

Allenamenti EGMO 2021

10 aprile 2021

Indice

1	Allenamenti EGMO 2021 – 1	1
1.1	Soluzioni	2
2	Allenamenti EGMO 2021 – 2	5
2.1	Soluzioni	6
3	Allenamenti EGMO 2021 – 3	9
3.1	Soluzioni	10
4	Allenamenti EGMO 2021 – 4	14
4.1	Soluzioni	15
5	Allenamenti EGMO 2021 – 5	18
5.1	Soluzioni	19

1 Allenamenti EGMO 2021 – 1

- A1.** Sia n un intero positivo. I numeri $\{1, \dots, 2n\}$ vengono distribuiti casualmente su $2n$ punti di una circonferenza. Una corda è un segmento che unisce due di questi punti: si traccino quindi tutte le possibili corde e ad ognuna di esse si assegni un'etichetta con il valore assoluto della differenza dei numeri agli estremi. Si mostri che è sempre possibile scegliere n corde a due a due disgiunte (ossia che non si intersecano) tali che la somma delle etichette sia n^2 .
- C1.** Sia n un intero positivo. Ogni numero naturale $1, \dots, 1000$ è stato colorato con uno di n colori in modo tale che, presi due numeri a, b se $a \mid b$ allora a e b sono colorati con due colori diversi. Si determini il minimo n per cui una tale colorazione è possibile.
- G1.** Sia ABC un triangolo e sia AM la mediana uscente da A . Detto D il punto medio di AM , indichiamo con E il punto d'intersezione fra CD e AB . Sapendo che $BD = BM$, dimostrare che $AE = DE$.
- N1.** Si trovino tutti i numeri dispari minori di 2020 tali che la somma di tutti i loro divisori positivi sia dispari.

1.1 Soluzioni

A1 Osserviamo innanzitutto che

$$((n+1) + \dots + 2n) - (1 + 2 + \dots + n) = \left(\frac{2n(2n+1)}{2} - \frac{n(n+1)}{2} \right) - \left(\frac{n(n+1)}{2} \right) = n^2$$

dunque per avere n corde la cui somma delle etichette è n^2 è sufficiente scegliere solo corde che collegano un numero minore o uguale di n e uno maggiore. In altre parole stiamo riformulando il problema in questo modo: abbiamo $2n$ punti, n colorati di rosso (quelli con i numeri maggiori di n ad esempio) e gli altri colorati di blu, e vogliamo tracciare n corde tra un estremo rosso e uno blu in modo che non si intersechino.

Mostriamo questa tesi per induzione su n :

passo base: per $n = 1$ ci sono solo due punti, uno rosso e uno blu, e una sola corda possibile, dunque la tesi è vera banalmente.

Passo induttivo: supponiamo che la tesi sia vera per n e mostriamola per $n + 1$.

Notiamo che necessariamente esistono un punto rosso e uno blu che siano consecutivi lungo la circonferenza, e la corda che li collega quindi non può essere intersecata da nessun'altra corda; possiamo *cancellare* questi due punti, rimanendo con $2n - 2 = 2(n - 1)$ punti, che per ipotesi induttiva sappiamo collegare come richiesto. Questo conclude la dimostrazione.

C1 La risposta è 10. Per dimostrarlo mostriamo prima che sono necessari almeno 10 colori e poi che 10 colori bastano.

Necessità: consideriamo le potenze di 2

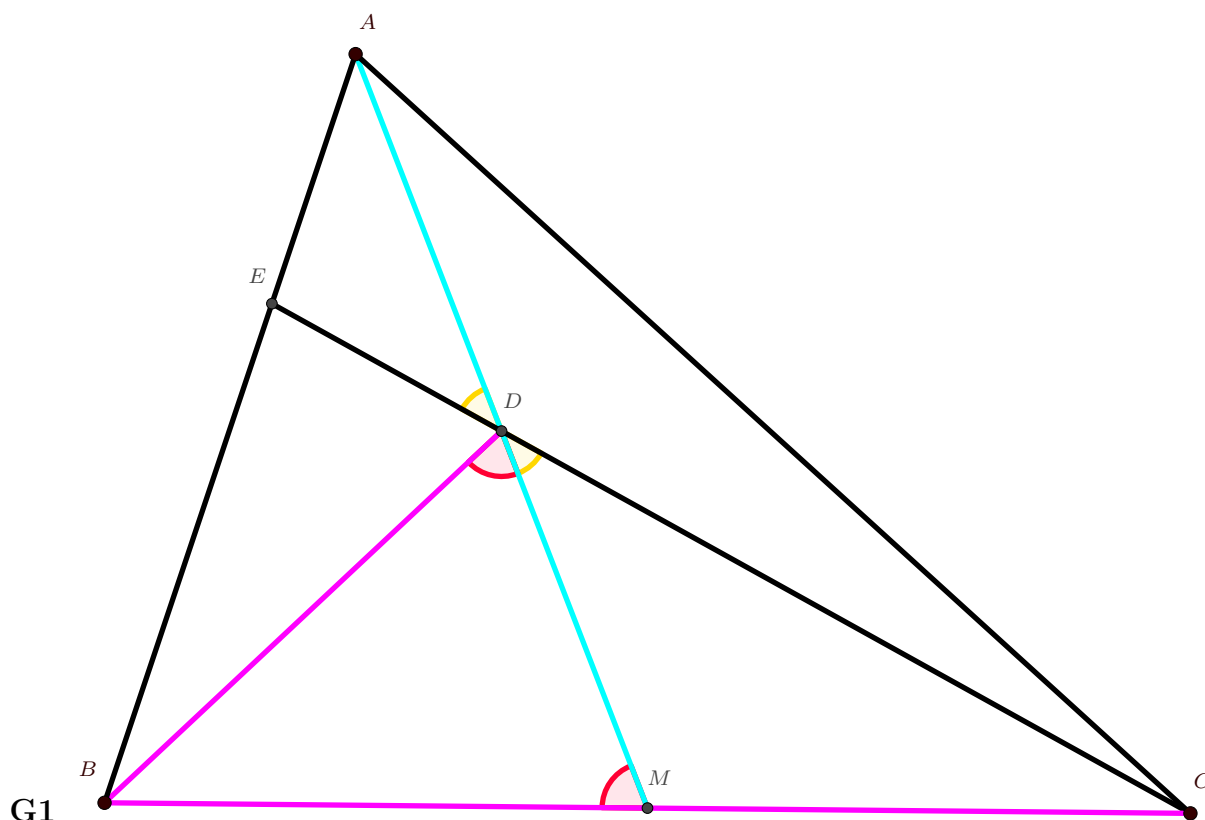
$$1 = 2^0 < 2^1 < 2^2 < \dots < 2^9 < 1000 < 2^{10} = 1024.$$

Dunque le potenze di 2 con esponente compreso tra 0 e 9 sono 10 numeri diversi, minori di 1000 e che devono essere colorati di colori tutti diversi. Ne segue che sono necessari almeno 10 colori.

Sufficienza: per mostrare che 10 colori sono sufficienti basta esibire una colorazione che soddisfi le proprietà del testo. In particolare se coloriamo del colore i tutti e soli i numeri n tali che

$$2^i \leq n \leq 2^{i+1} - 1$$

otteniamo una colorazione soddisfacente. Infatti se due numeri diversi $n \neq m$ sono colorati con lo stesso colore allora esiste un j per cui $n, m \in \{2^j, 2^j + 1, \dots, 2^{j+1} - 1\}$, quindi $\frac{n}{m}, \frac{m}{n} < 2$ e non possono essere uno multiplo dell'altro. In questo modo, usando 10 colori sapremo colorare tutti i numeri fino a $2^{10} - 1 = 1023 > 1000$, e quindi abbiamo finito.



Consideriamo i triangoli $\triangle CMD$ e $\triangle BDA$; questi hanno:

- i segmenti $MC = MB = BD$ per ipotesi;
- i segmenti $AD = DM$ per ipotesi;
- gli angoli $\angle CMD = \angle BDA$. Infatti $\angle CMD$ è il supplementare di $\angle BMD$, che coincide con $\angle BDM$ dato che $\triangle BDM$ è isoscele per ipotesi; ma $\angle BDM$ è il supplementare di $\angle BDA$, quindi $\angle CMD = \angle BDA$.

Dalle osservazioni precedenti segue che i triangoli $\triangle CMD$ e $\triangle BDA$ sono congruenti, da cui $\angle EDA = \angle MDC = \angle EAD$, ossia la tesi.

N1 Osserviamo che gli unici numeri con la proprietà del testo sono i quadrati perfetti: riportiamo 2 dimostrazioni di questo fatto.

Prima soluzione: Naturalmente tutti i divisori di un numero dispari sono dispari: affinché la loro somma sia dispari dunque è necessario sommare un numero dispari di numeri; è noto che il numero dei divisori di un numero n con fattorizzazione $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ è¹:

$$D_n = \prod_{i=1}^k (\alpha_i + 1) = (\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_k + 1).$$

¹se non la conoscevate provate a dimostrarla per esercizio.

Se D_n deve essere dispari ciascuno dei fattori $(\alpha_i + 1)$ deve essere dispari, ossia α_i è pari per ogni i , ma questo implica che n è un quadrato perfetto.

Seconda soluzione: come nella prima soluzione ci si riduce a cercare numeri dispari con un numero dispari di divisori. Preso un qualunque numero intero positivo m se d è un suo divisore, allora anche $\frac{m}{d}$ divide m . Questi due divisori coincidono se e solo se

$$\frac{m}{d} = d \implies m = d^2,$$

dunque se m è un quadrato perfetto effettivamente ha un numero dispari di divisori, mentre se non lo è per ogni divisore d ne troviamo un altro, diverso da d , e naturalmente

$$\frac{m}{d_1} = \frac{m}{d_2} \iff d_1 = d_2$$

dunque m ha un numero pari di divisori. A questo punto basta contare il numero di quadrati perfetti dispari minori di 2020: dato che $44^2 = 1936$ e $45^2 = 2025$ i quadrati perfetti minori di 2020 sono 44 e quelli dispari sono 22.

2 Allenamenti EGMO 2021 – 2

A2. Trovare tutti i polinomi $P(x)$ a coefficienti reali tali che

$$(x+1)P(x-1) - (x-1)P(x)$$

è un polinomio costante.

C2. 2020 numeri diversi sono disposti su 2020 punti su una circonferenza. Dimostra che puoi scegliere 4 punti consecutivi in modo che la somma dei due numeri sui punti esterni sia strettamente maggiore della somma dei due numeri sui punti interni.

G2. Dato un quadrato $ABCD$, sia E il punto medio di AD e F il punto medio di CD . Detto G il punto d'intersezione fra AF e BE , dimostrare che $CG = BC$.

N2. Determinare tutti gli interi positivi n tali che $(n+15)(n+2020)$ è un quadrato perfetto.

2.1 Soluzioni

A2 Chiamiamo α la costante tale per cui

$$\forall x \quad (x+1)P(x-1) - (x-1)P(x) = \alpha$$

Ora sostituendo $x = 0$ e $x = 1$ otteniamo:

$$P(0) = P(-1) = \frac{\alpha}{2}.$$

Ma allora, se chiamiamo $Q(x) := P(x) - \frac{\alpha}{2}$ abbiamo che $x = 0$ e $x = 1$ sono radici di Q , e si può scrivere:

$$Q(x) = x(x+1)D(x)$$

con $D(x)$ un generico polinomio a coefficienti reali.

Sostituendo nella prima identità $P(x) = x(x+1)D(x) + \frac{\alpha}{2}$ otteniamo:

$$D(x) + D(x-1) = 0.$$

Da questa condizione sembra intuitivamente chiaro che D debba essere costante: dimostriamolo formalmente.

Sia $\kappa := D(0)$; il polinomio $T(x) = D(x) - \kappa$ rispetta la stessa condizione di D

$$T(x) + T(x-1) = 0.$$

e per definizione ha una radice in 0. Ma allora ha una radice anche in 1 e -1 , e per induzione:

$$T(n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Tuttavia un polinomio con infinite radici non può che essere il polinomio nullo, da cui segue che D è il polinomio costante e

$$P(x) = \kappa x(x+1) + \frac{\alpha}{2}.$$

C2 Chiamiamo a_1, \dots, a_{2020} i numeri disposti sulla circonferenza in modo che a_i e a_{i+1} siano consecutivi: la tesi equivale a dimostrare che esiste un i per cui $a_i + a_{i+3} > a_{i+1} + a_{i+2}$, dove intendiamo gli indici modulo 2020.

Supponiamo per assurdo che la tesi sia falsa, ovvero che $a_i + a_{i+3} \leq a_{i+1} + a_{i+2}$ per ogni i . Sommando tutte le relazioni otteniamo:

$$2 \sum_{i=1}^{2020} a_i = \sum_{i=1}^{2020} a_i + a_{i+3} \leq \sum_{i=1}^{2020} a_{i+1} + a_{i+2} = 2 \sum_{i=1}^{2020} a_i.$$

Poiché questa è un'uguaglianza per ogni i deve valere $a_i + a_{i+3} = a_{i+1} + a_{i+2}$. In particolare otteniamo

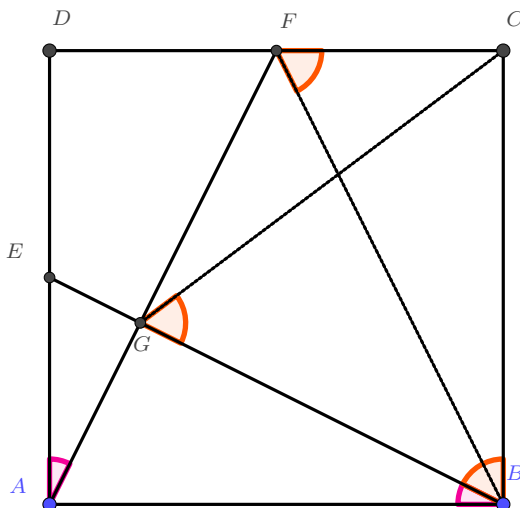
$$a_i - a_{i+1} = a_{i+2} - a_{i+3} \quad \forall i.$$

quindi $p = a_1 - a_2 = a_3 - a_4 = a_{2k-1} - a_{2k}$ per ogni $k \leq 1010$ e $q = a_2 - a_3 = a_4 - a_5 = a_{2k} - a_{2k+1}$ per ogni $k \leq 1010$. Osserviamo che

$$0 = (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + (a_3 - a_4) + \dots + (a_{2019} - a_{2020}) + (a_{2020} - a_1) = 1010p + 1010q,$$

ovvero $p + q = 0$. In particolare $0 = a_1 - a_2 + a_2 - a_3 = a_1 - a_3$, da cui troviamo che $a_1 = a_3$: poiché per ipotesi gli a_i erano tutti distinti, abbiamo trovato un assurdo. Quindi esiste un indice i per cui $a_i + a_{i+3} > a_{i+1} + a_{i+2}$.

- G2** Osserviamo per prima cosa che i triangoli $\triangle DAF$, $\triangle ABE$ sono congruenti (sono triangoli rettangoli con due lati congruenti): in particolare $\angle EBA = \angle FAD$. Quindi $\angle CBE = \pi - \angle EBA = \pi - \angle FAD = \angle DFA$, ovvero gli angoli $\angle CFG$ e $\angle GBC$ sono complementari, da cui otteniamo che il quadrilatero $CFGB$ è ciclico.



Dalla ciclicità segue che $\angle BGC = \angle BFC = \angle ADF$, dove l'ultima uguaglianza segue per simmetria: dalle osservazioni precedenti concludiamo che $\angle BGC = \angle ADF = \angle CBG$, ovvero il triangolo $\triangle CGB$ è isoscele. Quindi $CG = BC$.

- N2** Osserviamo che x è un quadrato perfetto se e solo se $4x$ lo è: ci basta quindi trovare tutti interi n per cui

$$\begin{aligned} 4(n + 15)(n + 2020) &= 4n^2 + (2 \cdot 2035)(2n) + 2020 \cdot 15 \cdot 4 \\ &= (2n + 2035)^2 + 2020 \cdot 15 \cdot 4 - (2035)^2 = (2n + 2035)^2 - 2005^2 \end{aligned}$$

è un quadrato. Ponendo $m = 2n + 2035$ gli interi n soluzioni del problema sono esattamente gli interi $m > 2035$ dispari per cui esiste $q \in \mathbb{N}$ tale che

$$m^2 - 2005^2 = q^2 \iff (m - q)(m + q) = 2005^2 = (5 \cdot 401)^2 \quad (1)$$

In particolare $m - q$ e $m + q$ devono essere entrambi divisori di 2005^2 , con $m - q < m + q$ e $m + q > 0$, quindi anche $m - q$ deve essere positivo. Osserviamo che 2005^2 ha esattamente 4 coppie di divisori $(d, \frac{2005^2}{d})$ con $0 < d < 2005$:

$$(m - q, m + q) = \left(d, \frac{2005^2}{d}\right) \implies (m, q) = \left(\frac{d + \frac{2005^2}{d}}{2}, \frac{\frac{2005^2}{d} - d}{2}\right)$$

e i valori trovati sono interi perché i divisori di 2005 sono dispari. Quindi le soluzioni $(m, q) \in \mathbb{N}^2$ dell'equazione 1 sono $\left\{ \left(\frac{d+2005}{2}, \frac{2005-d}{2} \right) : d \mid 2005, 2005 > d > 0 \right\}$ (si verifica che in effetti sono tutte soluzioni).

Osserviamo $m = \frac{d^2+2005}{2d}$ è sempre dispari: infatti d è dispari, quindi $d^2 \equiv 1 \pmod{4}$, da cui $d^2 + 2005 \equiv 2 \pmod{4}$. Inoltre è facile verificare che $m > 2035$.

Quindi gli interi cercati sono

$$\left\{ \frac{\frac{d^2+2005}{2d} - 2035}{2} : d \mid 2005, 0 < d < 2005 \right\}.$$

3 Allenamenti EGMO 2021 – 3

A3. Trovare tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tali che:

$$f(xy - 1) + f(x)f(y) = 2xy - 1$$

per ogni $x, y \in \mathbb{R}$.

C3. Un mago ha 100 carte numerate da 1 a 100. Le distribuisce in tre scatole, una rossa, una bianca ed una blu, tale che ogni scatola contiene almeno una carta. Un membro del pubblico pesca una carta da due di queste scatole e annuncia la somma dei numeri che legge sulle carte. Con questa sola informazione il mago riesce a indovinare la scatola da cui non è stata pescata nessuna carta. Quanti modi ci sono di distribuire le carte nelle tre scatole in modo che il trucco funzioni?

G3. Siano ω_1 e ω_2 due circonferenze che si intersecano nei punti X and Y . La retta ℓ_1 passa per il centro di ω_1 e interseca ω_2 nei punti P e Q , e la retta ℓ_2 passa per il centro di ω_2 e interseca ω_1 nei punti R e S . Dimostrare che se i punti P, Q, R e S giacciono su una circonferenza ω allora il centro di ω appartiene al segmento XY .

N3. Risolvere l'equazione:

$$3^a + 2^b + 2015 = 3c!$$

con a, b, c interi non negativi.

3.1 Soluzioni

A3 Le uniche soluzioni sono $f(x) = x$ ed $f(x) = -x^2$. Per dimostrarlo sia $P(x, y)$ il predicato del testo, e procediamo con alcune osservazioni.

1. $P(0, 0) \implies f(0) \cdot f(x) = -(1 + f(-1))$ quindi se $f(0) \neq 0$ $f(x)$ è costante per ogni x , ma le costanti non verificano la condizione iniziale, quindi

$$f(0) = 0 \implies f(-1) = -1.$$

2. $P(1, 1) \implies [f(1)]^2 = 1$, e questo ci porta a due casi da analizzare separatamente, cioè $f(1) = 1$ oppure $f(1) = -1$.

Caso 1: $f(1) = 1$. Osserviamo che

3.

$$P(xy, 1) \implies f(xy - 1) = 2xy - 1 - f(xy)$$

ma da $P(x, y)$ abbiamo che $f(xy - 1) = 2xy - 1 - f(x)f(y)$, quindi:

$$f(xy) = f(x) \cdot f(y).$$

4. A questo punto $P(x, -1) \implies f(x) + f(x + 1) = 2x + 1$.
5. Inoltre, usando l'osservazione 3, $P(x, y) \implies f(x + 1) \cdot f(x - 1) + f(x)^2 = 2x^2 - 1$.
6. A questo punto possiamo sostituire usando $P(x, 1)$ e $P(x, -1)$ e otteniamo:

$$(2x - 1 - f(x))(2x + 1 - f(x)) + f^2(x) = 2x^2 - 1 \implies (f(x) - x)^2 = 0 \implies f(x) = x.$$

Caso 2: $f(1) = -1$. In modo analogo osserviamo che

7. $P(xy, 1) \implies f(xy - 1) = 2xy - 1 + f(xy)$ ma da $P(x, y)$ abbiamo che $f(xy - 1) = 2xy - 1 - f(x)f(y)$, quindi:

$$f(xy) = -f(x) \cdot f(y).$$

8. In modo analogo a prima $P(x, y) \implies -f(x + 1) \cdot f(x - 1) + f(x)^2 = 2x^2 - 1$.
9. Sempre sostituendo $P(x, 1)$ e $P(x, -1)$ otteniamo

$$4x^2 - 1 + 2f(x) = 2x^2 - 1 \implies f(x) = -x^2$$

Sostituendo nel predicato iniziale si può verificare che entrambe le soluzioni trovate lo verificano.

C3 La risposta è 12. Generalizziamo il problema e mostriamo che questa è la risposta per ogni $n \geq 4$. La dimostrazione procede per induzione.

Passo base: per $n = 4$ l'unico caso di ambiguità è quello in cui le carte pescate sommano a $5 = 1 + 4 = 2 + 3$. È necessario che il 4 stia da solo o nella stessa scatola dell'1 e viceversa, e che il 2 sia da solo o al più nella stessa scatola del 3: ci sono quindi i casi di $\{1, 4\}, \{2\}, \{3\}$ e permutazioni (dunque 6 configurazioni ammissibili) e $\{2, 3\}, \{1\}, \{4\}$ e permutazioni, dunque altre 6 configurazioni, per un totale di 12 disposizioni possibili. *Nota:* La notazione $\{a, b\}, \{i\}, \{j\}$ significa che nella prima scatola ci sono le carte a e b , nella seconda la carta i e nella terza la carta j ; bisogna contare anche le permutazioni delle scatole perchè queste sono distinguibili.

Osserviamo che le uniche disposizioni valide sono quelle in cui ogni scatola contiene tutte e sole le carte con un fissato resto modulo 3 (chiamiamola *configurazione A*), oppure quando una scatola contiene solo l'1, un'altra contiene la sola n e la rimanente contiene tutte le altre carte (*configurazione B*). Passiamo a dimostrarlo.

Passo induttivo: supponiamo che per n ci siano solo le 12 permutazioni date dalle disposizioni appena osservate, e mostriamo che anche nel caso $n + 1$ è così.

Wlog la carta $n+1$ appartiene alla scatola bianca; se rimuoviamo la carta $n+1$ abbiamo due casi: l'insieme rimasto deve essere ancora una partizione valida di $\{1, \dots, n\}$ oppure lasciamo vuota la scatola bianca.

– **CASO 1:** la scatola bianca non rimane vuota. Allora per ipotesi induttiva dobbiamo essere in una delle partizioni concesse:

- * La configurazione rimasta è di tipo A. In quel caso, riaggiungendo la carta $n+1$ dobbiamo necessariamente metterla nella scatola corrispondente al suo resto modulo 3. In caso contrario si trovano immediatamente dei controesempi.
- * La configurazione rimasta è di tipo B. Allora se riaggiungiamo $\{n+1\}$ alla scatola contenente
 - $\{1\}$ otteniamo un assurdo considerando la somma $n+3 = (n+1) + (2) = (n) + (3)$.
 - $\{2, \dots, n-1\}$ otteniamo un assurdo considerando la somma $n+2 = (n+1) + (1) = (n) + (2)$.
 - $\{n\}$ otteniamo un assurdo considerando la somma $n+2 = (n+1) + (1) = (n) + (2)$.

Otteniamo un assurdo in qualunque caso con la configurazione B, dunque se la scatola bianca non contiene solo la carta $n+1$ dobbiamo trovarci nella configurazione A.

– **CASO 2:** la scatola bianca rimane vuota. Questo significa che le rimanenti due scatole contengono una partizione di $\{1, \dots, n\}$. Passiamo mostrare attraverso un'induzione "inversa" che questa deve essere $\{2, 3, \dots, n\}, \{1\}$.

Passo base: ovviamente la carta n sta nella stessa scatola che contiene la carta

n .

Passo induttivo: prendiamo una carta $k \geq 2$, per ipotesi induttiva tutte le carte $\{k+1, k+2, \dots, n\}$ appartengono alla stessa scatola, diciamo quella blu. Ma allora anche la carta k deve appartenere alla scatola blu: infatti se k fosse nella scatola rossa, potremmo considerare la carta $k-1$ (esiste perchè $k \geq 2$) nei due casi:

- * $k-1$ sta nella scatola rossa; allora la somma $n+k = (n)+(k) = (n+1)+(k-1)$ (blu + rossa e bianca + rossa) dà un assurdo.
- * $k-1$ sta nella scatola blu; allora sempre la somma $n+k = (n)+(k) = (n+1)+(k-1)$ (blu + rossa e bianca + blu) dà un assurdo.

Questa induzione funziona per le carte da 2 ad n ; infine possiamo notare come l'1 deve andare nella scatola rimanente, per non lasciare scatole vuote, e non crea contraddizioni. Questo completa il secondo caso ed esaurisce la dimostrazione.

G3 Indichiamo con O , O_1 e O_2 e con r , r_1 , r_2 i centri e i raggi delle circonferenze ω , ω_1 e ω_2 . Dire che O appartiene al segmento XY equivale a dire che il punto O ha la stessa potenza rispetto alle circonferenze ω_1 e ω_2 . Osserviamo che

$$(O_1O_2 - r_2)(O_1O_2 + r_2) = \text{pow}_{\omega_2}(O_1) = O_1P \cdot O_1Q = \text{pow}_{\omega}(O_1) = (O_1O - r)(O_1O + r)$$

da cui otteniamo $O_1O_2^2 - r_2^2 = O_1O^2 - r^2$. In modo analogo ragionando su ω_2 si dimostra che $O_1O_2^2 - r_1^2 = O_2O^2 - r^2$. Usando le relazioni trovate otteniamo:

$$\begin{aligned} \text{pow}_{\omega_1}(O) &= OO_1^2 - r_1^2 \\ &= (O_1O_2^2 - r_2^2 - r^2) - r_1^2 \\ &= (O_1O_2^2 - r_1^2 - r^2) - r_2^2 \\ &= OO_2^2 - r_2^2 = \text{pow}_{\omega_2}(O) \end{aligned}$$

ovvero che il punto O ha la stessa potenza rispetto alle due circonferenze.

N3 Oss. 1: $c \geq 6$ altrimenti il RHS è sempre strettamente minore del LHS.

Oss. 2: se $a = 0$, allora $2^b + 2016 \equiv 3c! \equiv 0 \pmod{3} \implies 2^b \equiv 0 \pmod{3}$, che non è possibile.

Oss. 3: se $b = 0$, allora $3^a + 2016 \equiv 3c! \equiv 0 \pmod{6} \implies 3^a \equiv 0 \pmod{6}$, che di nuovo non è possibile.

Dalle prime tre osservazioni abbiamo che $a, b \geq 1$ e $c \geq 6$.

Oss. 4: dato che vale l'equazione $3^a + 2^b + 2015 = 3c!$ a maggior ragione vale l'equivalenza modulo 3, che si legge:

$$(-1)^b \equiv 1 \pmod{3} \implies b \text{ è pari.}$$

Oss. 5: analogamente l'equazione del testo deve valere anche in modulo 4, e sapendo per l'osservazione 4 che b è pari abbiamo:

$$(-1)^a \equiv 1 \pmod{4} \implies a \text{ è pari.}$$

Oss. 6 infine l'equazione deve valere anche in modulo 9, e sfruttando l'osservazione 5 otteniamo:

$$2^b \equiv 1 \pmod{9} \implies b \equiv 0 \pmod{6}.$$

Chiamiamo $b = 6k$ e $a = 2m$.

Oss. 7: se $c \geq 7$, prendendo l'equazione in modulo 7 abbiamo:

$$3^a + 64^k + 2015 \equiv 3^a + 1 + (-1) \equiv 0 \pmod{7} \implies \text{non esiste soluzione per } c \geq 7.$$

Rimane da discutere solo il caso in cui $c = 6$. Questo si può fare facilmente a mano, dato che ci si riduce all'equazione:

$$9^m + 2^{6k} + 2015 = 3 \cdot 6! \iff 9^m + 2^{6k} = 145$$

e per $k \geq 2$ il membro di sinistra è strettamente maggiore di quello di destra, mentre per $k = 1$ otteniamo

$$9^m = 81 \implies m = 2.$$

L'unica soluzione possibile è dunque $(a, b, c) = (4, 6, 6)$, e si verifica facilmente che funziona.

4 Allenamenti EGMO 2021 – 4

A4. Siano x_1, \dots, x_n ($n \geq 2$) reali nell'intervallo $[1, 2]$. Dimostrare che

$$|x_1 - x_2| + \dots + |x_n - x_1| \leq \frac{2}{3}(x_1 + \dots + x_n),$$

dove l'uguaglianza vale se e solo se n è pari e la n -upla $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)$ è $(1, 2, \dots, 1, 2)$ o $(2, 1, \dots, 2, 1)$.

C4. È data una griglia 3×3 con celle di lato unitario. Un serpente di lunghezza k è un animale che occupa una k -tupla ordinata di celle di questa griglia, diciamo (s_1, \dots, s_k) . Queste celle devono essere a due a due distinte, e, per $i = 1, \dots, k-1$, s_i ed s_{i+1} avere un lato in comune.

Dopo essere stato posto in una griglia finita $n \times n$, se il serpente sta occupando le celle (s_1, \dots, s_k) ed s è una cella vuota con un lato in comune con s_1 , il serpente può strisciare ad occupare (s, s_1, \dots, s_{k-1}) . Un serpente si è *rivoltato* se occupava inizialmente (s_1, s_2, \dots, s_k) , ma dopo un numero finito di mosse occupa $(s_k, s_{k-1}, \dots, s_1)$.

Si trovi il più grande intero k tale che si possa mettere un serpente lungo k in una griglia 3×3 che riesce a *rivoltarsi*.

G4. Sia ABC un triangolo acutangolo, D il piede dell'altezza uscente da A e M il punto medio di AC . Supponiamo che X sia un punto tale che $\angle AXB = \angle DXM = 90^\circ$ (supponiamo inoltre che X e C siano da parti opposte rispetto a BM). Dimostrare che $\angle XMB = 2\angle MBC$.

N4. Sia \mathbb{Z}_+ l'insieme degli interi positivi. Determinare tutte le funzioni $f : \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{Z}_+$ tali che per ogni m e n il numero intero $f(m) + f(n) - mn$ è diverso da 0 e divide $mf(m) + nf(n)$.

4.1 Soluzioni

A4 Prendiamo il caso $n = 2$, in cui la disuguaglianza che vogliamo dimostrare si riduce a

$$|x_1 - x_2| \leq \frac{1}{3}(x_1 + x_2).$$

Senza perdita di generalità possiamo assumere $x_1 \geq x_2$, che ci permette di togliere il valore assoluto e ci lascia a dover dimostrare

$$x_1 \leq 2x_2.$$

Ma questo è vero sempre, dato che $x_1 \leq 2$ e $2x_2 \geq 2 \cdot 1 = 2$, e l'uguaglianza vale se e solo se $x_1 = 2$ e $x_2 = 1$ (ricordiamoci che abbiamo supposto all'inizio $x_1 \geq x_2$, naturalmente esiste anche la soluzione simmetrica nell'altro caso).

Notiamo che l'osservazione di sopra vale per indici generici $(i, i + 1)$

$$|x_i - x_{i+1}| \leq \frac{1}{3}(x_i + x_{i+1})$$

e sommando da entrambe le parti per i che va da 1 ad n , con la convenzione che $x_{n+1} \equiv x_1$ riotteniamo proprio la disuguaglianza da dimostrare. Inoltre si ha anche che l'uguaglianza vale se e solo se per ciascuna delle disuguaglianze

$$|x_i - x_{i+1}| \leq \frac{1}{3}(x_i + x_{i+1})$$

vale l'uguaglianza, cioè se e solo se $(x_i = 1, x_{i+1} = 2)$ oppure $(x_i = 2, x_{i+1} = 1)$, da cui deriva immediatamente anche la seconda asserzione del testo.

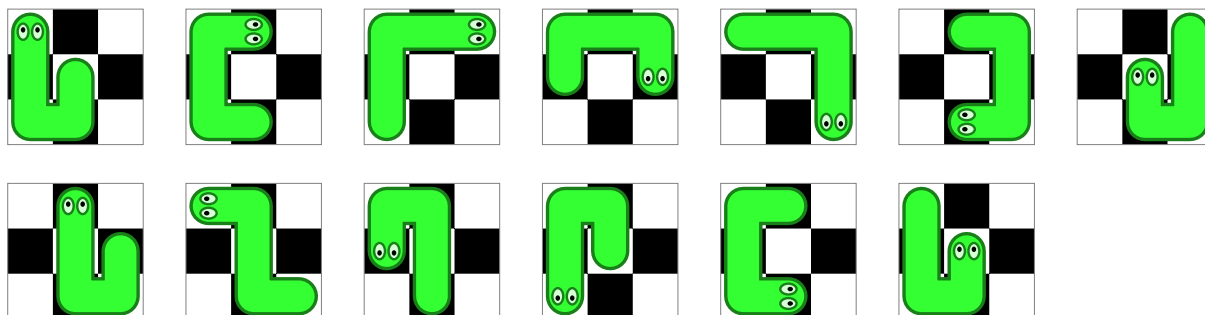
C4 La risposta è $k = 5$.

Mostriamo innanzitutto che per $k \geq 6$ il serpente sicuramente non riesce a *rivoltarsi*. Coloriamo la griglia a scacchiera, di rosso e di blu, in modo che il centro sia rosso. Osserviamo che per $k \geq 6$ il serpente copre almeno 3 caselle blu (e 3 rosse), dato che caselle adiacenti sono di colore diverso.

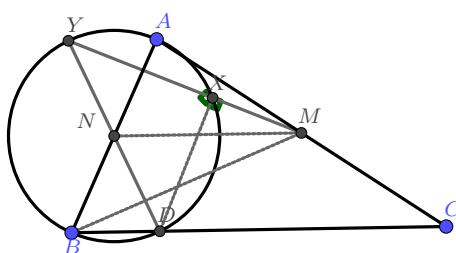
Numeriamo quindi le caselle blu da 1 a 4 nell'ordine in cui si incontrano risalendo il serpente dalla testa alla coda, lasciando per ultima quella eventualmente scoperta (In modo più formale si può dire che numeriamo con 1 la casella blu con l'indice di s_i più basso, e le altre a seguire).

Osserviamo che ogni 2 mosse il serpente si sposta sempre in caselle di uno stesso colore. Quando si sposta a occupare una casella blu ha una sola possibilità e la quaterna ordinata costruita sopra passa da $(1, 2, 3, 4)$ a $(4, 1, 2, 3)$; analogamente due mosse dopo il cambiamento è ancora obbligato, e la quaterna deve diventare $(3, 4, 1, 2)$ e poi $(2, 3, 4, 1)$, per tornare in $(1, 2, 3, 4)$ senza mai passare per $(4, 3, 2, 1)$, quindi per $k \geq 6$ il serpente non può riuscire a rivoltarsi.

Per $k \leq 5$ invece si trovano facilmente degli esempi, come la sequenza



G4 Definiamo Y il secondo punto di intersezione della retta MX con la circonferenza per $(AXDB)$ e sia N il punto medio di AB .



Chiaramente N è il centro della circonferenza e vale $\angle YXD = \pi - \angle MXD = \pi/2$, cioè YD è un diametro della circonferenza, e quindi Y, N, D sono allineati.

Da questo segue che $AYBD$ è un rettangolo, e quindi $AY \parallel BD \parallel MN$ e i punti Y e B sono simmetrici rispetto a MN . Ora

$$\angle XMD = 2\angle MNB = 2\angle MBC$$

dove l'ultimo parallelismo segue dal fatto che $MN \parallel BC$.

N4 Ponendo $m = n = 1$ e otteniamo $2f(1) - 1 \mid 2f(1) \implies 2f(1) - 1 \mid 1$ da cui troviamo $f(1) = 1$. Per $m = 1$ troviamo

$$f(n) - n + 1 \mid nf(n) + 1 \implies f(n) - n + 1 \mid nf(n) + 1 - n(f(n) - n + 1) = n^2 - n + 1 \quad (2)$$

quindi $f(n) \leq n^2$. Inoltre per $m = n$ otteniamo

$$2f(n) - n^2 \mid 2nf(n) \implies 2f(n) - n^2 \mid 2nf(n) - n(2f(n) - n^2) = n^3. \quad (3)$$

Fissato n osserviamo che $f(n)$ può assumere solo finiti valori. Osserviamo che per $n = p$ primo dalla seconda otteniamo che

$$2f(p) - p^2 \in \{\pm 1, \pm p, \pm p^2, \pm p^3\}$$

da cui, escludendo i valori non positivi e quelli maggiori di p^2 , otteniamo che

$$f(p) \in \left\{ \frac{p^2 - p}{2}, \frac{p^2 - 1}{2}, \frac{p^2 + 1}{2}, \frac{p^2 + p}{2}, p^2 \right\}.$$

Da 2 sappiamo anche che $2(f(p) - p + 1) \mid 2(p^2 - p + 1)$: verificando a mano i vari casi troviamo che l'unica soluzione possibile è $f(p) = p^2$ per p abbastanza grande (≥ 5).

Consideriamo adesso l'equazione del testo con $m = p$:

$$f(n) - pn + p^2 \mid p^3 + nf(n) \implies f(n) - pn + p^2 \mid p^3 + n^2p - p^2n = p(p^2 + n^2 - np)$$

Osserviamo che per p abbastanza grande ($p > n^2$) $p \nmid f(n) \leq n^2$, quindi

$$f(n) - pn + p^2 \mid p^2 + n^2 - pn \implies f(n) - pn + p^2 \mid n^2 - f(n).$$

L'ultima equazione è quella decisiva: infatti il membro a destra dipende solo da n ma è divisibile per un termine che dipende da p per ogni p primo abbastanza grande. Quindi necessariamente $n^2 - f(n) = 0$ (ha infiniti divisori), ovvero $f(n) = n^2 \forall n$.

5 Allenamenti EGMO 2021 – 5

- A5.** Gli interi positivi a_1, a_2, \dots, a_n , con $n \geq 5$, sono disposti in senso orario lungo una circonferenza. Sia $a_0 = a_n$ e $a_{n+1} = a_1$. Per ogni $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ il rapporto

$$q_i = \frac{a_{i-1} + a_{i+1}}{a_i}$$

è un intero. Si dimostri che

$$2n \leq q_1 + q_2 + \dots + q_n < 3n.$$

- C5.** Sia $n \geq 3$ un intero. Ci sono n persone presenti ad un convegno con n conferenze, e ad ogni conferenza partecipano almeno 3 persone. Ad ogni conferenza ciascun partecipante stringe la mano a tutti gli altri partecipanti. Dopo l' n -esima conferenza, ogni coppia delle n persone partecipanti al convegno si è scambiata una stretta di mano esattamente una volta. Si dimostri che ad ogni conferenza partecipa sempre lo stesso numero di persone.
- G5.** Sia $ABCD$ un quadrilatero. Supponiamo che esista un punto P interno al quadrilatero tale che $\angle APD = \angle BPC = 90^\circ$ e $PA \cdot PD = PB \cdot PC$. Sia O il circocentro di $\triangle CPD$. Dimostrare che la retta OP passa per il punto medio di AB .
- N5.** Siano a e b due interi positivi tali che $a! + b!$ divide $a! \cdot b!$. Dimostrare che $3a \geq 2b + 2$.

5.1 Soluzioni

A5 Osserviamo che per AM-GM vale

$$\sum_{i=1}^n q_i = \sum_{i=1}^n \frac{a_{i-1}}{a_i} + \sum_{i=1}^n \frac{a_{i+1}}{a_i} \geq 2n.$$

Verifichiamo la disuguaglianza opposta. Dimostriamo la tesi per induzione su n . È facile il passo base $n = 3$. Per il passo induttivo, sia $m = a_k$ il termine maggiore della successione. Abbiamo due casi:

- $a_{k-1} = m$ oppure $a_{k+1} = n = m$: in questo caso possiamo dimostrare che tutti i termini della successione sono uguali m . Infatti, supponiamo che $a_{k-1} = m$, allora

$$q_k = \frac{m + a_{k+1}}{m} \in \mathbb{N} \implies m \mid a_{k+1} \leq m \implies a_{k+1} = m.$$

e analogamente se $a_{k+1} = m$. Iterando il ragionamento, tutti i termini della successione risultano uguali, per cui $q_i = 2 \forall i$, e la tesi è dimostrata.

- $a_{k-1}, a_{k+1} \neq m$. In questo caso abbiamo $0 < q_k < 2$ e poiché è intero otteniamo $q_k = 1$, cioè $a_k = a_{k-1} + a_{k+1}$, quindi otteniamo che

$$q_{k-1} = \frac{a_{k-2} + a_k}{a_{k-1}} = \frac{a_{k-2} + a_{k+1}}{a_{k-1}} + 1$$

e analogamente $q_{k+1} = \frac{a_{k-1} + a_{k+2}}{a_{k+1}} + 1$. Quindi cancellando a_k otteniamo ancora una sequenza valida e per ipotesi induttiva vale

$$\sum_{i=1}^n q_i < 3(n-1) + 2 + q_k = 3n$$

C5 *Nota: questa soluzione si compone di tanti piccoli passaggi, e necessita di molte piccole osservazioni per arrivare fino in fondo; questo lo rende un problema di difficoltà più alta, tuttavia raccogliere punticini qua e là potrebbe risultare relativamente facile.*

Siano a_1, \dots, a_n le persone, A_1, \dots, A_n le conferenze. Sia s_i il numero di conferenze a cui partecipa a_i , e sia t_i il numero di partecipanti di A_i . Senza perdita di generalità, supponiamo che s_n sia il minimo degli s_i (cioè l' n -esima persona a_n è quella che partecipa a meno conferenze).

Oss. 1: $\sum s_i = \sum t_i$ per double counting. Infatti potremmo segnare le partecipazioni in una tabella, ad ogni colonna corrisponde una conferenza e ad ogni riga corrisponde un partecipante; ponendo una X nella casella (a_i, A_j) se e solo se a_i ha partecipato alla conferenza A_j allora $\sum s_i$ è la somma di tutte le X contando per righe, mentre $\sum t_i$ è la somma delle X contando per colonne, e naturalmente le due somme devono essere uguali.

Oss.2: se a_i non partecipa a A_j allora $s_i \geq t_j$. Questo segue dal fatto che a_i deve incontrare tutti i partecipanti ad A_j esattamente una volta, e siccome questi non

possono più rivedersi (avendo già tutti in comune A_j) a_i deve andare ad almeno almeno altre t_j conferenze per incontrarli tutti, uno per volta.

Poniamo $\nu = s_n$. Possiamo supporre senza perdita di generalità che a_n partecipi esattamente alle conferenze A_1, \dots, A_ν . Possiamo inoltre supporre che per $i \leq \nu$ la persona a_i partecipi alla conferenza A_i . Osserviamo che a_i non partecipa alla conferenza A_j se $1 \leq j \leq \nu$ e $j \neq i$ (altrimenti vedrebbe a_n almeno 2 volte, alle conferenze A_i ed A_j). Segue che, usando l'osservazione 2:

$$t_1 \leq s_2 \quad t_2 \leq s_3 \quad \dots \quad t_\nu \leq s_1, \quad t_l \leq \nu \leq s_l \quad \text{per } l > \nu. \quad (4)$$

dove le prime ν disuguaglianze sono una semplice applicazione dell'osservazione 2, mentre le ultime sono ottenute considerando che ν è il minimo degli s_i e che a_n non va a nessuna conferenza A_j con $j > \nu$. Sommando tutte le disuguaglianze si ottiene che $\sum t_l \leq \sum s_j$. Ma vale l'uguaglianza per l'osservazione 1, quindi tutte le disuguaglianze (4) sono in realtà uguaglianze.

Dimentichiamo tutte le assunzioni fatte finora e, da quanto visto nella parte precedente, nominando gli indici delle conferenze in modo opportuno possiamo supporre che $s_1 = t_1, s_2 = t_2, \dots, s_n = t_n$. Inoltre possiamo supporre che $s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_n$.

Oss. 3: Se per assurdo $s_1 > s_2$, avremmo che $t_1 = s_1 > s_2 \geq s_j$ per ogni $j \geq 2$, pertanto a_j deve partecipare a A_1 , ma allora A_1 ha troppi partecipanti (esercizio).

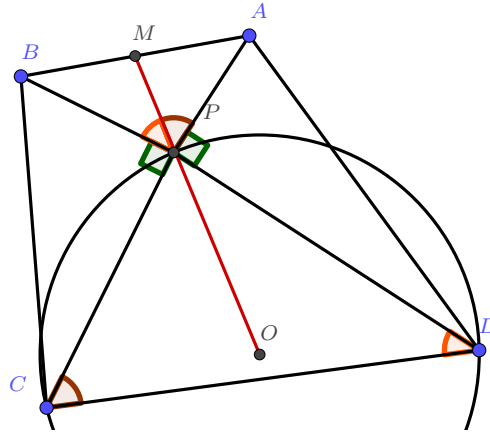
Dunque $s_1 = s_2$. Supponiamo per assurdo che esista un $i > 2$ per cui $s_i < s_1$. Poiché $s_1 = t_1 = t_2$, necessariamente a_i partecipa a A_1 e A_2 . Dunque esiste al più un tale i (altrimenti ci sarebbero almeno due partecipanti che si incontrano sia ad A_1 che ad A_2), e quindi necessariamente $i = n$ (ricordiamo che gli s_i sono ordinati). In particolare $s_1 = s_2 = \dots = s_{n-1} > s_n$.

Oss. 4: Ora, si vede subito che ci sono almeno due conferenze A_l, A_m a cui a_n non ha partecipato. Infatti, se a_n partecipasse ad $n-1$ conferenze tutti gli altri prenderebbero parte a tutte le n conferenze, ed avendo $n \geq 3$ questo dà l'assurdo.

Infine osserviamo che almeno uno fra l e m (diciamo l) è minore di n , per cui $s_1 = s_l = t_l \leq s_n$, assurdo (per l'osservazione 2).

Pertanto $s_1 = s_2 = \dots = s_n$ e anche $t_1 = t_2 = \dots = t_n$, come volevasi dimostrare.

G5 Innanzitutto osserviamo la figura:



Utilizziamo gli angoli orientati, che indicheremo con \angle . Poiché O è il circocentro di $\triangle CDP$ vale $\angle OPD = 90^\circ - \angle DCP$ e $\angle CPO = 90^\circ - \angle PDC$.

Osserviamo inoltre che, poiché PM è mediana del triangolo $\triangle APB$, allora vale

$$\frac{\sin(\angle APM)}{\sin(\angle BPM)} = \frac{PB}{PA}$$

(prova a dimostrarlo usando Carnôt!). Dall'ipotesi $PA \cdot PD = PB \cdot PC$ e dal teorema dei seni su $\triangle PCD$ otteniamo:

$$\frac{\sin(\angle APM)}{\sin(\angle BPM)} = \frac{PB}{PA} = \frac{PD}{PC} = \frac{\sin(\angle DCP)}{\sin(\angle PDC)}$$

inoltre vale $\angle APM + \angle BPM = \angle DCP + \angle PDC = x$. Osserviamo che

$$\frac{\sin(x - \alpha)}{\sin(\alpha)} = \sin(x) \tan(\alpha) - \cos(x)$$

quindi la relazione precedente ci dice che $\tan(\angle BPM) = \tan(\angle PDC)$ da cui, poiché entrambi sono angoli di un triangolo rettangoli (quindi acuti) otteniamo

$$\angle BPM = \angle PDC.$$

Quindi $\angle BPM + 90^\circ + \angle CPO = \angle BPM - \angle PDC = 0$, cioè M, P, O sono allineati

N5 Osserviamo che se $a \geq b$, la tesi è banale (da $a! + b! \mid a!b!$ si verifica $a, b \geq 2$).

Consiaderiamo il caso in cui $a < b = a + k$, allora otteniamo

$$a! \left(1 + \frac{(a+k)!}{a!} \right) \mid a!(a+k)! - (a!)(a! + (a+c)!) = a!^2 \implies 1 + \frac{(a+k)!}{a!} \mid a!$$

Sia allora $N = 1 + \frac{(a+k)!}{a!} = 1 + (a+1) \cdots (a+k)$: vogliamo che per ogni primo $p \mid N$, $p \mid a!$, cioè $p \leq a$. D'altra parte per ogni $p \leq k$, $p \nmid N$ (perché un prodotto di d fattori consecutivi è sempre divisibile per d), cioè i fattori primi di N sono compresi fra k e a . Supponiamo allora per assurdo che $3a < 2b + 2 = 2a + 2k + 2 \iff a < 2k + 2$,

cioé $k > \frac{a}{2}$: allora ogni primo p che divide N è tale che $a/2 < p \leq a$ e poiché $N \mid a!$, $v_p(N) \leq v_p(a!) = 1$. Quindi

$$N = 1 + (a+1) \cdots (a+k) \leq \left(\frac{a}{2} + 1\right) \cdots (a-1)$$

dove $k \geq a/2$. Abbiamo quindi un assurdo, perché il prodotto di k termini maggiori di a è sicuramente maggiore del prodotto di $a/2 \leq k$ termini minori o uguali ad a .