

WC 2023 Ammissione - Algebra

Esercizio A1

Per ogni numero reale x , sia

$$f(x) = \sum_{n \in S_x} \frac{1}{2^n}$$

dove S_x è l'insieme degli interi positivi n per cui $\lfloor nx \rfloor$ è pari.

Quale è il più grande numero reale L per cui $f(x) \geq L$ per ogni $x \in [0, 1)$?

Esercizio A2

Sia S un insieme contenente 2004 numeri reali distinti. Dimostrare che esistono $a, b \in \mathbb{R}$ e $A \subset S$ tali che

$$\sum_{x \in A} (x - a)^2 + \sum_{x \in S \setminus A} (x - b)^2 \leq \frac{1001}{1002} \sum_{x \in S} x^2$$

Esercizio A3

Sia \mathcal{A} l'insieme contenente tutti i sottoinsiemi non vuoti (non necessariamente finiti) dell'insieme degli interi positivi \mathbb{Z}_+ . Determinare tutte le funzioni $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^+$ che soddisfano le seguenti proprietà:

1. Per ogni coppia di insiemi $X, Y \in \mathcal{A}$ tali che $X \subseteq Y$, vale $f(Y) \leq f(X)$.
2. Per ogni coppia di insiemi $X, Y \in \mathcal{A}$, valgono le seguenti:

$$f(X) + f(Y) \leq f(X + Y), \quad f(X)f(Y) = f(X \cdot Y)$$

dove $X + Y = \{x + y \mid x \in X, y \in Y\}$ e $X \cdot Y = \{x \cdot y \mid x \in X, y \in Y\}$