

Stage a distanza - Problemi

C1. Sia n un intero positivo che non sia un quadrato perfetto. Sia D l'insieme dei suoi k divisori positivi, inclusi 1 e n . Dimostrare che è sempre possibile partizionare D in $\frac{k}{2}$ coppie disgiunte della forma (a, b) tali che a divide b dove a, b sono divisori di n .

Esempio: I divisori di 15 sono 1, 3, 5, 15. La partizione $(1, 5)(3, 15)$ va effettivamente bene.

C2. Sia $0 \leq N \leq 2^{2021}$ un numero intero. Marco vuole colorare tutti i sottoinsiemi dell'insieme $X = \{1, 2, 3, 4, \dots, 2021\}$ di bianco o nero facendo in modo che:

- l'unione di due sottoinsiemi bianchi sia bianca;
- l'unione di due sottoinsiemi neri sia nera;
- ci siano esattamente N sottoinsiemi bianchi.

Per quali N una colorazione siffatta è possibile?

G1. Sia ABC un triangolo e M il punto medio di BC . La circonferenza passante per ABM interseca il lato AC nuovamente nel punto D . La circonferenza passante per ACM interseca il lato AB nuovamente nel punto E .

- (a) Dimostrare che i triangoli BME e DMC sono simili.
- (b) Dimostrare che il circocentro del triangolo ADE è equidistante da B e C .

G2. Sia ABC un triangolo acutangolo isoscele con $AB = AC$ e sia D il piede dell'altezza uscente da C . La circonferenza ω_1 di centro C e raggio CD interseca il lato AC nel punto K . Sia Z il simmetrico di K rispetto a C . Sia ω_2 la circonferenza di centro B e raggio BD . La retta DZ interseca nuovamente ω_2 in M mentre ω_1 e ω_2 si intersecano nuovamente in E .

- (a) Dimostrare che $\widehat{EDZ} = 45^\circ$.
- (b) Dimostrare che i punti E, M, K sono allineati.
- (c) Dimostrare che le rette BM e EC sono parallele.

N1. Un intero positivo k si dice *immune* se per ogni insieme di k interi positivi non multipli di k accade che la somma dei quadrati dei suoi elementi è divisibile per k .

- (a) Determinare se $k = 2021$ è immune.
- (b) In generale, quali sono gli interi positivi immuni?

N2. Trovare tutte le coppie di numeri primi (p, q) tali che:

$$p^5 + p^3 + 2 = q^2 - q$$

Annunci vari

- Se ti piacciono le Olimpiadi della Matematica, corri ad iscriverti alla Quinta Edizione della **One Hundred Problems!** È una gara individuale composta da 100 problemi a risposta numerica della durata di 3 giorni, che si terrà dal 30 Aprile al 3 Maggio per un totale di 72 ore. Puoi anche vincere dei premi!
Per info: gasmatematica.altervista.org/onehundredproblems/info.php
- Se sei interessato a migliorare, il gruppo Telegram delle Olimpiadi di Matematica (siamo attualmente 376) potrebbe fare al caso tuo. Contattami in privato per essere aggiunto.