

Stage a distanza - Soluzioni

C1. Poniamo $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ con $p_i \neq p_j$ per ogni $i \neq j$, esiste sicuramente un indice i tale che α_i sia dispari, supponiamo $i = 1$ (è possibile ordinare i p_i a nostro piacimento).

Notiamo che $p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k} \mid p_1^{b_1} p_2^{b_2} \dots p_k^{b_k}$ se e solo se $a_i \leq b_i$ per ogni $1 \leq i \leq k$.

Supponiamo quindi di descrivere ogni divisore di n con una k -upla di interi positivi (c_1, c_2, \dots, c_k) con $0 \leq c_i \leq \alpha_i$ per ogni i . Vogliamo dimostrare che è possibile partizionare queste k -uple in delle coppie $\{(a_1, a_2, \dots, a_k), (b_1, b_2, \dots, b_k)\}$ in modo che $a_i \leq b_i$ per ogni i (NB: deve esistere almeno un j tale che $a_j < b_j$ altrimenti si avrebbe uguaglianza.)

Posto α_1 dispari, per quanto enunciato prima, è sufficiente considerare delle coppie del tipo:

$\{(0, x_2, x_3, \dots, x_k), (1, x_2, x_3, \dots, x_k)\}; \{(2, x_2, x_3, \dots, x_k), (3, x_2, x_3, \dots, x_k)\} \dots$

$\{(\alpha_1 - 1, x_2, x_3, \dots, x_k), (\alpha_1, x_2, x_3, \dots, x_k)\}$ dove (x_2, x_3, \dots, x_k) sono interi non negativi tali che $x_i \leq \alpha_i$ per ogni $2 \leq i \leq k$. \square

C2. La risposta è: per ogni $0 \leq N \leq 2^{2021}$.

Dimosteremo in generale che il problema si può risolvere per ogni insieme dei numeri interi da 1 a k e per ogni costante C tale che $0 \leq C \leq 2^k$. Procediamo quindi per induzione su k .

Passo base: $k = 1$

Per $k = 1$, i sottoinsiemi di $\{1\}$ sono $\{\}$ e $\{1\}$.

Se $C = 0$, allora coloriamo di nero entrambi i sottoinsiemi. La colorazione funziona perché effettivamente $\{\} \cup \{1\} = \{1\}$ e $\{1\}$ è nero, ed effettivamente ci sono 0 sottoinsiemi bianchi.

Se $C = 1$, allora coloriamo $\{\}$ di bianco e $\{1\}$ di nero. Nessuna delle limitazioni ce lo impedisce, avendo colorato esattamente un sottoinsieme di bianco e non avendo nessuna coppia di sottoinsiemi colorati allo stesso modo.

Se $C = 2$, si reitera lo stesso ragionamento di $C = 0$, invertendo il colore di tutti i sottoinsiemi perché le condizioni sono simmetriche.

Passo induttivo: Supponiamo che la tesi sia vera fino ad un certo intero positivo k , dimostriamone la validità per $k + 1$.

Consideriamo l'insieme $\{1, 2, \dots, k+1\}$. Per ipotesi induttiva, la colorazione è possibile per ogni $0 \leq C \leq 2^k$, eseguendo la stessa colorazione dell'insieme degli interi da 1 a k . La colorazione va effettivamente bene perché l'unione di due sottoinsiemi bianchi resta anch'essa bianca e tutti i sottoinsiemi contenenti $k+1$ sono neri, dunque la loro unione contiene $k+1$, ergo l'ipotesi viene sempre rispettata per $0 \leq C \leq 2^k$. Se $2^{k+1} \geq C > 2^k$ consideriamo la colorazione eseguita per $2^{k+1} - C$ a colori invertiti (abbiamo detto che, essendo le ipotesi simmetriche, possiamo invertire i colori senza violare le ipotesi), chiaramente vale $2^{k+1} - C \leq 2^k$ se $C > 2^k$ e siccome per ipotesi induttiva esiste una colorazione valida per ogni $0 \leq C \leq 2^k$, la tesi è vera anche per $2^k < C \leq 2^{k+1}$.

Dunque, per il principio di induzione, si ha che per ogni intero positivo k è possibile colorare N sottoinsiemi di $\{1, 2, \dots, k\}$ di bianco rispettando le condizioni se $0 \leq N \leq 2^k$ e dunque ciò è vero anche per $k = 2021$, da cui la tesi. \square

G1. (a) Chiamiamo $\widehat{BAC} = \alpha, \widehat{ABC} = \beta, \widehat{ACB} = \gamma$. Ovviamente i quadrilateri $ABMD$ e $ACME$ sono ciclici, pertanto $\widehat{DMC} = 180 - \widehat{BMD} = \alpha$ e allo stesso modo $\widehat{BME} = 180 - \widehat{EMC} = \alpha$. Inoltre $\widehat{EBM} = \widehat{ABC} = \beta$, similmente $\widehat{DCM} = \widehat{ACB} = \gamma$. Per differenza avremo $\widehat{BEM} = 180 - \alpha - \beta = \gamma$ e $\widehat{CDM} = 180 - \alpha - \gamma = \beta$. Dunque i triangoli BME e DMC hanno tre angoli congruenti, ergo sono simili. \square

(b) Sia O il circocentro di AED , essendo \widehat{EOD} angolo alla circonferenza, si ha $\widehat{EOD} = 2\alpha$. Inoltre $\widehat{EMD} = 180^\circ - \alpha - \alpha = 180^\circ - 2\alpha$ il che implica $EODM$ ciclico in quanto $\widehat{EOD} + \widehat{EMD} = 180^\circ$. Essendo $OE = OD$, si ha $\widehat{EMO} = \widehat{DMO}$, ma $\widehat{EMO} + \widehat{DMO} = 180^\circ - 2\alpha$ pertanto $\widehat{EMO} = \widehat{DMO} = 90^\circ - \alpha$. Ma allora $\widehat{BMO} = \alpha + 90^\circ - \alpha = 90^\circ$, pertanto O giace sulla retta per M perpendicolare a BM , la quale è l'asse di BC . Pertanto $OB = OC$. \square

G2. (a) Si nota anzitutto che $DE \perp BC$ in quanto $BD = BE$ e $CD = CE$ quindi $BDC E$ è un deltoide da cui $DE \perp BC$. Inoltre Z sta sulla circonferenza ω_1 in quanto $CK = CZ$, pertanto DCZ è isoscele. Quindi se si pone $\widehat{BAC} = 2\alpha$, si ha $\widehat{DCZ} = 180^\circ - \widehat{DCA} = 90^\circ + 2\alpha$. Essendo DCZ isoscele si ha quindi $\widehat{CDZ} = 45^\circ - \alpha$. Inoltre $\widehat{DBC} = 90^\circ - \alpha$ ma allora $\widehat{BDE} = \alpha$. In definitiva $\widehat{EDZ} = 90^\circ - \widehat{BDE} - \widehat{CDZ} = 90^\circ - \alpha - (45^\circ - \alpha) = 45^\circ$. \square

(b) Essendo $\widehat{EDM} = \widehat{EDZ} = 45^\circ$ avremo $\widehat{EBM} = 2 \cdot 45^\circ = 90^\circ$ da cui BME rettangolo isoscele. Questo implica $\widehat{BEM} = 45^\circ$. Notiamo che però $\widehat{DBC} = 90^\circ - \alpha$ e per simmetria allora $\widehat{EBC} = 90^\circ - \alpha$. Ma allora $\widehat{DBE} = 180 - 2\alpha$ da cui ricaviamo $\widehat{BED} = \alpha$ in quanto BDE isoscele dato che si ha $BD = BE$ in quanto raggi di ω_2 . Pertanto $\widehat{DME} = 45^\circ - \alpha$. Notiamo però la ciclicità di $DKEZ$. Essendo $\widehat{DCZ} = 90 + 2\alpha$ si ha $\widehat{DZC} = \widehat{DZK} = 45 - \alpha$ ma $\widehat{DEK} = \widehat{DZK} = 45 - \alpha$. Ma allora $\widehat{DEM} = \widehat{DEK}$, pertanto E, M, K sono allineati. \square

(c) Ancora per simmetria, $\widehat{BDC} = \widehat{BEC} = 90^\circ$. Ma abbiamo detto che BME è rettangolo isoscele quindi $\widehat{BEM} = 45^\circ$, per differenza $\widehat{MEC} = 45^\circ$. Essendo $\widehat{BME} = 45^\circ$, i due angoli sono alterni interni congruenti rispetto alla trasversale EMK ergo BM e CE sono parallele. \square

N1. (a) La risposta è no. Si intende che stiamo usando, di sotto, interi uguali modulo k .

Considerato un insieme di 2021 interi positivi di cui 2020 pari a 1 e 1 pari a 2, si ha che la somma dei suoi elementi vale $2020 \cdot 1^2 + 4 = 2024$ che chiaramente non è multiplo di 2021. \square

(b) La risposta è $k = 2, 3$.

Per $k = 2$, un insieme siffatto deve essere composto solo da numeri dispari. Ma un quadrato dispari resta ancora dispari, quindi la somma di due quadrati dispari è un numero pari, che è effettivamente sempre multipla di 2.

Per $k = 3$, se a non è un multiplo di 3, $a^2 \equiv 1 \pmod{3}$. Dunque la somma di tre quadrati non multipli di 3 sarà necessariamente multipla di 3.

Dimostriamo che tali soluzioni sono uniche. Consideriamo un insieme di $m > 2$ interi positivi composto da $m - 1$ interi pari a 1 modulo m e 1 intero pari a 2. La loro somma sarà $(m - 1) \cdot 1^2 + 4 = m + 3$ che deve essere ovviamente multipla di m . Ma questo ci dice che $3 \mid m$, in definitiva m può solo essere uguale a 3. \square

N2. Le uniche soluzioni sono $(p, q) = \{(2, 7); (3, 17)\}$, che ovviamente funzionano.

Supponiamo quindi $p \geq 5$, possiamo scrivere l'equazione come $p^3(p^2 + 1) = (q + 1)(q - 2)$ da cui ricaviamo che $\frac{(q+1)(q-2)}{p^3} = p^2 + 1$. Notiamo che i fattori $q + 1$ e $q - 2$ hanno al massimo MCD pari a 3. Se così fosse allora $p \mid 3$ il che è assurdo in quanto $p \geq 5$, e inoltre 3 non può dividere $p^2 + 1$ perché un quadrato modulo 3 non può fare 2. Quindi $MCD(q + 1, q - 2) = 1$, pertanto abbiamo 2 casi.

Caso 1: $p^3 \mid q + 1$

Allora $q - 2 \mid p^2 + 1$. Ciò implica $p^3 \leq q + 1$ e $q - 2 \leq p^2 + 1$, in definitiva $p^3 - 1 \leq q \leq p^2 + 3$ quindi $p^2 + 3 \geq p^3 - 1$ cioè $-p^3 + p^2 + 4 \geq 0$ ossia $(p - 2)(p^2 + p + 2) \leq 0$ il che implica $p < 2$, assurdo.

Caso 2: $p^3 \mid q - 2$

Allora $q + 1 \mid p^2 + 1$. Ciò implica $p^3 \leq q - 2$ e $q \leq p^2$. Combinando le disuguaglianze otteniamo $p^3 + 2 \leq p^2$ che è abbondantemente falsa in quanto p^3 cresce più velocemente di p^2 se $p \geq 5$.

Pertanto le soluzioni trovate sono uniche. \square