



XVIII GARA NAZIONALE DI MATEMATICA

Cesenatico, 3 maggio 2002

TESTI

- 1) Determinare tutti gli interi positivi di tre cifre che sono uguali a 34 volte la somma delle loro cifre.
- 2) La pianta di una casa ha la forma di una L ottenuta affiancando in modo opportuno quattro quadrati il cui lato misura 10 metri. Le pareti laterali sono tutte alte 10 metri e il tetto della casa ha sei facce partenti dai sei muri laterali e inclinate di 30° rispetto ad un piano orizzontale. Determinare il volume della casa (cioè del solido delimitato dalle sei facce del tetto, dai sei muri laterali e dal piano orizzontale).
- 3) Sono dati una retta r e due punti A e B , non su r . Siano R e S i piedi delle perpendicolari ad r da A e da B rispettivamente. Chiamato M il punto medio del segmento AB , dimostrare che le circonferenze circoscritte ai triangoli ARM e BSM sono uguali (supponendo che i triangoli non siano degeneri).
- 4) Determinare per quali valori di n tutte le soluzioni dell'equazione $x^3 - 3x + n = 0$ sono numeri interi.
- 5) Sia dato $m = 5^n + 3^n + 1$. Dimostrare che se m è un numero primo allora n è multiplo di 12.
- 6) Sia data una scacchiera di 100 righe e 100 colonne, con tutte le caselle bianche.
 - (a) È possibile colorare un numero dispari di caselle in modo tale che ogni casella colorata abbia un numero dispari di caselle colorate adiacenti?
 - (b) È possibile colorare alcune caselle in modo tale che un numero dispari di esse abbia esattamente 4 caselle adiacenti colorate e tutte le altre caselle colorate abbiano esattamente 2 caselle adiacenti colorate?
 - (c) È possibile colorare alcune caselle in modo tale che un numero dispari di esse abbia esattamente 2 caselle adiacenti colorate e tutte le altre caselle colorate abbiano esattamente 4 caselle adiacenti colorate?

Nota: Due caselle si considerano adiacenti se hanno un lato in comune.