbe nè multiplo di 2 nè multiplo di 3. Allora dobbiamo solo controllare i casi in cui $k - 1$ è multiplo di 16 o multiplo di 81. Notiamo che k dovrà essere della forma $2^a \cdot 3^b$ con a, b numeri naturali. Quindi i valori possibili per k sono 2, 3, 4, e 9, e la somma è $\boxed{B) 18}$.

8. Notiamo che $\angle YOX = \angle BOC = 120^\circ$, implicando che il quadrilatero $AXOY$ è ciclico. Quindi, $\angle OBA = \angle OAB = \angle OAY = \angle OXY = 15^\circ$. Abbiamo anche che $\angle OCA = \angle OAC = 45^\circ$, quindi OAC è un triangolo rettangolo isoscele. Visto che $AXOY$ è ciclico, i triangoli OAC e XYC sono simili, quindi $XY = \frac{CY}{\sqrt{2}} = \boxed{B) 3\sqrt{2}}$.

9. L'osservazione chiave del problema è che due studenti qualsiasi A e B che sono connessi da una serie di amicizie sono amici tra loro. Supponiamo che le persone in mezzo siano $F_1, F_2, F_3, \dots, F_n$. Notiamo che tra i tre studenti AF_1F_2 ci sono già due amicizie, cioè AF_1 e F_1F_2 , e questo implica che A e F_2 sono amici. Poi, consideriamo i tre $F_1F_2F_3$, ed arriviamo alla stessa conclusione e così via. Così possiamo concludere che A e B sono amici. Questo significa che la classe è divisa in gruppetti, dove ogni persona che fa parte di un gruppo è amica con tutti gli altri del gruppo. Ma possiamo limitare il numero di gruppi totali a 2, perchè altrimenti noi potremmo scegliere 3 persone appartenenti a 3 gruppetti diversi, e ci sarebbero 0 amicizie tra loro. Quindi, dobbiamo solo calcolare il numero di modi per dividere gli 8 studenti in 1 o 2 gruppi. Praticamente, possiamo mettere qualcuno nel gruppo della prima persona, o nell'altro. Questo si può fare in esattamente 2^7 modi, che è uguale a D) 256.

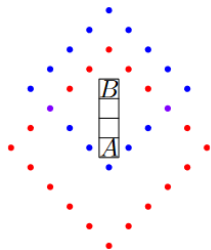
10. Il prodotto dei numeri deve essere una potenza di 10 per avere un logaritmo in base 10 intero. Quindi tutti i numeri scelti devono essere della forma $2^m 5^n$. Cercando i numeri da 1 a 46, troviamo che solo $\{1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 25, 32, 40\}$ soddisfano questa proprietà. Dovrebbe essere immediatamente chiaro che le potenze di 2 sono più delle potenze di 5. Visto che una potenza di 10 deve avere gli esponenti del 2 e del 5 uguali nella fattorizzazione, abbiamo bisogno di bilanciare i due esponenti. Per farlo, per ogni numero sottraiamo l'esponente del 5 dall'esponente del 2. Così otteniamo $\{0, 1, 2, -1, 3, 0, 4, 1, -2, 5, 2\}$, e troviamo che gli unici termini non positivi sono 0, 0, -1 e -2. Quindi Giuseppe deve avere scelto dei numeri del tipo $\{-2, -1, 0, 0, 1, 2\}$, e i primi 4 sono per forza 25, 5, 1, 10. Abbiamo due possibilità per il tipo "1", che sono 2 e 20, e due possibilità per il tipo "2", che sono 4 e 40. Allora quattro biglietti soddisfano la proprietà, e la probabilità che il biglietto di Giovanni sia quello vincente è C) $1/4$.

11. Siano A e B i centri dei cerchi ω_a e ω_b rispettivamente. Sia R il raggio di ω_a e ω_b , che sappiamo essere 1, e sia D la distanza tra A e B , che sappiamo essere $4/3$. Notiamo che i centri di ω_1 ed ω_2 , che chiameremo rispettivamente O_1 e O_2 , si trovano su una retta che è perpendicolare ad AB ed equidistante sia da A che da B . Visto che AO_1O_2 è un triangolo simile a BO_1O_2 , possiamo dedurre che $\frac{D}{2}$ è la misura dell'altezza uscente da A del triangolo AO_1O_2 . Abbiamo che $AO_1 = R - r_1$, $AO_2 = R - r_2$, e $O_1O_2 = r_1 + r_2$, quindi il perimetro del triangolo AO_1O_2 è $2R$. Quindi, usando anche la formula di Erone, otteniamo questa equazione: $AO_1O_2 = \sqrt{Rr_1r_2(R - r_1 - r_2)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{D}{2} \cdot (r_1 + r_2)$. Sostituendo i valori conosciuti nell'equazione e semplificando, otteniamo $\sqrt{1/2(r_1r_2)} = 1/6$, e risolvendo l'equazione o più semplicemente controllando le scelte, riusciamo a ottenere che r_1r_2 è C) $1/18$.

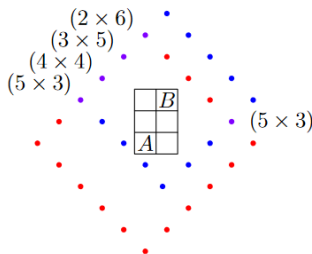


12. La soluzione del problema è divisa in due casi: Se le tre strade che vanno da A a B sono tutte nella stessa direzione, o se una è perpendicolare alle altre due.

Caso 1: Le tre strade sono tutte nella stessa direzione. I puntini rossi nella figura accanto indicano i quadratini a distanza 5 da A, e i puntini blu indicano i quadratini a distanza 4 da B. I due puntini viola sono i punti validi per la città C. Ma, ovviamente, possiamo anche avere A sopra e B sotto, o A e B allineati orizzontalmente, quindi abbiamo 4 simmetrie da considerare. Ci sono anche 4 modi per inserire un quadrato 4×4 in una griglia 5×5 , quindi il nostro totale per questo caso è 32.



Caso 2: Due strade vanno in una direzione, la terza è perpendicolare alle altre due. In questo caso i punti validi per la città C sono 5, e corrispondono a rettangoli di dimensioni diverse. In una griglia 5×5 , possiamo inserire un rettangolo 2×6 in 0 modi (non possiamo), un rettangolo 3×5 o 5×3 in 3 modi, e un rettangolo 4×4 in 4 modi. Contando tutti i punti, otteniamo 13 modi. Ma dobbiamo considerare le simmetrie, che in questo caso sono 8, e quindi il nostro totale per questo caso è 104.



Sommando i due casi, otteniamo che le triplette (A, B, C) possibili sono $\boxed{D) 136}$.

Risposta numerica - 5 punti

13. Se ci sono 9 squadre, ci sono $\binom{9}{2}$ accoppiamenti possibili per le partite e ogni accoppiamento può accadere 0, 2, 4, 6, o 8 volte nel torneo. Quindi, il numero massimo di partite che si possono giocare è 288, e possiamo rimuovere le partite dal torneo a due a due per ottenere tutti i numeri naturali pari compresi tra 0 e 288, estremi inclusi. Infatti, c'è la possibilità che non si giochino partite tra due squadre, o che non si giochi nessuna partita nel torneo, quindi la risposta è $\boxed{145}$.

Avvertimento: Il problema nella pagina seguente ha ricevuto 0 risposte corrette, quindi è molto difficile. Preparatevi per la sua soluzione.

14. E' facile costruire ogni intero positivo minore di 99 come somma di al massimo due numeri crescenti. Se il numero è $\overline{ab}$, con $a > 0$ e $b < 9$ (altrimenti il numero è già crescente), allora i due numeri crescenti che lo formeranno sono $10(a-1) + 9$ e $b-1$. Inoltre, ogni numero naturale con una cifra è crescente. Ora pensiamo ai numeri di tre cifre $\overline{abc}$. Se $a \leq 7$ e $\overline{bc} \neq 99$, consideriamo i numeri dei tipo $\overline{a89} + \overline{bc}$. Questi numeri si possono tutti ottenere perchè $\overline{bc}$ è la somma di al massimo due numeri crescenti. Così possiamo esprimere come somma di 3 o meno numeri crescenti tutti i numeri di tre cifre minori di 888 che non sono congruenti a 88 mod 100. In più, $\overline{a79} + 9$ ci permette di ottenere tutti i numeri congruenti a 88 mod 100 minori o uguali a 688. Quindi tutti i numeri minori di 788 sono esprimibili come somma di 3 o meno numeri crescenti. Ora, supponiamo che 788 sia la somma di tre numeri crescenti, e la somma delle cifre delle unità sia c , la somma delle cifre delle decine b , e la somma delle cifre delle centinaia a . Allora $c \leq 27$, quindi $c \in \{8, 18\}$. Se $c = 8$, allora $b \in \{8, 18\}$. Ma $b < c$, quindi c'è una contraddizione. Invece se $c = 18$, allora $b \in \{7, 17\}$. Ma $b \leq c - 2$ a meno che due dei tre interi siano inferiori a 10 (che è chiaramente impossibile), quindi $b = 7$ ed $a = 7$. Ma questo non è possibile perchè sappiamo che $a < b$. Abbiamo trovato una contraddizione in entrambi i casi, e questo significa che il più piccolo intero positivo non esprimibile come somma di 3 o meno numeri crescenti è $\boxed{788}$.

Esercizi dimostrativi - 15 punti

In questa parte non solo verrà data la soluzione ai problemi, ma verranno date anche delle linee guida su come assegnare i punteggi alle soluzioni di quei problemi.

15. (a) Visto che i valori delle banconote sono potenze di 2 da 2^0 a 2^{10} e il bancomat eroga al massimo una banconota di ogni tipo per prelievo, possiamo esprimere ogni prelievo come un numero in binario, dove una cifra "1" indica che quel tipo di banconota è stato richiesto, e una cifra "0" indica che quel tipo di banconota non è stato richiesto. Notiamo che in binario, l'ultima cifra è 1 se e solo se il numero è dispari, che l'ultima cifra è uguale a 1 un numero di volte maggiore o uguale alle altre cifre, e tra 1 e 2000 ci sono esattamente 1000 interi positivi dispari, quindi il cliente 2001 non potrà ottenere il prelievo da lui richiesto essendo il 1001° cliente dispari.

(b) Abbiamo già dimostrato che 2^0 è finita, ma potrebbe non essere l'unica. Infatti, esprimendo i numeri da 1 a n in binario, notiamo che i valori di una cifra di valore posizionale 2^k si ripetono periodicamente, più esattamente con cicli di lunghezza 2^{k+1} , con la cifra 0 nella prima metà del ciclo, e con la cifra 1 nella seconda metà del ciclo. Questo significa che per ottenere il numero massimo di volte che si ripete la cifra 1 in una cifra di valore 2^k (cioè la metà), n deve essere un multiplo di 2^{k+1} . Nel nostro caso, $n = 2000$, che è divisibile per 2, 4, 8, e 16, ma non per 32 o potenze di 2 più alte. Quindi le banconote che vengono richieste 1000 volte tra 1 e 2000, e che si sono esaurite nel momento il cliente 2001 richiede il suo prelievo sono quelle da 1, 2, 4, 8.

Scala di valutazione del problema 15:

Si assegnino **15 punti** a una soluzione corretta, anche se diversa da quella ufficiale. Per soluzioni parziali o errori in alcune parti della soluzione si assegnino punti parziali (tutti i punti parziali sono cumulabili) secondo le seguenti linee guida:

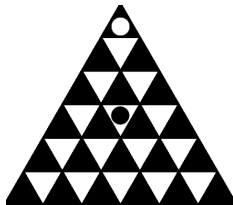
- La parte (a) vale **7 punti**. Di questi, si assegnino **2 punti** per la risposta corretta, **2 punti** per l'idea di esprimere il prelievo come un numero binario, e **3 punti** per chi noti che tutti i clienti dispari prelevano la banconota da 1. Importante: Se la risposta finale non è corretta, non si assegnino più di **2 punti** complessivi per la parte (a).
- La parte (b) vale **8 punti**. Di questi, si assegnino **3 punti** per la risposta corretta, **4 punti** per chi noti la periodicità delle cifre e che n deve essere un multiplo di 2^{k+1} , e **1 punto** per chi trovi (anche implicitamente) le potenze di 2 che dividono 2000. Importante: Se la risposta finale non è corretta, non si assegnino più di **2 punti** complessivi per la parte (b).

Nel caso di un errore non trascurabile, ma che non invalida la dimostrazione, si sottraggano **1 o 2 punti** a seconda della gravità dell'errore.

16. (a) Coloriamo le 10 caselle come in figura sotto, e notiamo che la pedina bianca comincia su una casella nera, e la pedina nera comincia su una casella bianca. In più, visto che i colori delle caselle si alternano, ad ogni mossa entrambe le pedine si sposteranno su una casella del colore inverso. Questo significa che le due pedine si troveranno sempre su caselle di colori opposti, e quindi non si troveranno mai nella stessa casella.



(b) Coloriamo questo tavolo da gioco tale che i triangoli orientati con il vertice in alto siano colorati di nero, e i triangoli orientati con il vertice in basso siano colorati di bianco, come in figura sotto. Anche in questo caso, le due pedine cominciano su due triangoli di colore opposto, e una casella di un certo colore è adiacente solo a caselle del colore opposto. Quindi anche qua le due pedine si troveranno sempre su caselle di colori opposti, e quindi non si troveranno mai nella stessa casella.



Scala di valutazione del problema 16:

Si assegnino **15 punti** a una soluzione corretta, anche se diversa da quella ufficiale. Per soluzioni parziali o errori in alcune parti della soluzione si assegnino punti parziali (tutti i punti parziali sono cumulabili) secondo le seguenti linee guida:

- La parte (a) vale **5 punti**. Di questi, si assegni **1 punto** per l'affermazione che le due pedine non si possono trovare nella stessa casella, **2 punti** per una colorazione corretta (o qualcosa di equivalente alla colorazione, per esempio la parità delle caselle), e **2 punti** per l'argomentazione corretta che segue.
- La parte (b) vale **10 punti**. Di questi, si assegni **1 punto** per l'affermazione che le due pedine non si possono trovare nella stessa casella, **5 punti** per una colorazione corretta (o anche solo la differenza tra i triangoli con il vertice in alto e con il vertice in basso), e **4 punti** per l'argomentazione corretta che segue.

Nel caso di errori non trascurabili, ma che non invalidano la dimostrazione, si sottraggano **1 o 2 punti** a seconda della gravità dell'errore.

17. Dato che $PCQD$ è un parallelogramma, abbiamo che $PD \parallel CQ$ e $\angle CQB = \angle PBQ = \angle QBC$ perchè BQ è bisettrice dell'angolo $\angle DBC$. Quindi CQB è un triangolo isoscele e $BC = CQ = PD$, perchè $PCQD$ è un parallelogramma. In maniera simile, $PC = AD$. Ma, visto che $ABCD$ è un parallelogramma, $AD = BC$, quindi $PC = PD$. Allora le diagonali di $ABCD$ sono congruenti, perciò $ABCD$ è in realtà un rettangolo. In più, i triangoli PDA e PBC sono equilateri, e per questo AB è uguale al doppio dell'altezza del triangolo PDA , cioè $AB = \sqrt{3} \cdot AD$.

Scala di valutazione del problema 17:

Si assegnino **15 punti** a una soluzione corretta, anche se diversa da quella ufficiale. Per soluzioni parziali o errori in alcune parti della soluzione si assegnino punti parziali (tutti i punti parziali sono cumulabili) secondo le seguenti linee guida:

- **2 punti** per l'uguaglianza degli angoli $\angle CQB = \angle PBQ = \angle QBC$.
- **2 punti** per l'uguaglianza dei segmenti $BC = CQ = PD$.
- **5 punti** per la dimostrazione che $ABCD$ è un rettangolo.
- **2 punti** per l'osservazione che i triangoli PDA e PDC sono equilateri.
- **4 punti** per il calcolo finale e la risposta corretta.

Nel caso di errori non trascurabili, ma che non invalidano la dimostrazione, si sottraggano **1 o 2 punti** a seconda della gravità dell'errore.